MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

26

S. 804. D. 28.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE

ET IMPRIMÉS PAR SON ORDRE

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

TOME QUINZIÈME

PARIS

IMPRIMERIE IMPÉRIALE

M DCCC LVIII

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE QUINZIÈME VOLUME DES SAVANTS ÉTRANGERS.

Pages.

Mémoire pour servir à l'histoire naturelle des sphaignes (*Sphagnum*. L.), par M. W. Ph. Schimper 1

Mémoires sur la vision, par M. L. L. Vallée :

Troisième Mémoire, propositions relatives à l'œil 98

Quatrième Mémoire, sur les yeux des cataractés, quant au calcul des réfractions dans le vivant, etc. 119

Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, par M. H. Darcy 141

Mémoire sur la cristallisation et la structure intérieure du quartz, par M. Des Cloiseaux 404

Mémoire sur la probabilité des erreurs, d'après la méthode des moindres carrés, par M. I. J. Bienaymé 615

FIN DE LA TABLE.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

MÉMOIRE

POUR SERVIR A L'HISTOIRE NATURELLE

DES SPHAIGNES

(*SPHAGNUM* L.),

PAR M. W. PH. SCHIMPER.

AVANT-PROPOS.

Les plantes qui font l'objet de ce mémoire sont devenues célèbres par les nombreuses recherches et les controverses auxquelles elles ont donné lieu. Leur structure anormale, l'élégance de leur tissu, la découverte des anthérozoïdes, à laquelle elles ont donné lieu, leur singulier mode de végétation et l'influence qu'elles exercent sur certains phé-

nomènes géologiques sont autant de points saillants qui les ont fait remarquer depuis longtemps, non-seulement par les botanistes systématiciens, mais aussi par les phytotomistes, les morphologistes et même par les géologues.

Plus d'une fois, dans le cours de mes études bryologiques, je me sentais tenté d'entreprendre la monographie des Sphaignes d'Europe; mais la vue de ces formes innombrables, et, en même temps, de cette homogénéité dans l'aspect général des différentes espèces, me persuada qu'il serait impossible de démêler ce chaos sans de longues et sérieuses études. Il fallait avant tout fixer la place que ce genre doit occuper parmi les cryptogames cellulaires, car il était évident que cette place n'était pas parmi les mousses proprement dites. Pour cela il était nécessaire, non-seulement d'arriver à une connaissance plus complète que ce n'était le cas jusqu'à présent de la structure intime de ces mousses, mais aussi d'en suivre, autant que possible, toute l'évolution, depuis la première germination jusqu'à la plante parfaite. De nombreux essais de germination, dont quelques-uns ont parfaitement réussi, et en dernier lieu la belle découverte de W. Hofmeister du *prothallium* terrestre des *Sphagnum*, ne m'ont plus laissé aucun doute sur la grande différence qui existe, dès la première évolution, entre les *Sphagna* et les *Musci frondosi*. La circonstance, que j'ai réussi à cultiver sous mes yeux, dans des cages de verre, toutes les espèces indigènes de l'Europe, m'a singulièrement facilité la fixation des caractères spécifiques, en même temps qu'elle m'a permis de suivre l'évolution complète des plantes, et de faire toutes mes recherches anatomiques et morphologiques, et tous mes dessins sur le vivant. Malgré ces grands avantages que j'ai eus sur d'autres observateurs, je ne suis cependant pas arrivé à épuiser le sujet, j'ai dû laisser bien

des choses dans le doute; aussi ce travail ne doit-il être considéré que comme un premier essai d'une histoire naturelle des Sphaignes, essai dans lequel j'ai voulu réunir ce qui était connu jusqu'à présent sur ces curieux végétaux et y ajouter ce que j'avais trouvé de nouveau : c'est aussi dans ce sens que je désire qu'il soit jugé.

PREMIÈRE PARTIE.

HISTORIQUE.

Quelques-unes des mousses qui ont donné naissance au genre *Sphagnum* étaient connues parmi les auteurs les plus anciens, et déjà Lobelius, dans ses *Icones*, décrit et figure son *Muscus palustris* de manière à y faire reconnaître sans peine le type du genre auquel Dillenius a appliqué plus tard le nom de *Sphagnum*, nom qui avait été employé par Pline, avec ceux de *Sphacos* et de *Bryum*, pour désigner les mousses et les lichens qui peuplent les troncs des arbres. Les *Sphagnum*, dans le sens de Dillenius, ne constituent cependant rien moins qu'un genre naturel et circonscrit dans les limites dans lesquelles il se trouve circonscrit aujourd'hui; c'était plutôt un amalgame de mousses très-hétérogènes, qui n'avaient de commun entre elles que la capsule sessile et une coiffe qui, par sa petitesse ou son imperfection, avait passé inaperçue. Voici en quels termes l'auteur de l'*Historia muscorum* caractérise son nouveau genre : « Ex his Plinii synonymis elegi « Sphagni nomen, ad designandum Musci genus capsulas uni- « formes proferentis, quæ capsulæ ab aliis differunt, quod nudæ « sint, seu calyptra destitutæ, pedicellis quasi nullis et adeo bre- « vibus insidentes, ut eis prorsus carere visæ et inde *Musci apo-* « *carpi* antehac dictæ fuerint hujus generis species. » D'après ce caractère générique, il n'est pas étonnant de trouver parmi les *Sphagnum* de Dillenius des *Grimmia*, des *Phascum*, le *Diphyscium foliosum*, des *Neckera* et des *Cryphæa*. Deux espèces de vrais *Sphagnum*, mises en tête du genre, sont cependant décrites et figurées avec une rare perfection dans cet ouvrage classique, *Sphagnum palustre molle deflexum squamis cymbiformibus*, qui correspond à notre *Sph. cymbifolium*, et le *Sphagnum palustre molle deflexum squamis capillaceis*, dont la figure se rapporte à notre *Sph. acutifolium*, et

la description en partie à cette espèce et en partie au *Sph. cuspidatum*, que l'auteur avait déjà distingué comme *variet. fluitans* B.

Linné, en adoptant le genre de Dillenius, en éloigna les éléments étrangers jusqu'à la *Cryphæa heteromalla*, et réunit les deux espèces de vrais *Sphagnum* en une seule, sous le nom de *Sph. palustre* α et β.

Ehrhart, en 1780, fut le premier à circonscrire le genre tel qu'il est circonscrit aujourd'hui, et à établir définitivement les trois espèces le plus généralement répandues, les *Sph. cymbifolium, acutifolium* (sous le nom de *capillifolium*) et *cuspidatum*. (Voy. Hannov. Magazin 1780, et *Plant. crypt. Linnæi*, exsicc. Hannov. 1785.)

Hedwig, en 1782, définit nos mousses de la manière suivante : « *Caps. Peristoma* nudum. *Masc. Flos* de ramulorum superiorum « extremitate clavæformis : folliculi intra ejus folioł. alas, fila- « mento succulento cincti. » Ce grand bryologue a, le premier, observé ces fleurs mâles, et les figures qu'il donne de la forme et de l'organisation du fruit laissent peu à désirer; il a également bien rendu le tissu des feuilles sans cependant en avoir compris la structure véritable (voy. Hedwig, *Fundament. Hist. natur. Muscor*). Hedwig admit les deux espèces de Dillenius, sans les décrire plus en détail. Dans ses *Stirpes*, il ne fait plus aucune mention des *Sphagnum*.

Bridel, dans sa *Muscologia recentiorum* (1797, pars II), conserve la phrase générique d'Hedwig, et y ajoute seulement, comme nouveau caractère distinctif : « *Thecæ pedunculus vaginulæ nulli « insertus,* » caractère qui, du reste, repose sur une erreur. L'auteur décrit dans cet ouvrage huit espèces, dont quatre sont rangées avec doute dans ce genre. Il n'y a, en effet, que la moitié de ces espèces qui soient de véritables Sphaignes, savoir : les *Sph. cymbifolium, magellanicum, capillifolium* et *condensatum;* le *Sph. javense* appartient au genre *Leucobryum*, le *Sph. vermiculare* est le *Cryphæa heteromalla*, les *Sph. alpinum* et *simplicissimum* n'ont pas encore pu être rapportés à aucune des espèces de mousses connues, mais il est certain qu'ils ne sauraient faire partie du genre *Sphagnum*.

Dans son premier supplément à la *Muscologia recentiorum*, Bridel complète la phrase générique en y ajoutant : « Thecæ orbiculo « impositæ. Calyptra ab apice rumpens capsulam infra cingens. « Flos dioicus. Fœmineus inter ramulos fastigiatos in summitate « trunci vel ramulorum. » Ce que Bridel dit aussi de la coiffe était déjà parfaitement bien connu par Hedwig, qui donne une figure très-exacte de cet organe sur la planche I de son *Fundamentum*. Les fleurs, au lieu d'être dioïques, comme Bridel les indique, sont presque toujours monoïques. Dans ce supplément, le nombre des espèces est porté à quatorze, parmi lesquelles figure encore le *Leucobryum javense*.

Schwægrichen, dans son premier Supplément au *Species Muscorum* d'Hedwig, décrit les *Sph. latifolium, acutifolium, compactum, squarrosum* et *cuspidatum*, et donne les premières figures des trois dernières espèces.

Palisot de Beauvois[1] caractérise son genre *Tourbette* (*Sphagnum*) de la manière suivante : « Coiffe cuculliforme, très-petite, tombant de bonne heure; opercule court, presque plane; urne pédonculée, sphérique ou ovale; capsule supère; pédoncule blanc, mou, membraneux, transparent; folioles périchétiales longues, lancéolées aiguës. Plantes des marais. Tiges rameuses; feuilles éparses, imbriquées, fleurs terminales ou latérales. » Après avoir énuméré les espèces décrites par Bridel, il ajoute son *Sph. clandestinum*, qui, suivant toute apparence, doit faire partie du genre *Leucobryum*. Cet auteur fait encore l'observation suivante : « Ce genre est remarquable par le réseau tout à fait particulier des feuilles. Ce caractère lui donne une physionomie qui sert particulièrement à distinguer les individus qui lui appartiennent. Ainsi, sous tous les rapports, ce genre est naturel, il ne peut être confondu avec aucun autre. »

La *Bryologia germanica*, par Nees d'Esenbeck et Hornschuch, dont le premier volume, qui traite des *Sphagnum*, a été publié en 1823, range ces mousses encore parmi les *Musci evaginulati* de

[1] *Muscologie, ou Traité sur les mousses*, par feu Palisot de Beauvois, dans les Mémoires de la société Linnéenne: Paris, t. I, 1822.

Bridel, avec le *caractère essentiel* suivant : « Capsula in receptaculo « disciformi pedunculato sessilis. Peristomium nullum. Calyptra « apice rumpens. » Dans le développement du *caractère générique* les auteurs relatent, en les interprétant mal, les observations de Moldenhawer sur la structure *de la tige* et *des feuilles*, et celles de Fréd. Nees d'Esenbeck sur le mode d'émission du contenu des anthéridies, et le mouvement de ce contenu, observé pour la première fois par ce botaniste en 1822, sans contribuer du reste à une meilleure connaissance de ces plantes, autrement que par la description de quelques espèces et variétés jusqu'alors inconnues. Le nombre des espèces propres à l'Allemagne, qui était en même temps celui des espèces connues dans toute l'Europe, fut porté à neuf, dont deux cependant ne sauraient être considérées comme véritablement distinctes. Les figures ne donnent que le port extérieur, et cela encore d'une manière très-imparfaite.

Dans la *Bryologia universa*, publiée en 1826, Bridel établit pour le genre *Sphagnum* la division des *Musci evaginulati*, *cladocarpi*, et ajoute aux *caractères essentiels* et *sexuels*, déjà fixés dans la *Muscologia recentiorum*, le *caractère naturel* suivant : « Plantæ molles, flac- « cidæ, humiditatem spongiæ instar sugentes, in sicco erectæ, in « aqua fluitantes, ramosæ. Rami in latere caulis fasciculati. Folia « imbricata, concava, enervia, diaphana, laxe et eleganter reticu- « lata, areolis polygonis margine serpentino. Theca ovata vel « subrotunda, subcoriacea, operculo planissimo cum crepitu de- « siliens. Habitatio in aquis et torfaceis uliginosis aut in ericetis « udiusculis ad terram. Patria totus orbis. In zona torrida, mon- « tium editiorum depressa scaturiginosa nebulosa tenent; sæpe « tractus ingentes occupantes, fœcundi soli primordia. Vita cæspi- « tosa perennis. » Cette phrase dépeint notre genre d'une manière qui ne laisse plus de doute sur les plantes qui doivent en faire partie, et montre une fois de plus combien Bridel avait déjà le sentiment d'une classification naturelle des mousses. A la fin de la description des espèces, il ajoute encore dans une observation : « Genus omnium maxime naturale. Marte proprio stans, nulli

« muscorum sese adnectens... » Cette observation prouve que la grande différence qui existe entre les Sphaignes et les mousses proprement dites n'avait pas échappé au coup d'œil pénétrant de ce grand bryologue.

J. Hegetschweiler[1], frappé des nombreux changements de formes que subissent les différentes espèces de *Sphagnum*, suivant la nature de leur habitat, crut devoir ramener toutes les espèces établies par les auteurs depuis Dillenius aux deux espèces-types de ce dernier, savoir : au *Sphagnum cymbifolium*, comme type des *Sphagna latifolia*, et au *Sph. capillifolium*, comme type des *Sphagna angustifolia*. Je n'ai pas besoin de démontrer que c'était pousser la simplification trop loin.

En 1833, Fürnrohr publia, dans le *Flora* ou *Botanische Zeitung* de Ratisbonne, un essai biologique et morphologique du genre *Sphagnum* (*Versuch einer Lebens-und Formgeschichte der Gattung Sphagnum*), sans ajouter des faits nouveaux à ceux qui étaient déjà connus.

C. Müller, dans son *Synopsis muscorum*, publié en 1849, ne tenant compte que de la couleur des feuilles et d'une ressemblance éloignée dans le tissu des plantes, rattache les Sphagnacées aux Leucobryacées dans la sous-classe des *Musci acrocarpi*. Cet auteur paraît n'avoir connu ni les travaux de Moldenhawer, ni ceux de Hugo Mohl, en établissant le caractère de la tribu des Sphagnacées; car il ne fait aucune mention de la structure tout exceptionnelle de la tige, et parle encore, comme Meyen, de *ductus intercellulares* dans les feuilles, au lieu de parler des deux espèces de cellules si bien constatées par les deux éminents phytotomistes que je viens de nommer. Il ne fait aucune mention ni du mode particulier de ramification, ni de la place qu'occupent les rameaux relativement aux feuilles, ni de l'inflorescence, qui n'a pas son analogue dans le reste des mousses. Pour lui, l'archégone est unique et sans paraphyses, tandis qu'on le rencontre presque toujours au nombre de deux, trois et même de quatre et cinq, et constam-

[1] Révision des genus *Sphagnum*, dans les *Denkschriften der Schweizer. Gesellschaft für gesammte Naturwissenschaften*. Zurich, 1829.

ment entouré de nombreuses paraphyses ramifiées; il indique l'inflorence comme dioïque, tandis qu'elle est, au contraire, presque toujours monoïque. Cet auteur décrit dix-sept espèces, et cite en outre six espèces qui lui sont restées inconnues.

W. Wilson, qui, dans sa *Bryologia britannica*, 1855, a mieux compris que tous les auteurs antérieurs la véritable nature des Sphaignes, les élève au rang d'un ordre, et fait ressortir dans la caractéristique du genre tout ce qui distingue ces singuliers végétaux des ordres voisins; il décrit avec une grande perfection neuf espèces propres à l'Angleterre, dont deux nouvelles.

La plupart des auteurs que je viens de citer ne se sont occupés des Sphaignes que pour déterminer la place qu'ils doivent avoir dans le système, et pour établir et décrire les espèces d'après leurs caractères extérieurs; ils ont donc peu contribué à la connaissance véritable de ces curieuses plantes.

Depuis Hedwig[1], qui a été le premier à appeler l'attention sur la structure anormale des feuilles et du fruit, jusqu'à Wilson, qui a soumis les Sphaignes à une analyse organographique complète, aucun systématicien ne s'était occupé avec succès de la structure anatomique de ces mousses.

Moldenhawer[2] fut le premier à faire connaître la véritable nature du tissu cellulaire des feuilles et de la tige, et à mettre hors de doute l'existence de deux espèces de cellules, des cellules vertes, qui forment un réseau continu dans les feuilles, et des cellules hyalines, poreuses, souvent fibreuses, qui occupent les aréoles du réseau. Hugo Mohl[3] constata les observations de Moldenhawer.

Meyen[4] reprit les observations de ce dernier; mais, au lieu d'en constater l'exactitude, il entreprit de les réfuter. Mais ce qu'il donne

[1] *Fundament. Hist. natur. Musc. frond.* 1782.

[2] *Beiträge zur Anatomie der Pflanzen*, 1812.

[3] *Ueber den Bau des Cycadeen. Stamms*, 1832.

[4] *Ueber die neuesten Fortschritte der Anatomie u. Physiologie der Gewächse.* Haarlem, 1836; et *Neues System der Pflanzenphysiologie*, 1839.

pour des observations ne sont que des hypothèses reposant sur les erreurs les plus grossières.

Hugo Mohl[1] soumet la question à un nouvel examen et démontre, avec la pénétration et la lucidité qui caractérisent ce grand phytotomiste, la vérité des observations de Moldenhawer et la fausseté des assertions de Meyen.

C. Nægeli[2] et, après lui, H. Schacht[3] se sont voués à la genèse de la tige et des feuilles, et c'est surtout aux ingénieuses recherches du premier que nous devons la connaissance de l'admirable évolution mathématique des feuilles des mousses en général, et de celles des *Sphagnum* en particulier.

Schleiden[4] ne fait mention des *Sphagnum* qu'en passant, et ce qu'il en dit est en grande partie inexact.

L'ouvrage le plus récent sur l'anatomie des Sphaignes sont les *Bijdragen tot de anatomie en phytographie van de Sphagna*, par F. Dozy, Amsterdam, 1854. L'auteur donne une description exacte et des figures détaillées des différentes formes de tissu cellulaire qu'on rencontre dans les feuilles des *Sphagnum*.

Les organes floraux de nos mousses, surtout ceux qui sont considérés comme faisant les fonctions des organes mâles, ont déjà été observés par Hedwig qui, dans son *Fundament. Hist. nat. Muscor.* I, donne une bonne figure des anthéridies et représente le mode d'émission du contenu de ces organes, mais sans en avoir vu le mouvement particulier.

Fred. Nees d'Esenbeck[5] a vu le premier le mouvement spirillaire des anthérozoïdes et le singulier mode de déhiscence des anthéridies.

Fürnrohr, dans le mémoire cité plus haut, et, en dernier lieu,

[1] *Anatomische Untersuchungen über die porösen Zellen von* Sphagnum. (Voy. *Vermischte Schriften botan. Inhalts*, von H. Mohl, 1845, p. 294.)

[2] *Wachsthumsgeschichte der Laub u. Lebermoose*, dans la *Zeitschrift für wissensch. Botanik*. Voy. Schleiden u. Naegeli, 2e Heft. Zurich, 1845.

[3] H. Schacht, *Die Pflanzenzelle*, 1852.

[4] *Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik*, 3e éd. 1854.

[5] *Flora*, 1832.

Schleiden, nient ce mouvement. Unger[1] prend ce mouvement pour un mouvement animal spontané, et va jusqu'à déclarer les anthérozoïdes pour une espèce particulière de *Spirillum*, qu'il décrit et figure sous le nom de *Sp. bryozoon;* Unger n'avait pas vu les cils vibratiles, qui sont la première cause des mouvements de ces corpuscules problématiques.

Les descriptions et figures des anthéridies et des anthérozoïdes, publiées par Schleiden et par Schacht, sont peu exactes.

G. Thuret, dans ses admirables recherches sur les zoospores des algues et les anthéridies des cryptogames, montre la grande analogie qui existe entre les anthéridies des Sphaignes et celles des Hépatiques caulescentes. Nous lui devons les premières figures exactes des anthérozoïdes; c'est chez lui que j'ai vu pour la première fois les cils vibratiles aux anthérozoïdes des *Sphagnum*.

W. Hofmeister[1], auquel toute la science cryptogamique doit tant de nouvelles découvertes, a aussi été le premier à nous faire connaître l'organisation des organes femelles (archégones), le premier commencement et la première évolution. Aucun auteur n'a fourni des matériaux aussi riches et aussi importants pour la connaissance des mousses en général, et de certaines parties des *Sphagnum* en particulier, que cet éminent phytotomiste.

Mes observations sur la germination et le premier développement des jeunes plantes dans l'eau ont été enrichies par la découverte, faite par ce même savant, du prothallium terrestre de ces mousses[2], découverte qui est venue justifier complétement l'établissement de la classe des Sphaignes. Grâce à la bienveillance de M. Hofmeister, qui a bien voulu me communiquer des échantillons, j'ai pu examiner ce prothallium sur la nature et en donner des figures détaillées.

[1] *Flora oder botan. Zeitung*, 1834.

[2] *Vergleichende Untersuchungen der Keimung, Entfaltung u. Fruchtbildung höherer Kryptogamen.* Leipz. 1851.

[3] *Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathem. phys. Klasse*, April 1854; *Ueber die Keimung des Sphag. acutifolium*, von W. Hofmeister.

L'organisation architectonique de la plante parfaite a été étudiée par notre grand morphologiste Alex. Braun, qui, déjà dans son célèbre ouvrage sur la disposition mathématique des écailles aux cônes de conifères, fait mention de l'arrangement géométrique des feuilles et des rameaux dans les *Sphagnum*.

Cette longue liste d'auteurs qui ont traité des Sphaignes, et encore n'ai-je nommé que les plus importants, prouve que l'histoire naturelle de l'intéressante famille de plantes qui fait l'objet de ce mémoire a déjà été abordée plus d'une fois et par des hommes qui occupent le premier rang dans la science; mais jamais elle n'a été exposée dans son ensemble. Les uns avaient choisi pour objet de leurs études les organes végétatifs, les autres les organes floraux, d'autres encore, et c'est même la grande majorité, se sont bornés à décrire la forme, la grandeur et la couleur de ces différentes parties, sans s'inquiéter de leur histoire. Une biologie complète des Sphaignes était en vain attendue jusqu'à ce jour. En entreprenant cette biologie, dont je ne me dissimule du reste nullement la difficulté, j'avais surtout à cœur de réunir en un corps les nombreux documents épars dans tant de publications différentes, de les soumettre à un nouvel examen, d'éclairer ce qui était resté douteux, de faire connaître, autant que cela me serait possible, ce qui jusqu'à présent avait été négligé ou avait échappé aux investigations des savants qui m'ont devancé, d'essayer, en un mot, de jeter les premiers fondements d'une histoire naturelle morphologique et systématique des *Sphagnum*. J'ajoute à cet essai biologique la monographie des espèces indigènes à l'Europe pour donner une idée des différences spécifiques entre des plantes, du reste tellement semblables entre elles, qu'au premier abord on a de la peine à les distinguer. Les matériaux pour cette monographie ne m'ont pas manqué; des milliers d'échantillons réunis sur tous les points de l'Europe et pour la plupart cueillis par moi-même dans leur lieu natal, où j'ai pu observer les conditions de végétation, ont été soumis à l'examen, et presque toutes les figures ont été dessinées ou peintes sur le vivant. Il est cependant

possible, même probable, que des espèces m'aient échappé; toutes les espèces et toutes les formes nouvelles qu'on voudrait me communiquer seraient reçues avec reconnaissance.

DEUXIÈME PARTIE.

SYSTÈME.

Du moment qu'on sépare les Hépatiques des Mousses, il faut aussi en séparer les Sphaignes, dont la somme des caractères distinctifs est évidemment tout aussi grande que celle des Hépatiques. Il est vrai que les *Sphagninæ*, comme je voudrais appeler les végétaux faisant partie de cette nouvelle classe, ne se composeraient que d'un seul ordre, d'une seule tribu, d'une seule famille et même d'un seul genre, si toutefois le *Sph. macrophyllum*, dont les fleurs et les fruits sont encore inconnus, ne constitue pas le type d'un second genre. Mais les Prêles sont dans le même cas et les Rhizocarpées n'offrent guère une variation beaucoup plus grande.

Le caractère systématique de cette nouvelle classe pourrait être fixé de la manière suivante :

Classis : SPHAGNINÆ.

« Plantæ muscinæ caulescentes, foliis homomorphis regulariter « foliosæ ; caulis ex opere celluloso triplici efformatus, externo « laxissimo corticem fingente, medio lignoso, intimo parenchyma- « toso quasi medullari; folia e cellulis dimorphis his parenchy- « matosis succum ferentibus illis prosenchymatosis vacuis porosis « sæpius fibrosis formata; flores axillares, masculi amentiformes, « feminei gemmiformes; fructus vaginulatus ecaliptratus operculo « horizontaliter circumscisso dehiscens, sporæ dimorphæ majores « pyramidatæ, minores polygonæ; prothallium filamentosum no- « dosum vel lobatum hepaticeum. »

En attendant que de nouveaux genres fussent connus, le genre *Sphagnum* serait caractérisé comme il suit :

Genus : Sphagnum.

« Caulis simplex erectus eradiculosus ex apice continuus, secus « apicem singula innovantione annuatim innovans, regulariter fasci- « culato-ramulosus, ramuli cujusque fasciculi partim expansi par- « tim deflexi caulique adpressi, fasciculi ipsi non e foliorum axillis « sed secus eorum insertionem orientes, tota planta humiditate « mollis spongiosa siccitate rigidula fragilis decolor, aquam avide « assugens; antheridia ramulorum amentiformium foliis lateralia « subglobosa, pedicello longo filiformi suffulta, apice elastice de- « hiscentia atque sese revolventia; archegonia pauca terminalia « longistyla, foliis involucralibus internis brevissimis; fructus so- « litarius globosus in receptaculo vaginulam hemisphæricam vel « subdiscoideam efformante sessilis, membrana pericarpica apice « disrumpens basi persistens, sporangium excavato-hemisphæ- « ricum columellæ brevi crassæ insidens. Vita limnophila longe « lateque cæspitosa perennis. »

En comparant le caractère de classe tel que nous venons de l'exposer à celui des Mousses, il ne sera pas difficile de reconnaître la grande différence qui existe entre ces dernières et les Sphagninées.

L'analyse détaillée que nous allons donner de l'ensemble morphologique, organographique et architectonique établira d'une manière plus claire encore qu'une simple phrase diagnostique ne saurait le faire les caractères distinctifs de notre nouvelle classe, dont la place la plus naturelle sera entre les Hépatiques (*Hepaticinæ*) et les Mousses (*Bryinæ*). Elle se rattache aux premières par le mode de germination et de première évolution, par la forme des fleurs et des organes floraux mâles et enfin par l'absence d'une véritable coiffe; aux dernières par la capsule operculée, portée sur une vaginule, munie d'une columelle, ne renfermant point d'élatères. La structure de la tige et des feuilles, le mode de ramification, la vaginule discoïde, la coiffe impar-

faite, l'organisation extérieure de la capsule, les deux espèces de sporules, enfin, distinguent les *Sphagninæ* aussi bien des *Bryinæ* que des *Hepaticinæ*.

TROISIÈME PARTIE.

MORPHOLOGIE ET ORGANOGRAPHIE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉVOLUTION DES ORGANES VÉGÉTATIFS.

§ I.

SPORULES.

Les sporules destinées à reproduire la plante (il y en a d'autres qui ne germent pas) naissent par quatre dans les cellules mères formées dans le tissu sporogone (voy. part. V). Elles sont assez grandes et affectent toujours la forme d'une pyramide tétraédrique déprimée, à faces à peu près égales et à arêtes très-prononcées. Leur surface est granuleuse et l'exospore est mince, d'un jaune plus ou moins foncé. Leur intérieur est occupé par une cellule extrêmement tendre, contiguë à la paroi extérieure; elle constitue l'utricule primordial dans lequel se préparent les premiers éléments du proembryon. Au centre de cette cellule primordiale, se trouvent un ou plusieurs globules granuleux, dont la couleur grisâtre passe d'abord au jaune et ensuite au bleu foncé par l'effet de la teinture d'iode. Ce dépôt d'amylon et d'albumine se colore en vert quand la sporule se prépare à la germination. Quelques gouttelettes d'huile occupent la périphérie; ces gouttelettes sont absorbées dès que la première cellule proembryonnaire est émise. (Voy. pl. 1, fig. 1, 2, 3.)

§ II.

GERMINATION DANS L'EAU.

(Planche 1.)

Le temps nécessaire à la germination est très-difficile à déterminer, et dépend des conditions atmosphériques, autant que des conditions d'existence dans lesquelles les plantes se trouvent au moment où le fruit arrive à sa maturité. Dans les plantes submergées et dont les capsules demeurent également sous l'eau, ces dernières restent fermées par leur opercule, et les sporules germent dans l'intérieur du sporange, ou elles restent prises dans les filaments entrelacés de leurs proembryons, jusqu'au moment de la décomposition de la membrane capsulaire. Il n'est pas rare de trouver, de cette manière, des pelotes de sporules nageant dans l'eau et en voie de produire de jeunes plantes. Les sporules des capsules mûries hors de l'eau restent ordinairement deux à trois mois sur la terre humide ou dans l'eau avant de commencer leur germination.

Pour donner issue à la première cellule proembryonnaire, la membrane sporulaire s'entr'ouvre à l'un des angles de la pyramide, de préférence à l'angle du sommet (pl. 1, fig. 4 à 8). A mesure que d'autres cellules arrivent, la disjonction de l'enveloppe continue exactement suivant les arêtes qui viennent aboutir à l'angle entr'ouvert en premier lieu (fig. 9); le reste de l'exospore demeure parfaitement intact et persiste sur le jeune germe, en y constituant une sorte de coiffe, jusqu'à ce que celui-ci ait absorbé tout le contenu de la sporule et souvent jusqu'à ce que le proembryon ait atteint son développement complet (voy. fig. 9 à 16). Après ce temps, on trouve les membranes sporulaires parfaitement hyalines et en forme de pellicules triangulaires concaves dans l'eau dans laquelle les sporules ont germé (fig. 17).

Suivant les circonstances plus ou moins favorables au développement de la jeune plante, le proembryon reste filamenteux et se ramifie à l'infini sans montrer d'autres modifications sensibles,

ou il montre, à une ou plusieurs extrémités de ses ramifications, des renflements qui, examinés de plus près, présentent un aspect tuberculeux et se trouvent composés d'un plus ou moins grand nombre de cellules vésiculeuses renfermant un liquide mucilagineux, dans lequel nagent des granulations vertes; ce sont là les commencements des jeunes plantes, dont il naît ordinairement plusieurs sur un seul et même proembryon (fig. 12, 15, 16); d'autres extrémités du proembryon s'allongent, s'amincissent insensiblement, deviennent incolores et montrent des articulations de plus en plus obliques, de manière à prendre la forme de radicelles (fig. 12, 16).

Nous voyons ici la même polyembryonie que dans les Mousses (voy. mes *Recherches morphol.*, etc.). Il n'est même pas rare de voir naître plusieurs plantes d'un seul et même tubercule, surtout quand les tubercules restent longtemps avant de germer et forment un prothallium nostocoïde composé d'un grand nombre de cellules (16 *A*. *A'*). Du moment où l'évolution de la jeune plante a commencé, le proembryon filamenteux disparaît, et l'on voit sortir du bourrelet basilaire de la plante, qui correspond au tubercule générateur, un certain nombre de radicelles extrêmement fines et hyalines.

§ III.

GERMINATION SUR LA TERRE HUMIDE.

(Observation de W. Hofmeister.)
(Planches I et II.)

Quand les sporules des Sphaignes germent sur la terre humide, les tubercules destinés à produire les jeunes plantes, au lieu de se transformer en une production nostocoïde, quand le germe ne se développe pas de suite, se transforment en expansions foliacées semblables au prothallium des *Equisetum* ou aux plantes de l'*Anthoceros lævis*. Ce prothallium foliacé se ramifie par dichotomie et par de nouvelles pousses qui sortent de la base et qui sont

quelquefois très-nombreuses (pl. II, fig. 2). Dans quelques-unes des cellules de ces lobes prothalliens, ordinairement dans celles qui sont les plus rapprochées de la base, on voit se faire une multiplication qui ne tarde pas à produire un bourrelet d'abord semi-globuleux et ensuite cylindrique; c'est là le premier commencement de la tige de la jeune plante, sur laquelle d'autres bourrelets indiquent bientôt les rudiments des feuilles. Celles-ci se composent, sur ce premier commencement de la tige, d'un très-petit nombre de cellules vertes (pl. II, III et IV), et ce n'est qu'avec la septième ou la huitième feuille qu'on voit apparaître les cellules hyalines fibreuses (fig. 4). Les bords des lobes du prothallium sont garnis d'un plus ou moins grand nombre de fibrilles simples ou ramifiées, composées d'une seule rangée de cellules à parois d'abord verticales, ensuite obliques; ces fibrilles rampent sur la terre et ont la faculté de produire, à la suite d'une multiplication de leurs cellules terminales, de nouveaux prothallium (pl. II, II 2, figure empruntée à la planche de M. Hofmeister). Des filaments semblables, montrant la plus grande analogie avec des radicelles très-tendres, partent du bourrelet sur lequel s'élève la jeune plante (pl. II, 1 *b*. 3, 4) et à la base de laquelle ils se conservent assez, faisant évidemment fonction de radicelles.

Dès que l'évolution définitive de la jeune plante a commencé, elle se fait avec une grande rapidité. La cellule végétative primaire se divise par des cloisons obliques à son axe et presque perpendiculaires les unes aux autres. Dans ces cellules de second ordre, s'opère la segmentation pour les cellules qui doivent commencer le tissu de la tige et celles qui doivent former les feuilles. Nous parlerons dans un autre chapitre plus en détail de l'évolution de la tige et des parties appendiculaires.

Avec le développement de la jeune plante, le nombre et la longueur des racines, dont les rudiments se montrent déjà avant la formation des premières feuilles, augmentent considérablement. Ces organes, destinés à nourrir le jeune individu, rendent désormais le protonéma inutile. Aussi cette formation intermédiaire

entre la sporule et la plante finit-elle par disparaître après avoir perdu le contenu de ses cellules, contenu qui a été employé pour les premiers commencements de cette dernière. Nous verrons plus tard les racines disparaître aussi pour faire place à un autre système d'organes de nutrition.

§ IV.

RACINES.

Les racines ou radicelles, comme on a l'habitude de nommer ces organes dans les Mousses, sont restées, jusqu'à ce jour, inconnues dans les Sphaignes, parce qu'elles n'existent que dans le premier âge de ces plantes et disparaissent ensuite complétement. Comme nous venons de le voir, elles naissent à la partie inférieure de la jeune tige à mesure que les filaments proembryonnaires disparaissent. Quoique beaucoup plus fines et d'une consistance beaucoup plus tendre que dans les autres Mousses, elles offrent cependant les mêmes caractères distinctifs qui ne permettent pas de les confondre avec les filaments du protonéma. Elles se composent toujours d'une seule série de cellules cylindriques, parfaitemcnt hyalines, et les cloisons produites par ces dernières sont toujours obliques (pl. II, fig. 7 *b*, 9). Elles se ramifient en bifurcations réitérées, et quoique les cellules terminales soient quelquefois renflées et globuleuses comme dans le protonéma, on ne les voit cependant jamais se constituer en prothallium, comme cela se voit aux fibrilles marginales du prothallium lobé ou aux extrémités des rameaux du protonéma filamenteux. Ces cellules globuleuses finissent toujours par s'allonger et par prendre la forme cylindrique des autres cellules de la racine (fig. 10, 11, 12).

Les racines des *Sphagnum*, en outre qu'elles constituent des organes de nutrition pour la jeune plante, en sont aussi les organes de fixation; elles entrent dans la terre quand la sporule a germé sur terre, et quand la germination s'est faite dans l'eau

elles se fixent à un corps flottant quelconque, ordinairement sur une tige de *Sphagnum* (fig. 7, 7 *b*), qu'elles enlacent étroitement en transformant en quelque sorte leurs cellules en suçoirs qui imitent, en petit, les suçoirs des Cuscutes et autres plantes parasites (fig. 11).

A mesure que les plantes se garnissent de leurs rameaux fasciculés, qui affectent en partie un mouvement descendant comme les racines et qui, grâce à leur grande hygroscopicité, sont en état de remplacer ces dernières dans leurs fonctions, toute nouvelle formation de racine cesse, les anciennes tombent à mesure que la partie inférieure de la tige meurt, et ce n'est que dans de très-rares exceptions qu'on trouve par-ci par-là une racine adventive qui sort à l'insertion d'une feuille (fig. 7 *b*).

Nous parlerons plus tard de certaines productions filiformes qui enveloppent les jeunes bourgeons et qui accompagnent régulièrement les organes de génération. Leur structure étant plutôt celle des paraphyses ramifiées que des radicelles, elles ne sauraient être prises pour des racines adventives.

§ V.

TIGE.

La tige commence par être simple et s'élève verticalement sur la terre ou sur le support qui lui sert de point d'attache. Elle est d'une grande ténuité dans le premier âge de la plante, garnie de feuilles espacées qui, à sa partie inférieure, sont presque squamiformes (pl. II, fig. 7, 8), et disposées d'après 2/5. Arrivée à une hauteur de 3 à 4 millimètres, elle émet des ramules flagelliformes simples, qui naissent latéralement à l'insertion des feuilles. Celles-ci en grandissant prennent peu à peu la forme et le tissu propres à l'espèce, après avoir passé par toutes les gradations de formes qu'on rencontre sur les rameaux secondaires des plantes parfaites (fig. 13, 15). La touffe coronale, qui constitue un caractère exclusivement propre aux *Sphagnum*, et qui se compose de feuilles ex-

trèmement rapprochées et de jeunes rameaux dressés, se montre après quatre ou cinq mois, et c'est dès ce moment que la plante entre, pour ainsi dire, dans l'âge adulte (pl. II. fig. 18). Les feuilles prennent alors la forme et la disposition qui distinguent les feuilles de la tige; les rameaux fasciculés apparaissent régulièrement à des intervalles donnés et suivant les règles mathématiques dont je parlerai en traitant de la structure architectonique de la plante.

Le tissu cellulaire de la jeune tige offre déjà les trois systèmes de cellules qui distinguent les Sphaignes de toutes les autres Mousses, savoir: le système périphérique ou cortical, le système ligneux et le système médullaire; la couche corticale est encore simple et la lignification ne se montre dans les cellules prosenchymateuses placées sous l'écorce qu'avec l'âge plus avancé de la plante (pl. II, fig. 16, 17).

§ VI.

FEUILLES.

Les premières feuilles de la jeune tige sont pentastiques comme les feuilles des plantes parfaites. Elles sont formées par un petit nombre de cellules parenchymateuses remplies d'un liquide mucilagineux dans lequel nagent des granulations (vésicules ?) chlorophylleuses peu nombreuses; les mailles, en forme de losange, sont d'un vert jaunâtre (pl. II, fig. 13). Ce tissu simple et tout à fait analogue au tissu foliaire des Phascacées, Funariacées, Splachnacées, etc. ne tarde cependant pas à se compliquer, à mesure que les feuilles montent sur la tige, et à prendre le tissu qui caractérise si bien les feuilles des Sphaignes. Dès la quatrième ou la cinquième feuille, on voit des cellules étroites vertes s'intercaler à la base entre les grandes cellules hyalines et comme pour remplacer les mailles vertes qui résultaient du contact immédiat des grandes cellules; celles-ci perdent toute leur chlorophylle et les premiers rudiments des fibres commencent à se montrer (pl. II, fig. 14, 15); un peu plus loin, toutes les feuilles sont entièrement

composées de ces deux sortes de cellules. Les cellules étroites conduisent la sève et les substances colorantes, tandis que les autres résorbent leur contenu pour augmenter leurs dimensions et pour former leurs fibres annulaires ou spirales (fig. 15). De petits anneaux dispersés à leur face interne montrent la place que doivent occuper un peu plus tard les pores.

Nous passons de cette première époque d'évolution de la plante, époque pendant laquelle nous avons vu les parties végétatives dans leur état rudimentaire, à la plante parfaite.

QUATRIÈME PARTIE.

PLANTE PARFAITE.

PHÉNOMÈNES VÉGÉTATIFS EXTÉRIEURS.

Ces phénomènes constituent l'*ensemble architectonique* de la plante, ensemble qui est le résultat du mode de ramification, de rajeunissement et d'innovation du végétal et de l'arrangement géométrique des rameaux et des feuilles autour de leur axe générateur.

§ I.

LA TIGE.

La tige des *Sphagnum*, à l'état complet de développement, est composée d'un axe principal simple, à végétation terminale indéfinie, et d'un grand nombre d'axes secondaires, stériles ou fertiles, à végétation limitée annuelle. La dichotomie simple ou réitérée que présentent les plantes âgées provient de leur mode particulier d'innovation et de rajeunissement. La première se fait au moyen d'un jet latéral qui naît immédiatement au-dessous du sommet de la tige et suit la même marche de développement que la pousse terminale qui rajeunit la plante mère et en répète tous les phénomènes de végétation (pl. VII, fig. 2). Ce jet latéral ne saurait donc

être considéré comme partie intégrante de la tige principale, mais bien comme le commencement d'un nouvel individu qui suit son évolution particulière et ne se distingue de la plante qui lui a donné naissance, quand il a atteint sa croissance normale pour porter des fleurs ou des fruits, que par la marche inverse que suit la spire génératrice de ses organes appendiculaires.

Le phénomène du rajeunissement et de l'innovation est périodique et se règle d'après l'époque de fructification de l'espèce. Dans nos climats, les Sphaignes fructifient, en général, vers la fin de l'été. Cette époque est suivie d'un ralentissement dans la végétation de la plante et de la formation des bourgeons destinés à continuer ou à répéter cette dernière, qui dépérit à sa partie intérieure à mesure qu'elle se renouvelle ou qu'elle se rajeunit à son sommet. Ces bourgeons une fois entièrement formés, ce qui a toujours lieu avant l'hiver, ont leurs feuilles très-rapprochées, exactement imbriquées et renfermant le commencement de presque tous les rameaux secondaires et jusqu'aux organes floraux qui doivent se développer au printemps (pl. VII, fig. 6, pl. IX, fig. 1). Ce sont donc des plantes rudimentaires, comme les bourgeons des végétaux supérieurs, avec cette distinction, cependant, qu'il n'y a pas un arrêt de végétation aussi complet que dans ceux-ci, et que toutes les feuilles qui les composent se développent en feuilles entièrement semblables à celles de la tige, dont elles ne sont en effet que le jeune âge. Le bourgeon de l'innovation naît à côté du bourgeon terminal ou de rajeunissement et lui est en tout semblable. C'est une des branches d'un jet latéral destiné à former un rameau fasciculé qui se constitue en axe principal, tandis que les autres branches suivent le même développement que les autres axes secondaires.

§ II.

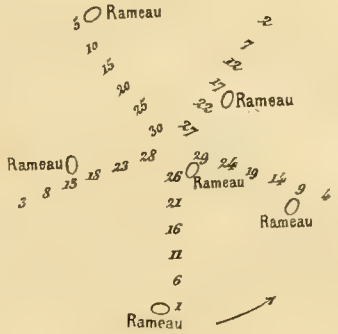
LES RAMEAUX.

Les rameaux, à l'exception de la branche qui est destinée à l'innovation, ont une végétation annuelle limitée. Ils sont en partie

stériles, en partie florifères. Dans des cas tout à fait exceptionnels, surtout à la suite d'une luxuriation produite par des influences locales, ils peuvent devenir prolifères. Il se développe alors à leur extrémité amincie, souvent en continuation directe avec celle-ci, une jeune plante exactement semblable à une jeune plante issue d'une sporule. Cette jeune plante se garnit de radicelles à sa base et se détache de bonne heure pour suivre son développement indépendamment de la plante mère. Cette prolification se voit très-souvent aux plantes étiolées élevées sous verre (voy. la pl. du *Sph. cuspidatum*).

L'origine et la disposition géométrique des rameaux offrent une grande régularité. Ils naissent toujours à l'une des extrémités de la ligne d'insertion des feuilles (pl. V, fig. 12) : à droite de la feuille, quand la spire génératrice des feuilles se meut vers la droite; à gauche, quand elle se meut en sens contraire (pl. VII, fig. 3, 4). Leur espacement, relativement au nombre des feuilles qui tombent sur les entre-nœuds, et leur divergence, suivent les mêmes lois dans toutes les espèces. Sur quatre feuilles il y a toujours un rameau qui est placé de manière à se trouver éloigné de trois feuilles du rameau précédent, autrement dit, trois feuilles stériles alternent régulièrement avec une quatrième, qui est fertile (voy. pl. VII, fig. 3, 4). Il résulte de cet arrangement des rameaux, que ceux-ci offrent la même disposition géométrique que les feuilles, mais en suivant le chemin long de 3/5 au lieu du chemin court de 2/5 suivi par les feuilles, c'est-à-dire une spire qui marche en sens opposé avec la spire des feuilles. Cela fait que les orthostiques des rameaux, quoique aussi au nombre de cinq, ne coïncident pas avec les orthostiques des feuilles. En effet, en partant du premier placé à gauche de la première feuille, le second rameau occupera le côté gauche de la cinquième feuille, le troisième le côté gauche de la neuvième feuille, et ainsi de suite; le sixième, qui viendra se placer immédiatement au-dessus du premier, se trouvera donc à côté de la vingt et unième feuille (voy. pl. VII, fig. 4).

Quand la spire foliaire tourne vers la droite (vue de l'axe) les rameaux se trouveront, suivant la même loi, toujours à droite de l'insertion des feuilles fertiles. Cette disposition tout exceptionnelle des rameaux relativement aux feuilles pourrait être exprimée de la manière suivante:



Elle explique pourquoi une coupe verticale, suivant l'axe d'un bourgeon et la ligne qui réunit deux jeunes jets latéraux placés l'un au-dessus de l'autre, passe toujours par huit feuilles (pl. IV, fig. 1). Comme ces dernières embrassent à leur base un peu plus de 2/5 de la tige, elles se trouvent toutes atteintes par la section, à l'exception de l'orthostique dont l'initiale et la finale correspondent aux rameaux coupés. Quand la coupe ne passe pas exactement par l'axe du bourgeon, les rameaux de l'orthostique placée à peu près vis-à-vis (à 1/5 de la divergence près), avec les feuilles qui sont placées entre eux, se trouvent aussi atteints et il en résulte la fig. 1 de la pl. IV, faite exactement d'après nature; une coupe exacte doit laisser l'orthostique II-VII de la fig. 4, pl. VII, un peu à gauche quand la spire foliaire tourne à gauche, à droite quand la spire tourne à droite (pl. VII, fig. 3, 4).

Ce mouvement rhythmique dans la succession des rameaux, mouvement indépendant de celui des feuilles, est un phénomène extrêmement curieux, mais qui n'est pas sans analogue dans d'autres

familles de plantes. C'est ainsi que nous voyons un assez grand nombre de Mousses, surtout des genres *Hypnum*, *Thuidium* et *Neckera*, garnies de feuilles disposées d'après 2/5 ou 3/8 et de rameaux exactement distiques. Parmi les conifères, il existe d'autres exemples semblables : dans les *Thuia*, par exemple, ce n'est qu'un nombre déterminé des feuilles latérales des rameaux qui produisent des ramules, toutes les feuilles intermédiaires restent stériles; dans les genres *Pinus*, *Abies*, *Picea*, ce ne sont en général que les dernières feuilles de la pousse annuelle qui produisent des bourgeons dans leurs aisselles; toutes les feuilles antécédentes restent stériles : de là l'aspect verticillé de ces arbres. M. Al. Braun cite dans son ouvrage : *Die Verjüngung*, p. 42, un exemple d'alternance presque identique avec celui qu'offrent les *Sphagnum*, à l'exception que les trois feuilles stériles de ces derniers sont remplacées par trois feuilles portant dans leurs aisselles des rameaux florifères, tandis que la quatrième porte un simple rameau vert; c'est le *Tropæolum minus*, qui, en effet, avec une disposition de feuilles de 2/5, offre régulièrement une suite de trois feuilles avec des rameaux florifères et une quatrième feuille avec un rameau stérile : tous les rameaux stériles de cette plante sont donc aussi arrangés suivant 2/5, mais sur une spire qui suit la marche inverse de celle des feuilles.

Après avoir parlé de l'arrangement mathématique des rameaux autour de la tige, et du rapport qui existe entre cet arrangement et celui des feuilles, il me reste encore à dire quelques mots sur la structure générale de ces rameaux et de leurs fonctions.

Dans tous les Sphaignes, les rameaux latéraux sont fasciculés, c'est-à-dire divisés en plusieurs branches dont le nombre varie, suivant les espèces ou suivant la place que les rameaux occupent sur la tige, de trois à sept. Je me suis expressément servi du mot *divisés*, parce que c'est une véritable division et non pas une ramification des axes secondaires, comme on l'a cru jusqu'à présent; car la division se fait au moment même où le rameau commence à se former et avant qu'il ait des feuilles. Les branches qui résul-

tent de cette division ne sont donc pas des axes subordonnés à l'axe secondaire (des axes tertiaires), mais équivalents à cet axe, qui s'est dissous en autant de rayons qu'il y a de branches. Cela explique l'homodromie des feuilles de toutes ces branches et l'antidromie commune de ces mêmes feuilles avec celles de la tige (voy. pl. VII, fig. 2).

Vers le sommet de la tige, les rameaux se rapprochent de manière à y former un capitule plus ou moins épais (voy. pl. VII, fig. 1; pl. VIII, fig. 1 et 5; pl. XII, fig. 1 et 6); de là, vers la partie inférieure, ils s'espacent de plus en plus; deux à trois de leurs branches, à peu près égales entre elles s'écartent horizontalement en décrivant un arc, les autres descendent le long de la tige et s'allongent en devenant presque filiformes, de manière à dépasser souvent plusieurs entre-nœuds (voy. pl. VII, fig. 1). Ce mode de ramification donne à tous les *Sphagnum* une physionomie toute particulière, qui les distingue au premier abord de toutes les Mousses. Un certain nombre des branches étalées, quelquefois presque toutes, se transforment à leurs extrémités en petits chatons élégamment imbriqués et souvent contournés en spirale, qui renferment, dans les aisselles de leurs feuilles, les anthéridies. Un petit nombre forme dès l'origine un bourgeon dressé semblable au bourgeon de l'innovation; ce bourgeon est destiné à former le rameau périchétial; il renferme les archégones. Les branches réfléchies restent toujours stériles et font en quelque sorte fonction de racines adventives, en aidant, conjointement avec le tissu spongieux de l'écorce de la tige, à faire monter l'eau depuis la base de la plante jusqu'à son sommet. Ces ramules filiformes à tissu très-lâche produisent, en effet, par leur réunion à la tige, à laquelle elles s'attachent si étroitement qu'elles paraissent en faire une partie intégrante, un système hydraulique dont les fonctions sont au plus haut point curieuses et surprenantes. Une tige de Sphaigne, haute de plusieurs décimètres, plongée à sa partie inférieure, garnie de ses rameaux, dans un flacon d'eau, videra ce flacon en très-peu de temps en déversant l'eau par son capitule, quand on a eu soin

d'incliner celui-ci un peu sur le côté. On comprend que la réunion de millions de systèmes hydrauliques de ce genre, comme cela se voit dans les grandes tourbières, doit produire des effets considérables.

J'ai eu occasion d'examiner des marais tourbeux dans lesquels, par suite des chaleurs de l'été, l'eau était descendue à près d'un mètre au-dessous du niveau des gazons de *Sphagnum* dont ces marais étaient couverts, et j'ai trouvé ces gazons, non-seulement humides jusqu'à leur surface, mais tellement imbibés d'eau, que je pouvais facilement exprimer un quart de litre d'une eau parfaitement limpide d'une poignée de ces mousses arrachées au hasard. Il est évident que par leur grande hygroscopicité, qui exerce son action, non-seulement sur l'eau terrestre, mais aussi sur l'eau atmosphérique, les Sphaignes jouent un très-grand rôle dans la végétation des marais tourbeux et dans la formation de la tourbe elle-même. Je ne parlerai pas ici de leur influence sur les réservoirs d'eau qui depuis les hauts plateaux tourbeux alimentent les sources au pied des montagnes, ni même sur la qualité de cette eau; je reviendrai dans un autre travail sur le rôle intéressant que jouent les *Sphagnum* dans l'économie de la nature.

§ III.

LES FEUILLES.

Les feuilles des Sphaignes varient suivant la place qu'elles occupent sur la plante, non-seulement sous le rapport de leur forme, mais aussi sous le rapport de leur tissu cellulaire. Celles de la tige sont toujours très-espacées, arrangées d'après 2/5 et souvent insérées obliquement dans le sens du mouvement ascensionnel de la spire, et presque toujours complétement réfléchies (pl. V, fig. 12). Dans toutes les espèces, leur forme est ovale, oblongue, et leur tissu est plus lâche que celui des feuilles raméales; les grandes cellules hyalines sont souvent dépourvues de fibres; mais leurs pores, quand ils existent, acquièrent des dimensions très-

considérables. Les feuilles des branches écartées en arc sont très-rapprochées, surtout au milieu, où elles sont en même temps plus étroitement imbriquées et plus grandes qu'aux deux extrémités. C'est plus particulièrement sur elles que s'établissent les différences spécifiques tirées des feuilles; car leur forme et leur mode d'imbrication, constants pour la même espèce, varient beaucoup suivant les espèces diverses, tandis que les feuilles des rameaux pendants, souvent très-variables dans le même individu, se ressemblent en général dans toutes les espèces par leur forme allongée plus ou moins étroite.

La disposition géométrique des feuilles raméales est beaucoup moins constante que celle de la tige, mais elle se meut toujours dans les dispositions dérivées de 2/5; quand les cinq orthostiques se transforment en spires, ce qui se voit très-souvent dans les chatons mâles (voy. pl. VIII, fig. 3), les 2/5 passent aux 3/8, aux 5/13 et même aux 8/21. Les branches pendantes simplifient la disposition de leurs feuilles au lieu de la compliquer, et nous voyons ces dernières descendre de 2/5 à 1/3 et même à 1/2; cette dernière disposition me paraît cependant être plutôt apparente que réelle.

§ IV.

LA COULEUR.

Quoique la couleur ne fasse pas partie de l'ensemble architectonique de la plante, elle contribue cependant beaucoup au caractère de sa physionomie extérieure et sert souvent à distinguer les espèces au premier abord; car presque chacune des espèces de *Sphagnum* offre une teinte particulière. Je crois, par conséquent, devoir en faire mention pour ne rien négliger qui puisse jeter de la lumière sur les caractères distinctifs de ces plantes intéressantes qui, en outre de leur organisation tout exceptionnelle, se font encore remarquer par leur coloration variée offrant souvent les teintes les plus extraordinaires.

Dans un certain nombre d'espèces, telles que les *Sph. squarrosum*

et *cuspidatum*, les feuilles restent toujours vertes; dans le *Sph. molluscum* elles sont d'un vert jaunâtre très-tendre; dans le *Sph. contortum* elles passent au jaune ferrugineux plus ou moins intense, les feuilles du *Sph. latifolium* et plus souvent encore celles du *Sph. acutifolium* sont quelquefois d'un beau rouge pourpre, qui passe par toutes les nuances au rouge amarante et au rouge lilas ou au rouge couleur lie de vin. Il n'est pas rare de rencontrer toutes ces nuances de rouge entremêlées de vert sur la même plante, où elles occupent certaines régions, tandis que le vert en occupe d'autres. D'autres teintes, telles que le vert pomme clair, le vert olive, le brun, le jaune paille, etc. se voient très-souvent et contribuent à faire des Sphaignes les Mousses les plus polychromes qui existent. Le rouge y a ceci de particulier qu'après la mort de la plante il passe au bleu indigo par le simple effet de l'eau. A la suite de la dessiccation des plantes, toutes les couleurs pâlissent fortement, et le vert le plus intense passe au glauque blanchâtre.

Après avoir esquissé d'une manière générale l'ensemble extérieur des organes végétatifs, pour faire ressortir les caractères naturels qui distinguent les Sphagninées des autres Mousses, nous passons à l'examen de la structure anatomique de ces mêmes organes.

CINQUIÈME PARTIE.

GENÈSE ET STRUCTURE ANATOMIQUE DES ORGANES DE VÉGÉTATION.

---

§ I.

GENÈSE ET STRUCTURE ANATOMIQUE DE LA TIGE.

(Planches III et VII.)

Pour comprendre la structure de la tige, nous devons remonter jusqu'à la cellule mère, qui constitue son sommet végétatif.

La tige des *Sphagnum* se termine, contrairement à ce qu'on voit dans les autres Mousses où elle reste entièrement cylindrique, en un cône (pl. IV, fig. 1) dont le sommet est occupé par la cellule qui est la mère commune de toutes les cellules qui composent la plante, ou dont elle a pu être composée depuis sa première origine. Cette cellule continue à elle seule la tige et les feuilles, c'est donc dans elle qu'il faut chercher les premiers commencements de ces organes.

En examinant cette cellule conjointement avec les dernières cellules dérivées du second et du troisième ordre, on trouve que la première segmentation se fait vers sa partie inférieure au moyen de parois qui se dirigent obliquement de la périphérie vers l'axe. Les cellules résultant de cette division se segmentent de leur côté au moyen d'une cloison parallèle à l'axe (pl. III, fig. 5); les cellules de troisième ordre deviennent du côté de l'axe les cellules génératrices du tissu intérieur de la tige; celles placées vers la périphérie se constituent en cellules génératrices du tissu extérieur de la tige et de celui des feuilles. Les premières continuent à se diviser par des segmentations horizontales et verticales; les cellules périphériques se segmentent en partie de la même manière, en partie suivant le mode de segmentation qu'offrent les cellules génératrices du tissu foliaire; un certain nombre, celles qui doivent donner naissance aux rameaux, suivent la marche de la segmentation de la cellule terminale. Ces cellules génératrices des axes secondaires sortent toujours à côté de l'insertion des jeunes feuilles à peine arrivées au quart de leur développement normal (voy. pl. IV, fig. 1), et suivent les lois de disposition mathématique que nous connaissons pour les rameaux. Elles sont simples au commencement; mais elles ne tardent pas à se subdiviser en un nombre plus ou moins grand de cellules dont les trois extérieures deviennent les cellules génératrices des trois à sept branches dans lesquelles le rameau se divise dès sa première origine.

Hofmeister commet deux erreurs en parlant de l'origine de ces rameaux: d'abord en plaçant cette origine exactement au-dessus de

la ligne médiane de la jeune feuille, — elle est toujours latérale, — et, en second lieu, en prenant les cellules génératrices des branches pour des cellules génératrices de feuilles. Nous avons déjà vu plus haut que les rameaux se subdivisent en un certain nombre de branches presque verticillées avant d'avoir formé des feuilles et avant même d'être sortis de l'enveloppe corticale de la tige (voy. pl. IV, fig. 4). Cette enveloppe, qui constitue en quelque sorte l'écorce de la tige, est formée par une à quatre couches de cellules hyalines très-grandes, qui naissent de la couche de cellules dont proviennent aussi les feuilles. Quand cette couche corticale doit rester simple, les cellules parenchymateuses, qui recouvrent la couche prosenchymateuse destinée à se lignifier, ne font que se dilater (pl. V, fig. 13). Quand, par contre, elle doit se composer de plusieurs couches, les cellules, avant de s'élargir, se subdivisent une autre fois par des cloisons verticales (pl. IV, fig. 4), pour ensuite prendre les dimensions qu'on leur voit à l'époque de leur développement normal (pl. IV, fig. 4, 5, 6). A mesure que les cellules qui doivent constituer le cylindre ligneux et le faisceau médullaire ou axile achèvent leur segmentation, et que les cellules nouvelles atteignent leur grandeur voulue, le cône végétatif devient successivement cylindrique pour continuer la tige. Dans cette nouvelle portion ajoutée à la tige, toutes les cellules qui composent le corps extérieur sont encore vertes, élégamment pointillées comme les vaisseaux ponctués des plantes supérieures (pl. IV, fig. 2, 3), et remplies d'un liquide mucilagineux dans lequel on distingue des granulations vertes en voie de dissolution, et souvent encore des cytoblastes avec leur nucléole (pl. IV, fig. 9). Peu à peu les couches périphériques du tronc commencent à se lignifier, les cellules vertes se transforment en cellules ligneuses brunes, à parois souvent très-épaisses (pl. IV, fig. 8, 10), leur contenu disparaît entièrement; les cellules plus grandes qui occupent l'axe de la tige restent plus ou moins vertes et conservent longtemps encore le contenu liquide, ainsi que leur caractère de cellules ponctuées; avec l'âge de la tige ce contenu finit cependant

par se déposer, en se condensant, contre les parois des cellules, les points en relief s'effacent et ces parois finissent par devenir assez épaisses, tout en conservant leur couleur verte. (Voy. pl. IV, fig. 11; pl. V, fig. 14.)

Pendant que le corps ligneux et le corps médullaire se forment ainsi, le cylindre cortical achève aussi son développement; les cellules, d'abord petites et remplies de liquide, se gonflent et deviennent parfaitement hyalines et sèches; dans la plupart des espèces elles forment trois à quatre couches sur la tige (pl. IV, fig. 4-6), deux sur les rameaux étendus horizontalement (fig. 7), une seule sur les branches pendantes (pl. V, fig. 8, 9, 11); dans ces dernières l'écorce dépasse de beaucoup en épaisseur le corps ligneux et médullaire. Dans un petit nombre d'espèces, et plus particulièrement dans celles qui vivent tout à fait dans l'eau, comme les *Sph. subsecundum*, *molluscum*, le cylindre cortical ne se compose que d'une seule couche de cellules (pl. V, fig. 12, 13).

Les cellules de l'enveloppe corticale sont quelquefois des cellules fibreuses et presque toujours percées de trous annulaires entourés d'un rebord distinct. (Voy. pl. V, fig. 1, 3-6). Les fibres forment des spires simples ou composées, plus ou moins régulières (fig. 4, 5). Dans les rameaux pendants, ce sont tantôt les pores, tantôt les fibres qui manquent; quand les premiers existent, ils se trouvent ordinairement à l'extrémité supérieure d'une cellule plus grande que les autres et en forme de fiole à col courbé en dehors (pl. V, fig. 11; pl. VI, fig. 13). Comme ces rameaux sont renversés, ces cellules en fiole ont leur ouverture tournée en bas et fonctionnent ainsi comme de véritables siphons. Les pores sont plus ou moins nombreux, plus ou moins grands; ils ne se forment, comme dans les feuilles, que quand les cellules ont déjà acquis leur entier développement et seulement peu à peu; la place sur la cellule qui doit former un pore est d'abord marquée par une fibre annulaire; à mesure que cette fibre s'épaissit, la membrane qu'elle entoure s'amincit et finit enfin par disparaître entièrement. Il est évident que l'anneau qui entoure les pores se forme aux dépens de la mem-

brane qui occupait la place des pores, de même que les fibres se forment aux dépens de la paroi extérieure (de la cellule primordiale?) de toute la cellule; car la membrane des cellules sans fibres est toujours plus épaisse que celle des cellules avec fibres. Il s'opère une liquéfaction de la cellulose après la formation complète de la membrane cellulaire, et ensuite une solidification de la même substance sous forme de fibres. Mais ce n'est pas ici le lieu de discuter les phénomènes physiologiques connus qui ont lieu dans la vie de la cellule. Nous passons de la structure anatomique des organes axiles à celle des organes appendiculaires.

§ II.

GENÈSE ET STRUCTURE ANATOMIQUE DES FEUILLES.

(Planches III, IV, VI.)

La genèse des feuilles des Mousses en général, et de celles des *Sphagnum* en particulier, a occupé depuis quelque temps nos physiologistes et phytotomistes les plus célèbres, et les observations tout aussi ingénieuses qu'exactes de Nægeli, sur ce sujet, me dispensent d'entrer ici dans de larges détails sur la cellule génératrice et le premier développement des feuilles des *Sphagnum*. Mais, comme cet habile observateur n'a pas suivi ces feuilles dans toutes les phases de leur évolution, et que certains faits rapportés par Hofmeister, Schacht et autres ne s'accordent pas avec les résultats auxquels mes recherches m'ont conduit, je m'arrête sur quelques points restés en litige jusqu'à présent.

On croit encore généralement que les feuilles des *Sphagnum* naissent de la couche corticale de la tige; j'ai déjà fait observer plus haut qu'elles ont la même origine que les rameaux, c'est-à-dire qu'elles naissent de la couche cellulaire extérieure du cylindre ligneux pendant que celui-ci est encore, pour ainsi dire, à l'état de cambium. (Voy. pl. III, fig. 5, 6; pl. IV, fig. 1, 2, 4.). Nægeli croit que l'accroissement de la feuille se fait par le sommet; Schleiden prétend qu'il se fait uniquement par la base. Nulle part mieux que

dans les Sphaignes on ne peut voir que la multiplication des cellules continue encore longtemps *vers* la base, quand elle a cessé au sommet et *à la* base même. Les cellules apiciales et basilaires sont les plus anciennes; elles sont le résultat immédiat de la segmentation de la première cellule génératrice. Presque toutes les jeunes feuilles des *Sphagnum* sont cuculliformes (voy. pl. III, fig. 23, 24), parce que les cellules du sommet et de la partie supérieure du bord ont cessé de se multiplier quand les cellules au-dessous du sommet continuent encore leur multiplication. Dans le cours de l'élargissement du limbe foliaire, la partie concave de ces jeunes feuilles s'ouvre au moyen d'une déchirure suivant la ligne médiane; les bords résultant de cette déchirure sont crénelés ou dentelés (pl. III, fig. 21, 22).

Dans le tout à fait jeune âge des feuilles, la segmentation et le mode d'accroissement des cellules se font absolument comme dans les autres Mousses (pl. III, fig. 9-20), et ce n'est que quand les feuilles commencent à prendre à peu près la forme qu'elles doivent avoir à leur état parfait, qu'il s'établit une différence dans la forme et la grandeur de leurs cellules. Les cellules rectangulaires ou presque rectangulaires se segmentent en trois parties inégales, d'abord par une cloison parallèle à une des commissures et qui divise la cellule en deux rectangles, dont l'un est plus étroit que l'autre, et ensuite par une seconde cloison perpendiculaire à la première, qui divise le plus grand des deux rectangles également en deux rectangles inégaux; le plus grand de ces deux derniers rectangles est destiné à former la grande cellule hyaline, les deux petits forment deux cellules chlorophylleuses (pl. III, fig. 17-19). Comme ce mode de division se répète symétriquement dans toutes les cellules, à l'exception des cellules marginales, et qu'il y a toujours pour une cellule hyaline deux cellules vertes, placées vis-à-vis des deux cellules vertes de la cellule hyaline voisine, il se fait que les cellules vertes constituent un réseau dont les cellules hyalines forment les aréoles. (Voy. pl. III, fig. 18, 21, 22, 25, 26, 27.) Avec cette nouvelle segmentation, le canevas général de la feuille parfaite est formé.

Toutes les cellules issues de cette division prennent dés à présent un accroissement considérable, surtout dans le sens de la longueur. Mais cet accroissement est loin d'être uniforme: les cellules favorisées lors du sectionnement se trouvent encore favorisées maintenant cependant aux dépens de leur contenu; car à mesure que leur volume augmente, celui-ci diminue, le liquide mucilagineux et la chlorophylle disparaissent peu à peu, et quand ces cellules ont leur grandeur voulue, elles sont complétement vides et hyalines (pl. IV, fig. 23). Les petites cellules, par contre, tout en s'allongeant, ont non-seulement conservé leur contenu, mais elles l'ont même augmenté, les vésicules chlorophylleuses sont devenues plus nombreuses et plus grandes, et ont pris une couleur plus intense (pl. III, fig. 25-27). La couleur verte se trouve souvent remplacée par d'autres nuances, surtout par le rouge ou le jaune. Dans le cours de ce développement, les cellules chlorophylleuses se divisent encore une ou deux fois par des cloisons dans le sens de leur petit axe, ce qui fait qu'au lieu de quatre, il y en a souvent six à huit qui entourent une cellule hyaline; une division pareille s'opère aussi quelquefois dans les grandes cellules aériennes, et il n'est pas rare de les trouver divisées en deux, trois ou quatre compartiments (pl. III, fig. 26; pl. VI, fig. 1-10). Quand tout le réseau est achevé et que toutes les cellules ont acquis leur grandeur voulue, les grandes débordent quelquefois les petites au point de les couvrir entièrement; elles se touchent même au-dessus et au-dessous de ces dernières et leurs membranes se soudent ensemble au moyen de la substance extracellulaires. (Voy. pl. VI, fig. 7, 8.) Les cellules chlorophylleuses disparaissent de cette manière, étant enveloppées entièrement par les grandes, où elles ne paraissent former que des méats intercellulaires (pl. IV, fig. 6), ou les lignes de soudure des grandes cellules. Aussi beaucoup de phytotomistes, et entre autres Meyen, ont-ils nié l'existence des cellules vertes. Ce dernier dit: « La supposition de la présence de deux espèces de cellules dans les feuilles de *Sphagnum* repose sur une illusion d'optique et est entièrement

fausse; les cellules chlorophylleuses n'existent pas; elles ne sont autre chose que les lignes de soudure des grandes cellules fibreuses et poreuses. » Ch. Müller, dans son *Synopsis muscorum* de 1851, les prend pour des méats intercellulaires.

Pour le reste de la structure anatomique des feuilles entièrement développées des *Sphagnum*, je renvoie à mes *Recherches anatomiques et morphologiques sur les Mousses*, où j'en traite plus en détail, et surtout aux travaux de C. Nægeli, cités dans la partie historique. Je ferai seulement remarquer encore que les cellules hyalines ne se garnissent pas toujours de fibres spirales; au lieu de ces dernières, elles forment quelquefois des cloisons (pl. VI, fig. 11), de simples anneaux (fig. 12) ou des fragments d'anneaux et de fibres (fig. 4), ou de simples ronds annulaires dispersés sur toute la membrane et dont l'intérieur finit par être résorbé pour former un trou. Plus les trous sont nombreux ou grands, moins les fibres sont nombreuses, et *vice versa* (fig. 4, 10, 11).

CHAPITRE II.

GENÈSE ET STRUCTURE ANATOMIQUE DES ORGANES DE REPRODUCTION.

De même que les Hépatiques et les Mousses, les Sphaignes offrent les deux espèces d'organes de génération : les anthéridies, considérées généralement comme les organes mâles, et les archégones, qui représentent les organes femelles des plantes phanérogames. Les deux sexes se trouvent ou sur le même individu, ou, et c'est là le cas le plus ordinaire, sur des individus différents; jamais ils ne se rencontrent réunis dans un seul et même involucre, comme cela se voit si souvent dans les Mousses. Les fleurs elles-mêmes sont toujours latérales, soit à l'axe primaire, soit à des axes secondaires. Les Sphaignes sont donc essentiellement pleurocarpes, et on ne comprend pas pourquoi tous les auteurs les avaient rangés jusqu'à présent parmi les Mousses acrocarpes.

Malgré les réclamations de certains puristes scientifiques, je continue à me servir du mot de *fleur* pour désigner les organes

sexuels dont les feuilles involucrales constituent une enveloppe de forme déterminée, et de celui d'*inflorescence* pour exprimer la disposition des fleurs sur l'axe principal de la plante et sur leur axe spécial. Pourquoi ne donnerait-on pas, dans le même règne, les mêmes noms aux organes qui ont la même valeur et qui produisent les mêmes résultats? Mirbel dit avec raison : « L'emploi des mots détermine seul leur valeur. » La nomenclature botanique est déjà assez encombrée de termes barbares; pourquoi, par un purisme exagéré, vouloir la surcharger davantage encore?

§ I.

FLEURS MÂLES.

(Planche VIII.)

Les fleurs mâles des Sphaignes constituent des inflorescences qui n'ont d'analogues que dans les Hépatiques feuillées (Jongermanniées). Elles sont réunies sur des axes secondaires où elles forment des chatons plus ou moins allongés ou des cônes en miniature. Chaque fleur est composée d'une feuille involucrale et d'une anthéridie placée à l'une ou à l'autre extrémité de la ligne d'insertion de cette feuille, mais toujours du même côté pour la même inflorescence (fig. 8, 12).

Les feuilles involucrales se distinguent peu des feuilles des branches horizontales sous le rapport de la forme et du tissu cellulaire, mais elles se font presque toujours remarquer par une teinte différente, souvent très-caractéristique, et par une imbrication plus serrée. Grâce à cette imbrication, les orthostiques et les spires secondaires ressortent encore plus que sur les ramules stériles; ce qui facilite beaucoup la détermination rigoureuse de la disposition mathématique des feuilles (fig. 2, 3, 6, 7). A la suite d'une torsion de l'axe, les orthostiques deviennent souvent obliques et forment même des spires à *plusieurs tours très-élégantes* (fig. 3). La végétation des ramules floraux ne s'arrête pas avec la dernière fleur, mais elle se continue au delà du chaton pour finir dans un

prolongement qui s'amincit insensiblement, comme dans les ramules stériles, et dont les feuilles reprennent la couleur verte et la forme des feuilles terminales de ces derniers; il arrive souvent que le chaton florifère s'allonge en même temps. Il devient alors difficile, surtout après la floraison, de distinguer un ramule floral d'un ramule ordinaire (fig. 7; pl. XIII, fig. F. 1). Ce prolongement de l'axe floral ne saurait être pris pour une prolification comme dans les Polytrics, où la fleur mâle est terminale et finit le cycle annuel d'évolution de la plante, sauf à donner naissance plus tard à une innovation axile, qui commence et parcourt un nouveau cycle. Dans les Sphaignes, où les fleurs sont toujours latérales, l'axe floral se continue en axe purement végétatif sans arrêt de végétation préalable. L'extrémité verte du chaton floral n'est donc autre chose que la continuation directe de ce dernier, sa dernière phase d'évolution, moins les organes générateurs.

Dans les mousses ordinaires, les fleurs mâles naissent à une époque déterminée et immédiatement avant l'apparition des fleurs femelles, et toutes les anthéridies s'ouvrent à peu près en même temps, de sorte qu'on chercherait en vain des fleurs à anthéridies intactes quand les jeunes fruits ont commencé à se former. Dans les *Sphagnum*, les choses se passent autrement. Non-seulement on trouve sur les mêmes plantes, pendant la plus grande partie de l'année, dans un seul et même chaton, des anthéridies de tout âge, des chatons mâles à différents degrés de développement, mais aussi il arrive même que les anthéridies placées vers la base du chaton sont souvent déjà parfaitement mûres ou même complétement vides, quand celles du sommet n'en sont encore qu'à leur première cellule (fig. 8 et 9); en un mot, on trouve sur les Sphaignes, dans la même année, non-seulement des inflorescences complétement défleuries et d'autres en voie de floraison, mais aussi, dans un seul et même système floral, des anthéridies à tous les degrés de développement. J'ai quelquefois compté plus de cent chatons mâles sur une pousse annuelle qui n'avait que quatre à cinq fleurs femelles, de sorte qu'en admettant seulement trente

anthéridies par chaton, on arrive à trois mille anthéridies pour douze à quinze archégones. Avec cette surabondance d'organes fécondateurs, il n'est pas étonnant de trouver toujours parfaitement fructifiées les espèces qui possèdent cette richesse de fleurs, tandis que d'autres à fleurs dioïques et dont les mâles sont très-rares, comme le *Sph. molluscum*, sont souvent frappées de stérilité.

Le meilleur temps, cependant, pour trouver les fleurs mâles dans leur état parfait, c'est l'automne et l'hiver, depuis le mois d'octobre jusqu'au mois d'avril. C'est à cette époque que se font le rajeunissement et l'innovation de la plante. Les premiers fascicules de ramules sont ordinairement stériles, et l'on rencontre les ramules florifères plutôt à la moitié supérieure de l'innovation qu'à la partie inférieure. Ce sont toujours les ramules destinés à s'étaler horizontalement, par conséquent les plus forts, qui se transforment en chatons florifères, et ce n'est que dans des cas très-rares et exceptionnels, comme par exemple dans le *Sph. compactum*, qu'on rencontre les organes mâles sur des rameaux pendants. A l'époque où les anthéridies se développent, les fleurs femelles sont encore à l'état rudimentaire et cachées sous les feuilles du bourgeon terminal qui occupe le centre du capitule formé par les jeunes branches encore dressées; ce capitule est un des traits caractéristiques des *Sphagnum*.

Feuilles involucrales ou périgoniales.

Ces feuilles ont la forme et le tissu cellulaire des feuilles raméales, sauf qu'elles sont plus rapprochées, plus exactement imbriquées et ordinairement d'une teinte différente. Dans plusieurs espèces, surtout dans celles où le rouge colore la couche ligneuse du tronc et des rameaux, elles offrent toujours cette couleur d'une manière plus ou moins intense, et on voit souvent des chatons teints du plus beau pourpre, par exemple, dans le *Sph. acutifolium;* dans d'autres espèces elles sont d'un violet pâle, dans d'autres encore d'un jaune clair ou brunâtre; dans le *Sph. cuspida-*

tum elles sont quelquefois couleur orange vif. Cette différence de couleur fait qu'on distingue souvent au premier abord, même sans tenir compte de la forme, les ramules florifères des ramules stériles.

Comme les anthéridies sont latérales à leurs feuilles involucrales, ce sont toujours les feuilles du cycle précédent qui leur servent d'involucrales ou de tégumentaires, tandis que les anthéridies elles-mêmes sont couchées contre le dos des feuilles du cycle subséquent. Ce n'est qu'en suivant exactement leur filet jusqu'à son point d'attache, qu'on arrive à découvrir leur véritable place et la feuille à laquelle chaque anthéridie appartient. Chaque feuille involucrale n'accompagne qu'une seule anthéridie; mais comme les feuilles, et par conséquent aussi les anthéridies, sont très-rapprochées les unes des autres et que le pédicule de ces dernières se rompt très-facilement, ce n'est qu'avec la plus grande peine qu'on arrive à déterminer exactement la place qu'occupent les organes mâles par rapport aux feuilles involucrales.

Anthéridies.

D'après ce que nous venons de voir, les anthéridies sont insérées latéralement aux feuilles involucrales, et cela de manière à ce que chacune de ces dernières n'en porte qu'une. Elles sont placées, par rapport à la spire génératrice des feuilles involucrales, comme le sont les rameaux par rapport à la spire génératrice des feuilles de la tige, à l'exception, cependant, que chaque feuille de cette spire a son anthéridie, tandis que, sur la tige, la quatrième feuille seule a son rameau. Quand la spire génératrice tourne vers la gauche, l'anthéridie est toujours placée au côté droit de l'insertion foliaire; le contraire arrive quand elle se meut vers la droite. Les deux anthéridies les plus rapprochées dans le sens horizontal, et qui paraissent souvent appartenir à une seule et même feuille involucrale, appartiennent, en effet, aux feuilles une et trois; la sixième anthéridie vient toujours se placer au-dessus de la première,

si toutefois la torsion des orthostiques ne les déplace pas et ne les oblige à prendre les dispositions de $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, ou des dispositions intermédiaires.

Quant à leur forme, ces organes ont la plus grande ressemblance avec les anthéridies des Hépatiques. Ce sont des poches globuleuses ou légèrement ovalaires, portées par un pédicelle ou filet délié et tendre, ayant au moins la longueur de leur grand diamètre. Ce filet est formé de quatre séries de cellules cylindriques à parois très-minces et contenant des granulations vertes (fig. 12, 18, et fig. *x* pour la coupe transversale). La poche elle-même n'offre qu'une seule couche de cellules parenchymateuses bombées à leur surface extérieure et constituant des polyèdres assez irréguliers; ces cellules, à parois parfaitement hyalines, renferment des grains chlorophylleux de forme et de grandeur indéterminées (fig. 28, 29). Cette membrane, assez épaisse et transparente, vue de face, dessine autour de la masse verte qui forme le contenu de la poche un anneau transparent, en apparence articulé (voy. fig. 13-16); ce qui a fait dire à quelques phytotomistes que les anthéridies des Sphaignes sont entourées d'un anneau à l'instar des sporanges des fougères, et que ce n'est qu'à la suite de la rupture de cet anneau que l'émission du contenu de l'anthéridie peut s'opérer. Hedwig (*Fundam.* I, p. 62) dit : « *Sph. palustris*..... antheræ ovales sunt « et filo succulento circumducto a reliquis omnibus sese distin- « guunt. » Une coupe transversale d'anthéridie fait facilement disparaître cette illusion d'optique (fig. 19). Cette coupe montre aussi qu'il n'existe pas, comme l'avait supposé Schleiden, une seconde membrane dans l'intérieur de cette poche, membrane qui, suivant ce savant, ne serait que la cellule centrale dilatée et contenant les anthérozoïdes. Il est plus que probable que Schleiden a pris pour une membrane cellulaire intérieure la substance extracellulaire qui enveloppe, sous forme de pellicule hyaline, l'utricule de l'anthéridie. Unger a déjà observé cette pellicule, et voici en quels termes cet excellent observateur s'exprime à son sujet : « Un fait digne de remarque, c'est que, outre cette couche cellulaire

des anthères que nous avons décrite, on trouve encore une autre membrane très-mince, entièrement homogène, et qu'on ne voit qu'à l'aide d'un grossissement beaucoup plus considérable, mais bien clairement, quand on essaye de colorer une portion de l'anthère par la teinture d'iode. Ce procédé fournit le moyen d'établir d'une manière incontestable l'existence de cette membrane. Il est plus difficile de décider si elle existe dans l'intérieur de la couche cellulaire, ou bien si elle l'enveloppe au dehors; car il n'est guère possible d'en obtenir par l'observation directe une preuve certaine. » Cette preuve n'est cependant pas tellement difficile à trouver, et je l'ai déjà fournie dans mes *Recherches anatom. et physiol. sur les Mousses*, en 1848, p. 53, pl. VI, fig. 9 et 11. Au moment où l'utricule se rompt pour émettre son contenu, on voit des cellules se détacher de l'orifice nouvellement formé en laissant intacte la pellicule en question; alors cette pellicule constitue à elle seule le bord de cet orifice et il est aisé de voir partir de son extérieur et les anthérozoïdes et les cellules détachées; cela se voit surtout bien dans les grandes anthéridies des Polytrics, où l'orifice ne se déchire pas en lanières et où la substance extra-cellulaire est assez épaisse vers le sommet de l'utricule. Avec un grossissement assez fort, on découvre aussi très-facilement cette membrane dans les anthéridies des Sphaignes, et il est même facile d'en isoler des portions assez grandes en comprimant et remuant un lambeau de la poche entre deux plaques de verre pour en détacher les cellules qui ont, du reste, peu de cohérence entre elles (voy. fig. 28). La déhiscence de l'anthéridie se fait par la rupture du sommet, et l'émission de son contenu s'opère comme dans les hépatiques et les mousses. Les cellules du sommet commencent d'abord par se gonfler et finissent par se désagréger suivant trois à cinq directions différentes; à mesure que l'émission des anthérozoïdes avance, la déhiscence devient toujours plus considérable, et comme les cellules des lanières qui se forment à la suite de cette déhiscence se dilatent à leurs côtés intérieurs, il en résulte que les lanières se renversent et finissent même par se rouler en arrière

(fig. 15-18, 26 et 27, lanières vues de côté); après l'évacuation et à la suite de la dessiccation de la partie intérieure des cellules qui amène une contraction de cette partie, les lanières font un mouvement inverse et on les trouve involutées peu de temps après l'émission des anthérozoïdes. Comme la membrane des anthéridies est très-tendre, elle ne résiste pas longtemps à la destruction, et on ne trouve pas aussi souvent des anthéridies vides dans les Sphaignes que dans les Mousses, où elles persistent quelquefois pendant des années. La fugacité des organes mâles est aussi un caractère qui distingue la classe des *Sphagna* de celle des *Musci*. Je n'entrerai pas dans de longs détails sur le mode d'émission, la forme et le mouvement des anthérozoïdes; Meyen, Thuret, etc., en ont donné des descriptions exactes. J'insisterai cependant sur une observation faite par M. Thuret (*Recherches sur les anthéridies*. p. 73 et 74) et que j'ai pu constater, c'est que les cellules qui renferment les anthérozoïdes sont lenticulaires, plus aplaties d'un côté que de l'autre (fig. 21, 22), comme dans les hépatiques, tandis que dans les Mousses elles sont parfaitement symétriques. Les cellules dans lesquelles les utricules lenticulaires prennent naissance sont polyédriques et assez irrégulières; leur cellule mère primaire est une cellule centrale qui pourrait, en quelque sorte, être comparée à la cellule germinative des archégones, mais dont la division commence déjà avec le premier âge de l'anthéridie. Chacune de ces cellules renferme un anthérozoïde et quelques granulations grisâtres qui nagent avec ce dernier dans un liquide mucilagineux; ces granulations ont un mouvement moléculaire très-rapide.

Anthérozoïdes.

Les anthérozoïdes sont longs, filiformes, épaissis à leur partie postérieure en une massue légèrement granuleuse, très-amincis et garnis, à leur partie antérieure[1], de deux longs filaments d'une

[1] Je me sers des mots *antérieur* et *postérieur* pour indiquer la place qu'occupent les deux extrémités du corps pendant la progression.

ténuité extrême (fig. 24). Ils sont enroulés en une spire plate de trois tours dans l'intérieur de leurs cellules mères, dont ils déterminent ainsi la forme lenticulaire (fig. 21, 22). Sortis de ces cellules, ils s'allongent en tire-bouchons tout en conservant le même nombre de tours (fig. 23, 24). Leur surface, qui ne présente aucune trace des cils vibratiles, paraît être enduite d'une substance visqueuse hyaline. Leur couleur est d'un vert pâle bleuâtre, qui passe au jaune brunâtre par l'effet de l'iode. L'excessive petitesse de ces corpuscules rend la détermination de leurs dimensions très-difficile. Voici les mesures micrométriques approximatives que j'ai prises avec le millimètre divisé en 100 parties d'Oberhauser :

Cellule contenant son anthérozoïde, grand diamètre, $0^{mm},007,1$; petit diamètre, $0^{mm},003,1$;

Longueur du corps, $0^{mm},030,7$; épaisseur vers le milieu, $0^{mm},002$;

Longueur des filaments, $0^{mm},021,5$; leur épaisseur est à peine déterminable et ne dépasse pas $0^{mm},0050$.

Tant que l'anthérozoïde se trouve renfermé dans sa cellule, il exécute des mouvements assez rapides autour de son axe; mais comme la spire a de la tendance à devenir excentrique, il ne tarde pas à rompre les parois de sa prison, et, une fois libre, il ajoute au mouvement de rotation celui de progression. Le premier paraît être produit par les deux filaments qui, par leurs oscillations rapides, font fonctions de cils vibratiles; la spire elle-même ne fait aucun mouvement ni de contraction ni de dilatation, et ne paraît progresser que par les lois mécaniques de la vis d'Archimède, ses cils vibratiles la faisant tourner autour de son axe, et sa forme d'hélice avancer dans le liquide. Sa progression est, en effet, d'autant plus rapide que ses rotations sont plus nombreuses.

Pendant la vie, le corps de l'anthérozoïde est roide et élastique; après la mort, il se ramollit et devient flasque, la spire s'affaisse sur elle-même et se déroule (fig. 25), le renflement claviforme disparaît, tout mouvement cesse. Celui-ci ne saurait

donc être considéré comme un simple mouvement moléculaire, mais bien comme un mouvement vital qui finit avec la mort de l'individu. Cette mort est amenée par tout réactif destructeur de la vie, par l'iode, par l'alcool, par les narcotiques, par les corrosifs, etc.; les anthérozoïdes desséchés, remis dans l'eau, ne reprennent plus leur ancienne forme spirale, et les filaments vibratiles restent inertes. Je ne veux pas dire par là que j'attribue à ces êtres une vie animale, ou que je les considère même comme des animalcules; j'ai renoncé expressément à la dénomination de *spermatozoïde*, dont je m'étais servi autrefois, pour éviter toute équivoque. La vie végétale peut aussi avoir ses mouvements!

Je renvoie, pour de plus amples détails sur la genèse des anthéridies et des anthérozoïdes, aux belles recherches de MM. Thuret (*Recherches sur les zoospores*), W. Hoffmeister (*Vergleichende Untersuchungen*), et H. Schacht (*Die Pflanzenzelle*); je ferai seulement remarquer encore que ces corps ne se développent pas tous simultanément dans la même anthéridie; mais on les trouve dans des états de développement très-divers tant que cette dernière n'a pas atteint sa forme et sa grandeur normales (voy. fig. 20, et, pour l'évolution successive des anthéridies, fig. 8-11).

Paraphyses.

Les nombreuses paraphyses qui accompagnent les anthéridies (fig. 13) ressemblent exactement aux filaments ramifiés et extrêmement fins qui enveloppent les jeunes bourgeons, et dont il a été question dans un autre chapitre. Ces filaments succulents servent évidemment à entretenir l'humidité autour de ces organes délicats, et à préparer les éléments nécessaires à leur développement; ils disparaissent immédiatement après la déhiscence de l'anthéridie.

§ III.

FLEURS FEMELLES.

(Planche IX.)

La fleur femelle est un bourgeon allongé composé d'un assez grand nombre de feuilles de formes très-diverses; elle naît toujours d'une des divisions d'un rameau latéral, et doit, par conséquent, être considérée comme axillaire (fig. 1, bourgeon à gauche; fig. 2, fleur avec des archégones prêts à être fécondés). L'involucre extérieur des organes femelles ne constitue pas ce qu'on appelle le *périchèse* du fruit; celui-ci n'existe encore qu'à l'état rudimentaire. Pour s'en convaincre, il suffit d'éloigner ces feuilles et de mettre les archégones à nu, et on ne tarde pas à découvrir, au pied de ces derniers, un verticille de feuilles très-petites en voie de formation (fig. 9, 10). Ces feuilles se trouvent dans le rapport le plus direct avec le fruit, car, quand celui-ci ne se développe pas, elles persistent dans leur état rudimentaire, et meurent avec les archégones avortés. C'est donc une erreur de prétendre que les Sphaignes n'ont pas de périchèse.

Les feuilles de l'involucre extérieur sont toujours plus grandes et surtout plus longues que les feuilles raméales, très-creuses, et, en partie, engainantes; leur tissu ressemble à celui des feuilles raméales moyennes; ce qui les distingue encore des feuilles périchétiales, qui, en outre de la différence de leur forme, ont aussi un tissu plus lâche et presque semblable à celui de la tige.

Archégones.

Les archégones, au nombre de 1 à 4, rarement 5, occupent le sommet arrondi du ramule fertile (fig. 9, 10). Un seul se transforme en fruit.

La cellule qui doit donner naissance à un archégone se distingue de celle qui doit produire une feuille par ses dimensions

plus considérables et par des cytoblastes plus grands. Son premier sectionnement s'opère par des cloisons obliques (fig. 3-7). La multiplication des cellules se fait avec une grande rapidité, et bientôt on voit, à la place d'une simple cellule génératrice, un corps cylindrique composé de 6 séries de cellules, qui forment des mailles pentagonales à sa surface (fig. 8). Ce corps ne tarde pas à se gonfler vers sa partie inférieure, et à prendre la forme que nous connaissons aux archégones des hépatiques et des mousses (fig. 11, archégone à peine formé très-fortement grossi). La partie basilaire, formant le pied, est courte; le style est de longueur moyenne, souvent tordu, légèrement renflé en massue vers sa partie supérieure. Tout l'archégone est d'un vert intense; son tissu est tendre, et les cellules renferment, dans un liquide mucilagineux, de nombreux grains chlorophylleux; dans ce premier âge, on distingue encore, dans presque toutes les cellules, les cytoblastes avec leur nucléole.

Je n'entrerai pas dans de plus longs détails sur la structure de cet organe, car elle ne diffère en rien de celle des archégones des hépatiques et des mousses, dont M. W. Hofmeister a donné des analyses si exactes.

La cellule germinative, qui, avant la fécondation, est assez grande, simple, et occupe la partie supérieure de la partie centrale de l'archégone, contient ordinairement deux grands cytoblastes placés vers les deux pôles, et qui se voient même à travers le tissu de l'archégone, à cause des nombreuses granulations vertes qui sont amassées sur son pourtour, et qui vont en rayonnant en tout sens (fig. 12, 13). Déjà, avant la fécondation, cette cellule se gonfle considérablement et prend la forme d'une poire renversée (fig. 15). Son contenu est aqueux et presque hyalin. Dans les archégones à pistil ouvert, on la trouve toujours segmentée, même dans ceux qui ne parviennent pas à former un fruit (fig. 16-19). Dans ce dernier cas, cependant, le germe est flasque, et les cellules dont il se compose sont presque vides (fig. 17).

La déhiscence du pistil se fait de la même manière que la déhiscence des anthéridies. Les cellules du sommet se gonflent, se disjoignent dans leurs commissures; quelques-unes se détachent complétement et tombent; les autres forment un bord lacéré qui s'élargit, se courbe en arrière et constitue un entonnoir dont le tube se continue jusqu'à la cellule germinative (fig. 14). La face intérieure de l'entonnoir et du tube se colore en rouge ou en jaune foncé. Je n'ai jamais pu arriver à savoir si ce tube préexiste déjà dans le jeune archégone, ou s'il se forme seulement après coup et à la suite de l'absorption du cordon cellulaire, qui en aurait occupé la place dans le jeune âge. M. Hofmeister admet le dernier cas, et, je crois, avec raison. Pour ce savant, la cellule germinative ne serait que la cellule basilaire de ce tissu.

De même que les anthéridies, les archégones se trouvent accompagnés de nombreux filaments très-ramifiés et très-tendres, entrelacés de manière à produire un tissu lâche en forme de toile d'araignée, et qui enveloppe surtout la partie inférieure de ces organes de génération (fig. 10; pl. X, fig. 1).

Il me reste encore quelques mots à dire sur une production singulière qui remplit le tube des archégones et le déborde même à son orifice. Cette production est hyaline et a tous les caractères d'une matière coagulée; elle est même assez semblable à la substance intercellulaire. Je n'ai pas pu savoir si elle était le résultat de la coagulation du liquide mucilagineux qu'on voit découler de l'orifice de l'archégone au moment où celui-ci s'ouvre, ou si elle se forme seulement après coup. Serait-elle un reste des cellules liquéfiées dans l'intérieur de l'archégone, et que l'embryon ne s'est pas entièrement assimilées?

Très-souvent j'ai vu partir de cette substance de nombreux fils ramifiés, extrêmement fins et articulés, d'un vert pâle légèrement bleuâtre; entre ces fils, j'ai toujours rencontré des corps globuleux très-petits, semblables quelquefois aux vésicules spermatiques (pl. IX, fig. 20; pl. XI, fig. 24). Il m'a aussi été impossible

d'arriver à un résultat certain sur la nature de ces filaments et de ces globules, et je crois même devoir m'abstenir de toute conjecture à leur égard. Je ferai seulement remarquer encore que ces filaments ont la plus grande ressemblance avec les filaments qui entourent les organes de génération, et même avec les proembryons qui ont longtemps végété dans l'eau [1].

§ IV.

ÉVOLUTION DU FRUIT.

(Planches X et XI.)

Premiers phénomènes.

Du moment où la vésicule germinative s'est constituée en embryon, la multiplication des cellules se fait avec une grande rapidité, et c'est surtout à la partie inférieure du jeune fruit qu'elle se remarque tout d'abord d'une manière particulière (pl. IX, fig. 18, 19). La cellule terminale de l'extrémité inférieure s'ouvre un passage à travers le tissu cellulaire du pied de l'archégone, perfore le sommet de la tige formée d'un tissu encore très-tendre, et s'avance dans cette dernière tant qu'un tissu plus solide ne lui oppose pas de résistance, c'est-à-dire jusqu'à l'endroit où commencent les feuilles à sa périphérie. Chemin faisant, cette cellule se multiplie sans cesse, et, une fois établie dans l'intérieur du réceptacle (je nomme ainsi la partie de la tige qui doit former la vaginule, et qui porte à sa surface les archégones), la multipli-

[1] M. Hofmeister a vu quelque chose d'analogue sur les archégones de quelques Jongermanniées. Il dit : « Auf der Oeffnung aller vor Kurzem aufgebrochenen Archegonien von Jungermannieen finden sich oft in grosser Anzahl kleine kugelige Tropfen glasartig durchsichtiger schleimiger Substanz. Sie scheinen eine Umbildung der ausgetretenen Inhaltsflüssigkeit des Canals zu sein. Zwischen diesen sah ich, auf dem Scheitel solcher Archegonien von *J. bicuspidata* und von *J. divaricata* sowohl, als von *J. bicrenata* u. *Alicularia scalaris*, welche durch das beginnende Anschwellen ihres Bauchtheils die erste Andeutung des Anfangs der Fruchtbildung geben, zarte, mehr oder weniger geschlängelte, farblose Fäden, in Aussehen u. Grösse Samenfäden der betreffenden Arten völlig ähnlich, aber bewegungslos. » (Voy. Hofmeister, *Vergleichende Untersuchungen*, p. 38, tab. VIII, 49, 59, 61.)

cation des cellules marche tellement vite, qu'au bout de quelques jours déjà elle a produit un corps hémisphérique presque bulbiforme, qui a dilaté l'extrémité conique de la tige, de manière à lui donner l'aspect d'un mamelon aussi épais que la tige elle-même, et qui porte sur ses flancs les archégones avortés, si toutefois il y avait plusieurs de ces organes dans la même fleur; car ce n'est que dans des cas tout à fait exceptionnels que deux archégones à la fois se développent en fruits (pl. X, fig. 1). Le sommet ainsi dilaté de la tige tient dès lors lieu de vaginule.

Quand cette partie inférieure du fruit est presque terminée, on voit apparaître, sur ce mamelon et dans le pied même de l'archégone, un bourrelet, comme premier commencement de la future capsule. Mais on est étonné de le voir s'agrandir sans que la partie ventrale de l'archégone subisse le moindre changement (même figure), et c'est cependant cette partie qui, dans les autres mousses, se transforme en fruit. L'étonnement devient encore plus grand quand, en l'ouvrant, on la trouve abandonnée par l'embryon et complétement vide, ce dernier s'étant logé dans le pied de l'archégone, dont le tissu extérieur s'est dilaté en enveloppe embryonnaire (fig. 2). L'embryon a-t-il effectivement quitté, par un mouvement descendant, la place où il avait pris naissance, ou sa partie supérieure, en tant qu'elle était logée dans le ventricule de l'archégone? S'est-elle dissoute pour être absorbée par la partie inférieure, à laquelle nous avons vu prendre un développement si rapide et si considérable? C'est ce que j'ignore. Mais c'est un fait qu'on trouve toujours l'archégone avec sa partie ventrale parfaitement intacte au sommet du fruit mûr (pl. XI, fig. 22, 23).

Nulle part ailleurs on ne voit mieux que dans les Sphaignes que l'embryon se greffe sur la tige, dont le sommet se constitue en réceptacle, qu'il se crée dans le corps parenchymateux bulbiforme dont nous venons de parler une source de substances alimentaires, destinées à subvenir aux frais de son développement ultérieur et à l'entretien de la vitalité du fruit une fois formé. L'examen de

ce corps à ses différents états d'âge conduit naturellement à cette supposition.

Le bulbe, dans son jeune âge, se compose en grande partie de cellules mésenchymateuses (fig. 3, 4), formées aux dépens du tissu intérieur de l'archégone et de la partie axile du réceptacle. Quand le jeune fruit a commencé à s'élever au-dessus de la vaginule (fig. 1, 2), les cellules mésenchymateuses se montrent surtout à la base du bulbe où elles constituent des papilles remplies d'un suc mucilagineux à nombreux grains de chlorophylle; c'est par ces papilles que s'opère l'absorption de l'humidité qui arrive à travers le tissu de la tige. Quand on examine le contenu de la vaginule à l'époque où le fruit est parvenu à sa parfaite maturité, on le trouve flasque et décoloré; les cellules sont vides, et l'iode n'y fait plus reconnaître que de faibles traces des matières amylacées, qu'on y avait rencontrées tant que le tissu lui-même était encore à l'état pulpeux.

Origine et formation de la capsule et du sporange.

Dès que le jeune fruit s'est élevé au-dessus du réceptacle, on ne tarde pas à voir s'établir une différenciation dans ses couches cellulaires. L'extérieure, qui doit former la membrane capsulaire, est encore simple et composée de cellules presque cubiques, convexes en dehors; la couche suivante est également simple, ses cellules sont plus aplaties sur les côtés et plus chlorophylleuses : c'est la couche qui est destinée à former le sporange; les cellules centrales, de forme polyédrique, qui représentent le commencement de la columelle, sont plus lâches et plus transparentes que les autres (pl. X, fig. 3). Dans le cours de l'évolution, la couche périthéciale devient d'abord double, et ensuite quadruple, à la suite de la segmentation deux fois répétée en sens vertical de ses cellules, divisées en même temps dans le sens horizontal (pl. X, fig. 8; pl. XI, fig. 13). Les cellules de la couche extérieure se divisent une fois de plus dans ce dernier sens que les

autres; leurs parois s'épaississent considérablement, surtout celles qui sont tournées en dehors, et finissent par prendre une teinte jaune ou brune plus ou moins foncée. Beaucoup d'entre elles se transforment en stomates.

La couche sporangiale qui, sous forme d'un hémisphère creux, repose sur le tissu central ou columellaire, se divise en trois parties concentriques, dont l'extérieure et l'intérieure forment les membranes du sporange, tandis que la moyenne, plus épaisse et très-chlorophylleuse, devient la couche génératrice des sporules (pl. X, fig. 2; pl. XI, fig. 2).

Formation des sporules.

Le mode de formation des sporules a été l'objet de tant de recherches de la part des phytotomistes les plus distingués et est maintenant si bien connu, que je crois inutile d'entrer dans de grands détails à ce sujet. Je dirai seulement que, dans les Sphaignes, chaque cellule primaire de la couche sporogène se divise en quatre cellules secondaires, qui deviennent les cellules génératrices des cellules mères des sporules. Cela fait qu'avant que ces dernières se montrent, la couche cellulaire sporogène, d'abord simple dans le jeune fruit (pl. X, fig. 2, 8), s'est quadruplée (pl. X, fig. 9; pl. XI, fig. 3).

Les cellules mères des sporules qui se forment dans ces cellules de la troisième génération, et qui, par conséquent, appartiennent à la quatrième génération, n'offrent pas un nombre rigoureusement déterminé. Souvent, il y en a deux dans une cellule, souvent quatre, quelquefois trois ou même une seule. Cela fait que les cellules génératrices des cellules mères des sporules ne se trouvent pas toujours complétement occupées par leur progéniture, et laissent un libre jeu aux cellules nouvellement formées: aussi, ces dernières, n'étant pas en contact immédiat les unes avec les autres, ne se soudent pas entre elles, mais nagent librement dans le liquide qui les entoure (pl. X, fig. 10; pl. XI,

fig. 5, 6). Cette irrégularité dans leur formation première amène aussi une grande irrégularité dans leur grandeur et dans leur forme. Tant qu'elles sont enfermées dans leurs cellules mères, elles sont anguleuses; du moment où, à la suite de la dissolution de ces dernières, elles s'isolent complétement, elles prennent des formes plus arrondies, sphériques, ovoïdes, et souvent pointues à l'un des pôles ellipsoïdes, etc. (pl. XI, fig. 7-12). La membrane de ces nouvelles cellules est très-mince, complétement hyaline, et les matières solides, chlorophylleuses, etc., se réunissent vers le centre, autour d'un ou de deux grands noyaux (voy. mêmes figures). Bientôt cette masse granuleuse se divise en deux et ensuite en quatre masses égales, qui s'arrondissent et s'entourent d'une pellicule très-mince, pour prendre plus tard la forme de tétraèdres réguliers à base convexe. Cette forme tétraédrique régulière provient de ce que les quatre petits globes, par une pression réciproque, s'aplatissent à leurs points de contact, de manière à produire des surfaces triangulaires dont les sommets se rencontrent dans le centre géométrique de la cellule mère, supposée sphérique. Ces nouvelles sporules se désagrégent très-facilement, et même longtemps avant leur parfaite maturité, quand on ouvre une jeune capsule et que la pression qui les avait retenues en place cesse; comme leur enveloppe ne se trouve pas encore assez solidifiée pour conserver la forme qu'elle avait avant cette séparation, celles-ci prennent un contour ovalaire (pl. XI, fig. 13, 14). Mais, du moment où le périspore a pris sa consistance normale et sa couleur jaunâtre, la sporule conserve sa forme de pyramide triangulaire déprimée, à base convexe (pl. XI, fig. 15, 18). Dès le premier commencement de la formation des sporules, on voit apparaître dans leur intérieur des gouttelettes d'huile qui nagent dans un liquide mucilagineux (pl. XI, fig. 14); ces gouttelettes se réunissent en un plus petit nombre de gouttelettes plus grandes, et quelquefois en une seule, quand les sporules sont mûres (fig. 16-18). Le périspore est d'une épaisseur moyenne, lisse à sa surface; les granulations ne s'y forment que

quand la sporule a longtemps séjourné dans l'eau. Leur diamètre moyen est de 7/50^{mm} à 9/50^{mm}.

En outre de ces grandes sporules tétraédriques, destinées à la reproduction de la plante, on trouve, dans les mêmes capsules ou dans des capsules différentes, des sporules infiniment plus petites, n'ayant que 1/150^{mm} de diamètre, et formant des polyèdres réguliers (pl. XI, fig. 19, 20). Ces sporules, qui ne sont autre chose que le résultat d'une division réitérée du contenu de la cellule mère, ont le même contenu, le même périspore et la même couleur que les spores véritables, mais elles n'arrivent jamais à la germination. Leur raison d'être n'est pas connue, mais elles constituent un des caractères distinctifs des Sphaignes.

§ V.

FRUIT MÛR.

(Planches XI et XII.)

Périchèse.

Au moment où le fruit a acquis son parfait développement, il est caché dans un périchèse composé de 15 à 25 feuilles, augmentant considérablement de grandeur de bas en haut (pl. XII, fig. 2, 4, 5). Les premiers cycles de ces feuilles sont les involucrales de la fleur; les suivants se sont formés dans le cours du développement du fruit et se distinguent par une dilatation considérable du limbe et par un tissu plus lâche, ordinairement dépourvu de fibres spirales, de sorte que ces feuilles ressemblent plus, en général, aux feuilles de la tige qu'à celles des rameaux. A la suite du prolongement du ramule périchétial, prolongement qui se fait souvent après la maturité du fruit, elles sont quelquefois très-espacées (pl. XII, fig. 6, 7, 8), et étalées au lieu d'être imbriquées. Ce changement dans la disposition des feuilles périchétiales s'opère indistinctement dans presque toutes les espèces quand les plantes se trouvent placées dans des conditions favorables, et ne saurait donc être pris pour un caractère distinctif de l'espèce.

Vaginule.

Nous avons vu déjà plus haut que les Sphaignes ne sont pas des *Musci evaginulati*, comme on l'a cru jusque dans ces derniers temps; mais qu'ils possèdent cet organe tout aussi bien que les Mousses véritables, seulement sous une forme différente. La vaginule des *Sphagnum*, en effet, au lieu d'être cylindrique ou conique, comme dans la plupart des Mousses, est hémisphérique ou presque discoïde (pl. XII, fig. 2, 5, 8). Elle est formée par un tissu lâche, composé de deux couches cellulaires; son bord se continue directement dans la membrane péricarpique, dont une partie y reste attachée sous forme de couronne irrégulièrement lobée (pl. XI, fig. 25).

Coiffe.

Cet organe ne prend pas une forme déterminée comme dans les Mousses. La membrane péricarpique persiste intacte sur le jeune fruit jusque vers sa maturité (pl. XI, fig. 21), ensuite elle se rompt irrégulièrement; une partie reste attachée à la vaginule (fig. 25, 26), une autre partie adhère au sommet de la capsule (pl. XII, fig. 5 et fig. 24); d'autres parties enfin se détachent complétement, et finissent par tomber. La membrane elle-même est entièrement mince, formée d'une seule couche de cellules, et sans aucune couleur (fig. 24, 26).

Capsule.

La capsule repose immédiatement sur la vaginule, et son pied, qui se trouve complétement caché dans cette dernière, après avoir été presque bulbiforme dans le jeune âge, où il faisait les fonctions d'un organe nourricier, affecte maintenant une forme plus ou moins discoïde (pl. XI, fig. 23). Ce n'est qu'à la suite du prolongement du rameau périchétial et de la partie qui se trouve entre la vaginule et la derniere feuille périchétiale que la capsule s'élève au-dessus de son involucre et prend souvent l'aspect d'une capsule

longuement pédicellée. On a donné à ce faux pédicelle, qui n'est pas une partie intégrante de la capsule, comme dans les Mousses, le nom de *pseudopodium*. Sa consistance, son tissu et sa couleur le font, du reste, déjà reconnaître comme une continuation directe du ramule périchétial.

La forme de la capsule est sphérique ou légèrement ovoïde; elle ne devient oblongue ou cylindrique que par suite de la dessiccation de la membrane capsulaire.

Cette dernière est formée par des cellules petites, à parois assez épaisses, qui produisent un réseau oblong-hexagonal, avec un petit nœud à chaque angle des mailles (fig. 27). Elle est percée de nombreux stomates, composés de deux cellules ovales, séparées au milieu par une fente étroite (fig. 27, 29). Ces cellules débordent souvent les cellules environnantes sous forme de deux lames semilunaires hyalines, réunies du côté concave (fig. 28).

La déhiscence se fait au moyen d'un opercule formé par la section horizontale de la partie supérieure de la capsule. L'opercule lui-même est toujours parfaitement convexe et symétrique, et se distingue à peine, tant qu'il est en place, du reste de la capsule, si ce n'est par une convexité un peu plus prononcée (pl. XII, fig. 2, 5, 7). Il se détache rarement tant que la capsule conserve sa forme sphérique par l'effet de l'humidité; mais dès que, en se desséchant, elle s'allonge et se contracte, l'opercule se désarticule avec un petit pétillement (*crepitu desiliens*, Brid.), et les sporules sont en même temps lancées au dehors, par suite de la compression de l'air. L'opercule reste souvent attaché par un côté, et se referme dans l'humidité (pl. XII, fig. 8).

Sporange.

Au moment de la parfaite maturité du fruit, la columelle, qui, dans la jeune capsule, est hémisphérique et soutient le sporange, qui la recouvre comme une calotte, se contracte au fond de la capsule, en laissant le sporange attaché aux parois internes de la partie supérieure de cette dernière (pl. XI, fig. 23). Il se forme,

de cette manière, un grand espace vide dans l'intérieur de la capsule, qui se remplit d'air par les ouvertures des stomates, et c'est grâce à cet air, comprimé par la contraction de la membrane capsulaire, que se fait la petite explosion dont nous venons de parler, et qui entraîne au loin les sporules destinées à germer loin du lieu de leur naissance.

L'orifice capsulaire est parfaitement lisse, sans trace d'anneau ni de péristome.

La description des sporules ayant été donnée plus haut, il est inutile d'y revenir ici. Je ferai seulement remarquer que leur couleur varie peu, suivant les différentes espèces. Elles se montrent toujours sous forme d'une poussière jaune de soufre ou jaune orange plus ou moins intense.

L'époque où les fruits arrivent à leur maturité sont les mois de mai, juin et juillet. Les capsules, une fois déoperculées, se détachent bientôt de dessus leur vaginule; le tissu par lequel elles étaient attachées est détruit par l'humidité, et on les trouve alors, dans l'intérieur des touffes, percées d'une ouverture ronde aux deux pôles, dont l'une correspond à l'opercule et l'autre au point d'insertion.

SIXIÈME PARTIE.

DISTRIBUTION GÉOGRAPHIQUE DES SPHAIGNES.

Enfants de l'humidité, les Sphaignes sont, de préférence, habitants des pays tempérés et froids; dans les pays chauds, on ne les rencontre que très-sporadiquement, et seulement dans des conditions exceptionnelles. Aussi la vraie patrie de ces curieux végétaux est-elle dans les parties septentrionales de l'hémisphère boréal, où aucun autre genre de plantes ne les égale sous le rapport numérique. D'immenses étendues marécageuses et tourbeuses dans le nord de l'Europe, de l'Asie et de l'Amérique sont couvertes du moelleux tapis, toujours humide, des Sphaignes, dont les diverses

espèces s'y distinguent par leurs nuances particulières de vert, de jaune, de rouge et de brun.

C'est dans ces *Sphagneta,* qui, dans l'Allemagne du nord, en Russie, en Danemark, en Suède et en Laponie, s'étendent souvent à perte de vue, et qui, dans nos montagnes, surtout dans le Jura, occupent les hauts bassins, que viennent *s'établir successivement* les premiers éléments d'une végétation supérieure. Différents genres de Mousses, tels que des *Dicranum,* des *Splachnum,* des *Aulacomnium* et des *Hypnum;* de nombreuses *Cypéracées* et quelques *Graminées,* et enfin, parmi les dicotylédonées, les élégants *Drosera,* les *Pedicularis,* les *Vaccinium* et l'*Oxycoccos;* diverses espèces de petits saules, le *Ledum palustre,* le *Myrica Gale,* l'*Empetrum nigrum,* l'*Andromeda polifolia,* etc., et en dernier lieu le pin sylvestre, le bouleau glutineux et autres arbres, si toutefois la latitude ou l'altitude permettent la végétation forestière, s'établissent sur ce gazon de tourbettes. Sans ces végétaux, auxquels les Sphaignes fournissent les moyens d'existence, et qui finissent par prendre possession de la place occupée en premier lieu par ces derniers, la physionomie de beaucoup de contrées septentrionales serait entièrement déterminée par ces Mousses, qui, les premières, s'emparent des marais mobiles pour les transformer en sol végétal.

Les *Sphagnum cuspidatum* et *subsecundum,* espèces qui vivent submergées, se rencontrent dans les marais profonds, où ils flottent dans l'eau, dont ils rehaussent sans cesse le fond par leurs détritus.

Les *Sph. acutifolium, cymbifolium* et *molluscum,* qui ne supportent l'immersion complète que pendant peu de temps, vivent plus particulièrement dans les endroits où l'eau est peu profonde et ne recouvre que leur partie inférieure; aussi trouve-t-on ces espèces dans les petits marais, sur les flancs des montagnes : les deux premières, souvent près des sources et le long des petits ruisseaux à eau fraîche et limpide; le premier, toujours dans les forêts montagneuses de formation quartzeuse et dans les bruyères marécageuses des hauts plateaux.

Le *Sph. fimbriatum*, longtemps confondu avec le *Sph. acutifolium*, préfère les tourbières dans les bas-fonds aux flancs détrempés des montagnes, et se distingue déjà par cet *habitat*, étranger à l'espèce à laquelle il se rattache de plus près par son facies.

Le *Sph. compactum* et le *Sph. cymbifolium*, var. *condensatum*, forment des touffes bombées à la surface des grandes tourbières, et là où l'eau n'atteint ordinairement que la partie inférieure de leurs tiges, dont l'hygroscopicité suffit pour amener l'humidité jusqu'à leur sommet.

Le *Sph. squarrosum* recherche plus particulièrement le bord des sources et des ruisseaux froids dans les montagnes boisées, et ce n'est que rarement qu'on rencontre cette belle espèce, la plus grande du genre, dans les tourbières.

Le *Sph. rubellum* Wils. est le compagnon fidèle du *Sph. molluscum*, dans les touffes duquel il s'implante par petits groupes, en les bariolant de sa teinte rouge lilas.

Le *Sph. auriculatum* Schmp. n'a encore été observé que dans une seule localité, en Angleterre.

Toutes ces espèces propres à l'Europe aiment avec prédilection les contrées septentrionales et tempérées de ce continent, sans cependant manquer complétement aux contrées méridionales. C'est ainsi qu'on trouve les *Sph. acutifolium* et *cymbifolium* dans toutes les montagnes boisées du midi de la France, de l'Espagne et de l'Italie; le premier a même traversé la Méditerranée pour aller orner quelques-unes des sources froides de l'Atlas. Le *Sph. subsecundum* peuple les flaques d'eau de quelques bruyères humides des montagnes algériennes.

Toutes les espèces communes en Europe sont aussi généralement répandues dans l'Amérique du Nord, où, grâce aux infatigables recherches de MM. W. Sullivant et L. Lesquereux, beaucoup d'autres espèces encore ont été découvertes, surtout dans les parties méridionales. La végétation sphagnine du Canada et du Labrador ne se distingue en rien de celle de la Laponie, du nord de l'Angleterre et de l'Irlande; les tourbières du Groënland et de l'Islande

sont couvertes du *Sph. acutifolium;* d'autres espèces ne s'y rencontrent qu'accidentellement, et toujours modifiées dans leurs formes par les rigueurs du climat.

Les *Sphagnum* des terres antarctiques ne diffèrent que peu de ceux des contrées arctiques, et ce n'est qu'au moyen de distinctions subtiles qu'il est possible de les en séparer.

Il en est autrement des Sphaignes des pays intertropicaux, où ces plantes n'occupent qu'un rang très-subordonné parmi les végétaux cellulaires, et où leurs espèces n'envahissent jamais de grandes étendues, et offrent, par conséquent, des conditions d'existence toutes différentes de celles que nous avons vues aux Sphaignes des contrées arctiques et antarctiques. Leurs caractères spécifiques sont toujours bien tranchés et ne permettent pas qu'on les confonde avec les espèces des pays froids, quoique la physionomie générale reste toujours la même.

L'absence des *Sphagneta* dans les pays chauds, quoique humides, y explique l'absence des tourbières, car les Sphaignes sont la première condition de l'établissement de ces dernières[1]. Toute l'Amérique méridionale, le cap de Bonne-Espérance, les îles de la Réunion, celles de la Malaisie, la Nouvelle-Hollande et la Nouvelle-Zélande ont leurs Sphaignes; mais partout, dans ces contrées, ces végétaux recherchent, comme chez nous, les eaux limpides, sinon froides, et évitent les eaux chaudes ou corrompues par la décomposition putride de substances organiques, et c'est pour cela que les *Sphagneta* y manquent, et par conséquent aussi les tourbières.

[1] Voyez, à ce sujet, l'intéressant ouvrage de M. Léo Lesquereux : *Quelques Recherches sur les marais tourbeux*. Neufchâtel (Suisse), 1844.

SEPTIÈME PARTIE.

DESCRIPTION DES SPHAIGNES D'EUROPE.

SECTION PREMIÈRE.

ESPÈCES À FLEURS MONOÏQUES.

1. Sphagnum acutifolium Ehr.

(Planches XIII et XIV.)

« *Plantæ* semipedales, pedales et longiores, innovatione semel « dichotomæ, cæterum simplicissimæ, graciles, in cæspites molles « laxiores vel densiores haud raro longe lateque extensos congestæ, « nunc læte virides, nunc purpureo variegatæ, nunc omnino pur- « pureæ, inferne pallescentes vel albicantes.

« *Caulis* annuus omnino simplex, plus minus dense fasciculato- « ramulosus; stratum corticale triplex et quadruplex parce porosum; « ramuli ascendendo longiores, 3-5, quorum 2 vel 3 expansi sub- « stricti vel curvuli, cæteri penduli, filiformes vel leniter tumiduli « apice acuti; stratum corticale simplex, cellulis magnis lageniformibus multis.

« *Folia caulina* semiamplexicaulia, ovato-oblonga, ad angulos la- « terales minute auriculata, acumine leniter producta erosa; cel- « lulæ mediæ basis majores latiores, laterales multo angustiores « marginem latum anguste cellulosum efficientes, illæ partis supe- « rioris latiores pro more fibrillosæ plerumque, ut inferiores, « pariete obliquo divisæ, laterales minus numerosæ marginem « angustum constituentes.

« *Folia ramulina* laxius densiusve imbricata, haud raro pulchre « quinquefaria, basilaria ovata, media ex elongato ovata lanceolata; « terminalia lanceolata, anguste lanceolata et lanceolato-subulata, « omnia summo apice truncatulo erosa; cellulæ hyalinæ elongatæ

« fibrillis annularibus vel spiralibus, poris magnis haud nume-
« rosis, cellulæ chlorophyllosæ hyalinis maxima parte obtectæ nunc
« virides nunc rubellæ.

« *Flores* dioici; masculi amentula efformantes pro more purpurea
« foliorum imbricatione pentagona sæpeque spiraliter torta ple-
« rumque numerosa haud raro numerosissima; flores feminei gem-
« mulæ ovato-conicæ, 1-4 archegonia includentes.

« *Fructus* in eadem planta pro more complures; perichætium
« imbricatum, stramineum vel rubellum, folia perichætialia ex-
« terna late ovata acuminata, interna oblongo-elongata subconvo-
« luta, areolatio illa foliorum caulinorum minor, cellulis hyalinis
« 2-3-4partitis, omnibus fibrillis et poris destitutis; capsula
« globosa atro-brunnea perichætio inclusa vel tandem pseudopo-
« dio plus minus elongato inserta; sporæ ferrugineæ, majores et
« minores in eadem capsula vel in capsulis diversis.

« *Fructificatio:* Junio et Julio.'

« *Habitatio :* in locis præprimis montosis uliginosis in ericetis hu-
« midis, et in turfosis planitiei et montium altiorum.

« *Synon. Sph. palustre, molle, deflexum, squamis capillaceis.* Dil-
« len. *Hist. Musc.* p. 243, tab. XXXII, f. 2, A.

« *Sph. palustre* Linn. *Sp. plant.* 1569 (ex parte!)

« *Sph. acutifolium* Ehrh. *Crypt. exsicc.* n° 72. — Schrader, *Spicil.*
« *Flor. germ.* p. 58. — Schwægr. *Suppl.* I, P. 1, p. 15, tab. V. —
« Nees et Hornsch. *Bryol. german.* vol. I, p. 19, tab. III, f. 8. —
« Hartman, *Skand. Fl.* ed. 6, p. 436. — Wilson, *Bryol. Britan.*
« p. 20. — C. Müller, *Synops.* I, 96.

« *Sph. capillifolium, molle et gracile, foliis lanceolatis concavis,*
« *sporangiis oblongo-rotundis.* Hedwig, *Spec. Muscor.* p. 28.

« *Sph. capillifolium*, caule erecto diviso, ramulis fasciculatis sub-
« æqualibus deflexis, foliis oblongis concavis subquinquefariam
« imbricatis, thecæ obovatæ exsertæ pseudopodio longiusculo gra-
« cili. Bridel, *Bryol univ.* I, p. 11.

« *Variet.* β *deflexum*, plantæ breviores, densius cæspitosæ den-
« siusque ramulosæ, ramuli longiores flagelliformes deflexi; folia

« ramulina arcte imbricata longiora partim viridia partim ru-
« bella.

« *Habit.* In spongiosis.

« *Var.* γ *tenellum*, plantæ elongatæ gracillimæ laxe cæspitantes;
« ramuli horizontales subarcuati deflexi pauciores tenuissimi;
« folia minima breviora minus arcte imbricata, viridia et pur-
« purea.

« *Habit.* Locis aquosis calidioribus.

« *Var.* δ *purpureum*, cæspites pulvinantes condensati pro more
« pulchre purpurei, rarius colore viridi variegati; plantæ graciles
« breviores dense ramulosæ, ramulis omnibus deflexis, capitulum
« valde condensatum.

« *Habit.* In turfosis siccioribus.

« *Var.* ε *fuscum*; cæspites extensi profundi condensati e ferru
« gineo fuscescentes; plantæ longissimæ graciles dense ramulosæ,
« ramuli breviores incurvi apice pallidi; folia minus arcte imbri-
« cata.

« *Habit.* In turfosis profundis ubi sæpe magnos tractus obtegit. »

Cette espèce est de toutes les espèces européennes celle qui est le plus généralement répandue et qui, par cela même, montre le plus grand nombre de variétés ou de déviations plus ou moins importantes de la forme que nous considérons comme type. Cette forme est celle qui se rencontre partout aux endroits aqueux des forêts de montagnes, dans les bruyères humides, quelquefois dans les prés marécageux. Les plantes sont rarement entièrement vertes, mais presque toujours colorées en partie d'un rouge pourpré quelquefois très-intense, surtout à la base des rameaux et aux chatons mâles. Elles forment des touffes gonflées, lâches et très-tendres, décolorées à leur partie inférieure. Les capsules restent souvent cachées dans leurs périchèses et se conservent de cette manière beaucoup plus longtemps que les capsules qui quittent leur involucre pour se poser en dehors sur un faux pédicelle (pl. XIII, fig. 1).

Les feuilles desséchées sont creuses, très-rigides, cassantes, presque blanches quand elles étaient vertes, d'un lilas pâle quand

elles étaient couleur de pourpre; leur rigidité les distingue des feuilles de l'espèce suivante, qui s'étalent et se courbent par la dessiccation.

Les quatre variétés dont j'ai essayé de fixer les caractères distinctifs sont celles auxquelles toutes les autres formes peuvent être ramenées facilement ; et, en tenant compte de toutes les formes intermédiaires, on peut se convaincre sans peine que même ces variétés, si distinctes en apparence, passent les unes aux autres de la manière la plus évidente. Il est difficile, sinon impossible, de décider à quelle cause il faut ramener leur apparition, qui est, cependant, si constante, quand même les conditions extérieures ne restent pas exactement les mêmes. Et, chose surprenante, c'est qu'on rencontre souvent les variétés les plus dissemblables à proximité les unes des autres et exactement dans les mêmes conditions de végétation : c'est là justement le cas pour les variétés γ, δ et ε, qui sont propres aux tourbières émergées, où elles forment des gazons étendus, contigus les uns aux autres, mais se distinguant de loin par la diversité de leurs couleurs. Ces trois variétés, essentiellement propres à l'espèce de tourbières que je viens de nommer, forment des gazons beaucoup plus serrés que la forme type, ce qui fait que les plantes sont ordinairement plus grêles, et que les ramules sont plus recourbés. La variété β se rencontre de préférence sur les hautes montagnes, dans les Alpes, au-dessus de la région des arbres et dans les contrées arctiques ; nous l'ayons souvent reçue du Groënland et du Labrador.

2. Sphagnum fimbriatum Wilson.

(Planche XV.)

« *Plantæ* valde elongatæ, habitu illis præcedentis speciei similes, « pro more graciliores, laxe cæspitantes, totæ glauco-virides, nun- « quam rubentes.

« *Caulis* simplex vel innovatione bifidus, tenuis, strato corticali « poroso duplici vel triplici illo præcedentis speciei tenuiori ob- « tectus. Ramuli flagellares filiformi-attenuati arcuato-reflexi.

« Folia caulina magna cauli adpressa late obovato-spathulata, « juniora valde concava subcucullata ætate dilatata apice fimbriata « media pagina laxius rhomboideo-marginem versus anguste li- « neari-areolata. Folia ramulina inferiora late ovato-lanceolata, api- « cialia lanceolata et lineali-lanceolata plus minus elongata, omnia acuta, areolis minoribus quam in præcedente, cellulis hyalinis po- « ris numerosis magnis pertusis, fibrillis annularibus remotiusculis.

« *Flores* dioici ; amentula mascula viridia rotundato-imbricata.

« *Fructus* primo perichætio immersus, tandem exsertus. Perichæ- « tium maximum polyphyllum, folia perichætialia externa obovato- « spathulata apiculata, interna late elongato-spathulata convoluta « ex apice valde dilatato emarginato minute apiculata, reti densiore. « Capsula globosa et ovato-globosa, badia.

« *Synon. Sph. fimbriatum* Wilson, in Hook. et Wils. *Musci antarctici*, p. 92 ; ejusd., *Bryol. Britan.* p. 21.

« *Sph. acutifolium* eorumd. in Drumm. *Musc. American.* n° 4.

« *Habit.* In pratis turfosis Germaniæ, Galliæ, Britanniæ haud « rarum, sed prætervisum.

« *Fructif.* Junio, Julio. »

Cette espèce a toujours été confondue avec la précédente, et j'en possède même de nombreux exemplaires recueillis par Bruch, aux environs de Deux-Ponts et désignés, par cet éminent bryologue, comme *Sph. acutifolium* ; elle m'a été communiquée sous ce même nom, des environs de *Tever*, par MM. Koch et Ch. Müller ; du *Hartz*, par M. Hampe ; des environs de Vire, par M. Lenormand. Je l'ai moi-même rencontrée dans plusieurs localités, dans les Vosges et dans la Forêt-Noire, mais nulle part en aussi grande abondance et en aussi grandes touffes qu'à côté de la cascade, dans la vallée de la Bassère, près de Bagnères-de-Bigorre.

On distingue cette espèce assez facilement de l'espèce précédente à son port plus grêle et plus élancé, à sa consistance plus tendre, à ses ramules filiformes plus flexueux et toujours recourbés, à la couleur toujours verte de la tige et des feuilles, à ses feuilles caulinaires beaucoup plus grandes, très-élargies vers le

haut et fimbriées sur le bord supérieur, à son périchèse beaucoup plus grand composé de feuilles beaucoup plus larges à peine apiculées, à leur sommet tronqué; le tissu des feuilles raméales a des mailles plus petites; les pores sont plus nombreux et plus grands.

Il n'est pas nécessaire d'insister davantage sur les différences spécifiques de cette plante, celles que nous venons d'énumérer sont plus que suffisantes pour lui assurer la place d'une espèce bien distincte parmi ses congénères.

M. Wilson fait encore remarquer que ce Sphaigne est plus commun dans le *Lancashire* que le *Sph. acutifolium*, et qu'il fructifie en abondance, même dans les années où les autres espèces restent généralement stériles.

3. Sphagnum cuspidatum Dill. Ehr.

(Planche XVI.)

« *Plantæ* robustiores solidiores strictæ, cæspites profundos molles « laxos superne viridi-et pallide ferrugineo-variegati inferne al- « bicantes vel albo-ferruginei.

« *Caulis* plus minus elongatus, pedalis et longior, strictus, fra- « gilis, pallidus, strato corticali duplici e cellulis minoribus haud « porosis strato ligneo pallido laxiore. Ramuli fasciculati 4-5, duo « expansi flagelliformes longi flexuosi molles, cæteri deflexi cauli « arcte adpressi filiformes longissimi albicantes mollissimi, ramuli « juniores erecti capitulum polycladum crassiusculum efficientes; « stratum corticale simplex, cellulis utriculiformibus apice poro « pertusis longis, cæteris brevioribus angustioribus.

« *Folia* caulina minuta, plerumque reflexa, ovato-triangularia « mutica, cellulis lateralibus perangustis latissime marginata, media « pagina laxe rhomboideo-areolata cellulis hyalinis porosis et « fibrillosis, basi e triplici et quadruplici serie cellularum minu- « tarum rotundarum efformata minutissime auriculata. Folia ra- « mulina laxe imbricata vel erecto-patentia, siccitate subrecurva « margineque undulata subcoriacea subnitida, media elliptico et

« elongato-lanceolata, terminalia lineali-lanceolata et subulata, « subacuta apice tridentato, cellulis angustis late marginata, cellulæ « hyalinæ superiora elongata utriculiformia fibrillis approximatis an- « nularibus vel spiraliter tortis, poris paucis minutis, inferiora lon- « gissima angusta fibrillis annularibus 20-22 poris omnino nullis.

« *Flores* monoici. Masculorum amentula plus minusve nume- « rosa ferruginea vel aurantiaca pulchre pentasticha. Femineorum « gemmulæ elongatæ, archegonia 2-4.

« *Fructus* in caulis capitulo. Perichætium magnitudine mediocri « viride, folia perichætialia inferiora ovata acuminata, superiora « late elliptico-oblonga apiculo minuto bifido valde concava et convo- « luta. Capsula in pseudopodio viridi exserta globosa castanea, sicca « deoperculata suburceolata vel crateriformis. Sporæ ferrugineo- « fuscæ.

« *Synon. Sph. palustre,* etc. Dillen. *Hist. Musc.* p. 241, tab. « XXXII, f. 2, B.

« *Sph. cuspidatum* Ehrh. *Decad. crypt.* n° 251.

« *Sph. cuspidatum* caule flaccido, ramulis laxis setaceis, foliis « lanceolatis involutis, truncato-erosis laxis. Schwægr. *Suppl.* I, « P. 1, p. 16, tab. VI. (*Descriptio et icones valde vagæ!*)

« *Sph. cuspidatum* caule flaccido subsimplici, ramulis fasciculatis « subæqualibus deflexis gracilescenti-cuspidatis, foliis elongato- « lanceolatis acutis planiusculis margine undulatis siccitate patulis « reflexisve, thecæ subglobosæ pseudopodio longiusculo subrubello. « Bridel, *Bryol. univ.* I, p. 14.

« *Sph. cuspidatum* Nees et Hornsch. *Bryol. German.* I, p. 23, « tab. IV, f. 9. — Web. et Mohr, *Bot. Tasch.* p. 74. — C. Müller, « *Synops.* I, p. 96. — Hartman, *Skand. Fl.* ed. 6, p. 436. — « Wilson, *Bryol. Brit.* p. 21.

« *Habit.* In turfosis aquosis ubi cæspites longe lateque efficit; « sicciora fugit.

« *Fructif.* Junio et Julio.

« *Variet.* β *submersum*, cæspites laxi mollissimi saturate virides « omnino vel sola superficie excepta submersi; caulis pertenuis

« longissimus tenuis flexibilis, viridis, ramuli longiores decurvi, « folia ramulina angustiora longiora, fructus infra capitulum in « caule sparsi, capsulæ in pseudopodio sæpe longissimo.

« *Habit.* In turfosis fossa aquosa tenet.

« *Var.* γ *plumulosum*, submersum, plantæ tenerrimæ, ramuli « sæpe valde remoti sine ramulis pendulis, folia anguste lanceo- « lata et subulata, mollia, capsulæ e capitulo in pseudopodio plus « minus elongato elatæ, minutæ.

« *Habit.* Cum præcedente.

« *Var.* δ *plumosum*, submersum, fluitans, nunquam ex aqua « emersum, quare semper sterile occurrit; ramuli conferti perlongi « decurvi foliis valde elongatis angustis plumiformes.

« *Habit.* In stagnis.

« *Var.* ε *hypnoides*, humile, dense cæspitosum, caulis simplex « ramulis simplicibus falcatis, folia uniformia lanceolata, falcata, « fructus ignotus.

« *Habit.* In ericetis humidis Sylvæ Nigræ ubi clar. Alex. Braun « legit.

« Vix varietas propria, potius planta junior vel forma depaupe- « rata. »

Le *Sph. cuspidatum* est une des espèces les plus aquatiques et une de celles qui contribuent le plus à la formation des dépôts tourbeux. Presque toutes les autres espèces de Sphaignes dépérissent à la suite d'une trop longue immersion complète; celle-ci paraît être dans son véritable élément dans l'eau, car on la rencontre constamment ou immergée à sa partie inférieure ou complétement submergée, n'élevant au-dessus de l'eau que les capitules à l'époque où ceux-ci doivent mûrir les fruits, et où les capsules doivent disperser les sporules. Vivant constamment dans l'eau, ces végétaux n'ont pas besoin de soutirer à l'air l'humidité dont ils ont besoin pour vivre; aussi leur tissu diffère-t-il de celui des espèces plus aériennes en ce qu'il est moins spongieux, et, par cela même, moins hygroscopique; la couche corticale de la tige est formée par un tissu plus serré que dans la plupart des

autres espèces et dépourvu de pores; les siphons des ramules sont moins nombreux, surtout dans les variétés flottantes; les grandes cellules hyalines des feuilles n'ont que des pores très-petits, et les feuilles elles-mêmes sont plutôt membraneuses que spongieuses.

Dans les endroits chauds, on voit quelquefois sortir de l'extrémité des ramules des pousses grêles qui se redressent et qui prennent tout à fait l'aspect des jeunes plantes obtenues par les semis (voy. fig. 1, *j*). Ce sont, en effet, de jeunes plantes, et elles poussent des racines à leur base et se détachent bientôt pour se constituer en individus qui ne tardent pas à prendre la forme de la plante mère. C'est à ce mode de multiplication, qui, du reste, se voit aussi quelquefois dans les autres espèces, mais beaucoup plus rarement, tout aussi bien qu'aux semis, que cette espèce doit sa rapide multiplication dans les tourbières dont parle notre ami Léo Lesquereux dans l'ouvrage cité plus haut, et que nous avons pu constater nous-même plus d'une fois. M. Léo Lesquereux recommande surtout cette espèce, qui se transplante si facilement, pour la reproduction de la tourbe exploitée.

4. Sphagnum squarrosum Persoon.

(Planche XVII.)

Plantæ proceræ robustæ laxe cæspitantes basi decumbentes; cæspites saturate virides.

Caulis semipedalis et longior plerumque dichotomus, ligneus; stratum corticale duplex e cellulis inæqualibus, magnitudine mediocri, haud porosis; stratum ligneum solidum fuscescens, medullare laxum pallide viride; ramuli 4-5, duobus vel tribus horizontaliter patulis tumidulo-flagellaribus, cæteris pendulis foliorum imbricatione teretibus; stratum corticale e cellulis longis subconformibus, paucis apice poro pertusis.

Folia caulina majuscula suberecta, patula et reflexa, mollissima lingulæformia, longitudinaliter sulcata, apice rotundato subfimbriata, reti laxo superne hexagono-rhombeo inferne valde

« elongato hexagono-rhomboidea, cellulis hyalinis hic illic pariete « obliquo bipartitis, cæterum porosis et fibrillosis, margine nullo.

« Folia ramulina e basi arcte imbricante squarrosa, terminalibus « et illis ramulorum pendulinorum exceptis, e basi valde concava « oblonga lanceolata in apicem 4-dentatum excurrentia, viridia, « margine hyalina angustissimo ex una serie cellularum efformato « circumducta; cellulæ hyalinæ hexagonæ utriculosæ, fibrillis cir- « cularibus et semicircularibus, poris numerosis majoribus et « minoribus.

« *Flores* monoici. Masculorum amentula haud numerosa, sub- « clavata, squarroso-foliosa, e viridi luteola. Flores feminei nu- « merosi; archegonis 3-4.

« *Fructus* in capitulo vel laterales haud raro numerosissimi. « Perichætium magnum, truncatum, tandem dissolutum; folia « perichætialia inferiora oblonga, superiora elongato-oblonga apice « truncato erosa, subconvoluta, omnia rameis pallidiora. Capsula « in pseudopodio crassiusculo plus minus exaltato globosa, deo- « perculata oblonga, castanea; sporæ luteæ.

« *Synon. Sph. squarrosum* Persoon, in *Prodr.* p. 88 (sine dia- « gnosi).

« *Sph. squarrosum* caule subramoso, ramulis recurvis attenua- « tis, foliis ovato-acuminatis apice recurvis. Schwægr. *Suppl.* I, P. I, « p. 13, tab. IV.

« *Sph. squarrosum,* caule erecto subdiviso, ramulis omnibus fas- « ciculatis dissimilibus deflexis, fasciculis remotis, foliis oblongis « concavis acutis reflexis, theca subglobosa exserta. Brid., *Bryol.* « *univ.* I, p. 5.

« *Sph. squarrosum* Nees et Hornsch. *Bryol. Germ.* I, p. 9, « tab. I. — Web. et Mohr, *Bot. Tasch.* p. 73. — C. Müller, « *Synops.* I, p. 94. — C. Hartman, *Skand. Fl.* ed. 6, p. 435. — « Wilson, *Bryol. Brit.* p. 23, tab. IV.

« *Habit.* In sylvaticis uliginosis, præprimis prope fontes et secus « rivulos; rarius in turfosis occurrit; nunquam submersum pro- « venit. »

« *Fruct.* Æstate. »

Cette espèce, la plus belle et la plus grande des espèces européennes, se distingue facilement par son port vigoureux, par ses rameaux étendus horizontalement à feuilles squarreuses. Ses touffes sont lâches, un peu rigides par les tiges assez fortes, toujours d'un vert succulent qui devient plus clair par la dessiccation, et qui passe au jaunâtre avec l'âge et dans l'herbier. Jamais les plantes ne montrent des teintes rouges, jaunes ou brunes.

Quand on excepte le gazonnement un peu plus ou moins serré, les rameaux plus ou moins rapprochés et les feuilles plus ou moins squarreuses, cette espèce ne montre pas des variétés importantes dans ses formes, si toutefois on ne veut lui réunir le *Sph. squarrulosum* L. Lesquer. qui a le port du *Sph. cuspidatum* et les feuilles squarreuses et vertes du *Sph. squarrosum*. Comme cette belle mousse, que j'ai cueillie moi-même avec l'auteur de l'espèce dans les grandes tourbières des Deux-Ponts, dans le Jura neufchâtelais, n'a encore été rencontrée ni fleurie ni fructifiée, je dois la laisser dans le doute, sauf à y revenir plus tard, quand des caractères plus sûrs pour la distinction spécifique auront été trouvés.

5. Sphagnum rigidum Nees, Schimp.

(Planche XIX.)

« Plantæ semipedales et humiliores, dense congestæ, fragiles; « cæspites pallide vel glauco-virides inferne pallidiores vel fusce- « scentes rigiduli.

« *Caulis* 2 et 4-partitus strictus laxius densiusve ramulosus, « ramuli breviores partim ascendentes et erecti partim deflexi; « caulis cellulæ corticales stratum duplicem vel triplicem efficientes « leniter compressæ fibrillis porisque destitutæ, illæ ramulorum « breviores majores apice vix prominulo poro pertusæ.

« *Folia* caulina minuta, oblique inserta erecta e basi valde dila- « tata ovata, apice rotundato erosa, reti medio latissimo margi- « nali angusto sine fibris et poris. Folia ramulina quinquefaria « erecto-patentia stricta oblonga margine inflexa apice subcucul-

« lata, anguste marginata; cellulæ hyalinæ dilatatæ valde fibril-
« losæ, fibrillis rete efficientibus, poris numerosis inæqualibus in
« medio ut ad margines cellularum; folia ramulina terminalia lan-
« ceolato-subulata, fibrillis spiralibus (fig. 14).

« *Flores* monoici. Antheridia in ramulis pendulis, evacuata la-
« tescentia (pl. XVIII, fig. 3 ♂; fig. 15-16). Perigonia feminea
« gemmiformia uncinata.

« *Fructus* in plantarum capitulo immersi vel emersi. Perichæ-
« tium gemmiforme, curvatum, nunquam dissolutum; folia peri-
« chætialia ovato-et oblongo-lanceolata acuta subfalcata solidiora.
« Capsula globosa, deoperculata oblonga truncata. Sporæ luteæ.

« *Synon. Sph. immersum* ramulis acutis erectis, foliis ovatis mar-
« gine apicis convoluto-cuspidatis, apice patulis, capsulis immer-
« sis. Nees et Hornsch. *Bryol. Germ.* I, p. 11, tab. II, f. 4.

« *Sph. compactum* β *rigidum;* foliis apice patulis convoluto-atte-
« nuatis, rigidulis, pedunculo gracili longius exserto. *Ibid.* p. 14,
« fig. 5. — C. Müller, *Synops.*, I, p. 99.

« *Sph. compactum* (Brid.) Wilson, *Bryol. Brit.* 18, tab. LXI,
« excluso synon. Bridel.

« *Variet.* β *compactum*, plantæ humiles maxime fragiles densis-
« sime ramulosæ atque congestæ; cæspites tumescentes compacti
« fragiles rufo-variegati vel pallide rufescentes; folia haud raro
« subbifariam compressa; capsulæ immersæ vel emersæ.

« *Habit.* In pratis uliginosis inque turfosis; var. β in turfosis sic-
« cioribus.

« *Fructif.* Æstate. »

C'est à tort qu'on a vu dans cette Mousse le *Sph. compactum* de Bridel, qui, en effet, n'est autre chose qu'une variété du *Sph. cymbifolium*, auquel Bridel a réuni plus tard le *Sph. compactum* var. β *rigidum* de Nees et Hornsch.

Les ramules raccourcis, étalés ou dressés, les feuilles roides, un peu étalées et à bords involutés vers le sommet, la grande fragilité des feuilles et des rameaux, font reconnaître cette espèce dès le premier abord.

Les anthéridies, au lieu de se trouver dans les ramules étalés et transformés en chatons, se trouvent sur les ramules pendants, ce qui a fait qu'elles sont longtemps restées inconnues.

Dans les formes compactes, tous les ramules sont dressés et tellement rapprochés, qu'ils s'imbriquent les uns contre les autres, comme dans la var. *β compactum* du *Sph. cymbifolium*.

SECTION II.

ESPÈCES À FLEURS DIOÏQUES.

6. Sphagnum cymbifolium Ehr.

(Planches XIX, IV, V et XII.)

« *Plantæ* robustæ, semipedales et pedales, pro more bipartitæ, « laxius densiusve cæspitantes. Cæspites rigiduli, nunc sordide vel « olivaceo-virides nunc purpurascentes vel fuscescentes, inferne « decolores.

« *Caulis* solidus ligneus, opere celluloso corticali laxissimo 3-4 « strata efformante obtectus, cellulæ corticales fibrillosæ atque « porosæ (pl. IV, f. 4, 5, 6; pl. V, f. 4-6, 8, 10). Ramuli 4-5, « duo vel tres horizontaliter patentes vel arcuati turgescentes apice « acuti, cæteri penduli cauli adpressi; cellulæ corticales spiriferæ, « omnes subæquales, rariores apice poro pertusæ (pl. V, f. 7, 8, « 10; pl. XIX, f. 15, 16).

« *Folia* caulina lingulato-spathulata, apice rotundato præmorsa, « mollissima, longitudinaliter sulcata, e reti laxissimo exstructa. « Folia ramulina imbricata, late ovata, profunde concava, apicem « versus margine incurva, summo apice cucullata, extus papillosa « (fig. 9, 10); cellulæ hyalinæ, superiores dilatatæ poris magnis « pertusæ, fibrillis annularibus et semiannularibus, inferiores elon- « gatæ fibris annularibus et spiralibus; color pallide olivaceo-viri- « dis, purpurascens vel purpureo-cærulescens.

« *Flores* dioici. Plantæ masculæ femineis similes sæpius graci-

« liores; amentula crassiuscula dense imbricata foliis latioribus.
« Involucra feminea gemmiformes, archegonia 1, 2 et 3.

« *Fructus* ut in præcedente.

« *Synon.* Sphagnum molle deflexum, squamis cymbiformibus.
« Dillen. *Hist. musc.* p. 240, tab. XXXII, fig. 1.

« *Sph. cymbifolium* Ehrh., *Hann. Magaz.* 1780, p. 235.

« *Sph. cymbifolium* Nees et Hornsch. *Bryol. Germ.* I, p. 6,
« tab. I.

« *Sph. cymbifolium* caule erecto subdiviso, ramulis inferioribus
« fasciculatis inæqualibus deflexis, foliis oblongis concavis obtu-
« siusculis appressis, theca subglobosa subexserta. Brid. *Bryol.*
« *univers.* I, p. 2. — Hedwig, *Fundam. Musc.* II, p. 85, tab. III,
« f. 1. — C. Müller, *Synops.* I, p. 91. — Wilson, *Bryol. Britan.*
« p. 17, tab. IV. — C. Hartman, *Skand. Flor.* ed. 6, p. 435.

« *Sph. latifolium* foliis ovatis obtusis concavis imbricatis fasciculo
« ductulorum destitutis, sporangiis sphæricis. Hedw. *Sp. musc.*
« p. 27. — Schwægr. *Suppl.* I, p. 1, p. 12. — Web. et Mohr,
« *Bot. Tasch.* p. 72. — Wahlenb. *Fl. Lapp.* p. 300.

« *Sph. obtusifolium* Hook. et Tayl. *Musc. Brit.* p. 3, tab. IV.

« *Var.* β *congestum*, dense cæspitatum, cæspites rufescentes pal-
« lide viridi-variegati, ramuli valde congesti, alii vermiculares
« erecti, alii filiformes penduli, folia ramulina arcte imbricata late
« ovata; capsulæ immersæ. Vid. etiam pl. XII, f. 3.

« *Sph. compactum* Brid. *Bryol. univers.* I, p. 16; ex parte.

« *Habit.* In uliginosis sylvaticis præprimis secus rivulos, in eri-
« cetis aquosis nec non in turfosis ubi præprimis forma purpu-
« rascens et var. β occurrunt.

« *Fructif.* Æstate. »

Les plantes varient beaucoup par rapport à la grandeur et au gazonnement plus ou moins serré, ainsi que par rapport à la couleur, qui offre diverses nuances de vert et de rouge carmin ou bleuâtre; mais le port général reste le même, de sorte qu'on reconnaît l'espèce très-facilement. Ce n'est que la variété β qui se distingue assez pour avoir été prise pour une espèce particulière.

Mais on trouve tant de formes intermédiaires entre cette variété et la forme type, qu'il serait difficile d'en fixer le caractère spécifique. C'est en partie le *Sph. compactum* Brid.

7. Sphagnum rubellum Wilson.

(Planche XX.)

« *Plantæ* tenellæ, laxe cæspitulosæ, colore vinoso-purpureo in-
« signes, illis formæ minoris flaccidæ *Sph. acutifolii* haud dissi-
« miles, habitum et tenuitatem *Sph. mollusci* etiam satis refe-
« rentes.

« *Caulis* tenuis, fragilis, vix semipedalis, sæpius brevior, opere
« celluloso corticali spongioso e 3-4 stratis cellularum poris desti-
« tutarum formato obtectus. Ramuli abbreviati 3-4, quorum 2
« arcuato-patuli vel recurvi, cæteri deflexi et penduli.

« *Folia* caulina majuscula, erecta vel deflexa, late ovato-oblonga,
« plicatula, summo apice pluries dentato; cellulæ hyalinæ poris atque
« fibrillis destitutæ, hexagono-rhomboideæ, parietibus obliquis
« bi-tripartitæ, versus marginem angustiores. Folia ramulina ba-
« silaria minima ovalia, dehinc sensim majora ovato-elliptica, ter-
« minalia elongata, apicem versus margine inflexa, summo apice
« crasse dentata, margine angusto circumducta; cellulæ hyalinæ
« fibrillis annularibus numerosis armatæ, poris lateralibus haud
« numerosis pertusæ.

« *Flores* dioici. Amentula mascula breviora clavata, purpurea,
« folia perigonialia late ovata. Involucra feminea gracilia, subincurva
« foliis involucralibus elongato-lanceolatis margine inflexis, arche-
« gonium unicum.

« *Fructus* capitulo immersi vel exserti. Perichætium magnum,
« polyphyllum; folia perichætialia late oblonga et elongato-oblonga,
« sensim acuminata subacuta apice recurva. Capsula in pseudopodio
« crassiusculo exserta, globosa; sporæ ferrugineo-luteæ.

« *Synon. Sphagnum rubellum;* dioicous; stem slender, with short
« deflexed attenuated branches; leaves elliptical, obtuse subsecund,
« capsule subexserted. (Wilson, *Bryol. Brit.* p. 19, tab. LX.)

« *Habit.* In paludosis muscosis ; copiose in *Risly Moss* prope *War-*
« *rington,* Lancastriæ (W. Wilson) ubi *Sph. mollusco* associatum
« et intermixtum occurrit; in Scotia, W. Arnolt et Greville; in Hi-
« bernia, Templeton, Dr Hutchins.

« *Fruct.* Fructus raros mens. Junio et Julio profert. »

Cette jolie espèce, établie par mon savant ami W. Wilson, a quelques rapports avec les formes grêles, qu'on trouve quelquefois mélangées à d'autres Sphaignes, du *Sph. acutifolium,* dont il partage aussi la teinte pourprée; mais elle se distingue facilement par la dioïcité de son inflorescence, par ses feuilles caulinaires plus larges, par ses feuilles raméales également plus larges et presque obtuses, plutôt ovales elliptiques qu'ovales lancéolées, et d'une consistance plus tendre. Elle se distingue, au premier abord, du *Sph. molluscum,* dont elle partage la grandeur, le port général et l'inflorescence, par ses teintes pourprées.

8. Sphagnum molluscum Bruch.

(Planche XXI.)

« *Plantæ* delicatulæ quam maxime fragiles, 3-6 pollices altæ,
« dense congestæ, colore pulchre viridi-luteo insignes. Cæspites
« mollissimi e lutescente virescentes.

« *Caulis* simplex vel bipartitus stramineus, strato corticali du-
« plici obtectus, cellulæ corticales haud porosæ. Ramuli abbreviati
« 1, 2 et 3, vel omnibus patulis vel uno alterove deflexo, laxe
« foliosi submutici ; cellulæ corticales maxime inæquales, minimæ
« atque maximæ, hæcce utriculiformes apice pertuso recurvæ lu-
« tescentes.

« *Folia* caulina erecta, patula et recurva, majuscula, ovato-
« oblonga, apicem versus paulisper angustata margineque incurva,
« cellulæ hyalinæ spiriferæ. Folia ramulina patentia vel laxe incum-
« bentia, hic illic secunda, ovato-et elongato-lanceolata, marginata,
« apicem versus lateribus incurva, mollia, cellulæ hyalinæ valde
« fibrosæ quasi reticulatæ, sola parte superiore poris pertusæ.

« *Flores* dioici. Plantæ masculæ in cæspitibus propriis raro fe-

« mineis intermixtæ; amentulum masculum parvum pallide auran-
« tiacum. Flos femineus generis.

« *Fructus* e capitulo caulis vel e latere pseudopodio plus minusve
« elongato elatus. Perichætium magnum imbricatum vel dissolu-
« tum (f. 17, 18 et pl. XII, f. 6-8); folia perichætialia late elongata
« sensim acuminata subacuta. Capsula parvula, aurantiaca, sporæ
« sulphureæ.

« *Synon. Sphagnum molluscum* (Bruch, *Botan. Zeitung*, 1825,
« p. 633.) caule decumbente inde erecto fasciculato ramoso, ra-
« mulis quaternis-senis, his appressis illis deflexis incurvis, foliis
« ovatis concavis incurvis apice subdenticulatis, perichætalibus su-
« premis ovato-lanceolatis, thecæ emersæ receptaculo orbiculari.
« Brid. *Bryol. univ.* I, p. 753. — C. Müller, *Synops.* p. 95. —
« Wilson, *Bryol. Brit.* p. 19, tab. LX.

« *Habit.* In paludosis spongiosis muscosis montium, nunquam
« planitiei, rarius in turfosis.

« *Fructif.* Vere. »

C'est le plus délicat et l'un des plus élégants de tous les Sphaignes d'Europe. Il ne saurait être confondu avec aucune autre espèce, ni indigène ni exotique. Le contour et le tissu de ses feuilles montrent bien quelques ressemblances avec les feuilles du *Sph. subsecundum*, mais un examen attentif ne laisse pas d'y faire reconnaître des différences assez notables.

Le tissu cortical des ramules se compose d'un grand nombre de cellules utriculaires très-grandes en forme de fioles ou plutôt de cornues à col raccourci; entre ces cellules, le tissu se complète par des cellules très-petites. (Voy. fig. 20 et 21.)

Le tissu cortical de la tige se compose de deux couches cellulaires au lieu d'une comme dans le *Sph. subsecundum.*

Le fruit mûrit plus vite que dans les autres Sphaignes, et c'est dès le commencement du printemps que les capsules s'ouvrent pour émettre les sporules d'un beau jaune de soufre.

Dans les endroits où les touffes sont submergées, les plantes acquièrent quelquefois une longueur de deux à trois pieds et de-

viennent presque filiformes ; les ramules perichétiaux et les pseudopodes s'allongent en proportion et ressemblent quelquefois à des fils surmontés d'une petite boule. (Voy. pl. XII, fig. 6.)

9. Sphagnum subsecundum Nees et Hornsch.

(Planches XXII et XXIII.)

« *Plantæ* gracilescentes plus minus elatæ, pro more pedales et « altiores, simplices vel bifurcatæ, dense congestæ. Cæspites mol- « les, polychromi, e glauco-viridi lutescentes, e luteo fuscescen- « tes, vel sordide virides, vel ferruginei vario modo variegati.

« *Caulis* solidus, fuscus, subnitidus, strato corticali simplici « haud poroso obtectus. Ramuli fasciculati approximati, longius- « culi vel abbreviati, duo vel tres patuli vel arcuati flagelliformes, « unus vel duo deflexi filiformes, utrique laxius foliosi; cellulæ « corticales utriculiformes apice aperto vix recurvæ, minus nume- « rosæ quam in præcedente.

« *Folia* caulina parva, late ovata ad insertionem dilatatam mi- « nute auriculata, apice rotundata tandem minute fimbriata ; cellulæ « hyalinæ rhomboideo-sexangulares, apicales fibrosæ, basilares fibris « destitutæ. Folia ramulina laxe incumbentia vel patentia plerumque « subsecunda, late elliptico-lanceolata valde concava margine in- « curva, anguste marginata, summo apice denticulata ; cellulæ « hyalinæ flexuoso-elongatæ, fibrillis annularibus vel spiralibus « sæpe reticulum efficientibus, poris permultis præprimis dorso « ad latera cellularum seriatim positis.

« *Flores* dioici. Planta mascula feminea gracilior.

« *Fructus* in caulis capitulo rarius in latere. Perichætium longum, « polyphyllum, laxe imbricatum, rarius omnino dissolutum. Folia « perichætialia oblonga et oblongo-elongata sensim acuminata, « interna vaginantia. Capsula in pseudopodio plus minus alte ex- « serta, castanea vel atro-brunnea. Sporæ ferrugineæ.

« *Synon. Sphagnum subsecundum* (Nees ab Esenb.), ramis attenuatis « reflexis, foliis ovatis acutis oblique secundis opacis, capsula cya-

« thiformi, pedunculo gracili elongato. Nees et Hornsch. *Bryol.* « *Germ.* I, p. 17, tab. III. fig. 7. — Brid. *Bryol. univ.* I, p. 8. — « C. Müller, *Synops.* I, p. 100. — Hartman, *Skand. Flor.* ed. 6, p. 436.

« *Sph. contortum* (Schultz) *var. subsecundum* Wilson, *Bryol. Brit.* « p. 22, tab. LX.

« *Variet.* β *contortum*, immersum, plantæ robustiores ferrugineæ, « atro-virides vel olivaceæ, ramuli fasciculati magis conferti, ver- « miculares, pro more circinati, folia ramulina majora laxius den- « siusve imbricata.

« *Synon. Sphagnum contortum* (Schultz, *Suppl. Flor. Starg.* p. 64), « ramulis attenuatis recurvato-contortis, foliis ovato-acuminatis fal- « cato-subsecundis nitidis. Nees et Hornsch. *Bryol Germ.* I, p. 15, « tab. II. — Bridel, *Bryol. univ.* I, p. 7. — Wilson, *Bryol. Brit.* p. 22, « tab. LX.

« *Habit.* In turfosis profundis, in fossis pratorum uliginosorum; « var. β submersum in fossis vel aquis turfosis stagnantibus. »

Cette espèce varie beaucoup, suivant les localités. Aux endroits où elle n'est immergée que par la partie inférieure des plantes, elle constitue la forme-type; là où elle est complétement submergée, elle représente le *Sph. contortum* des auteurs. Les deux formes passent l'une à l'autre dans les mêmes localités et dans les mêmes touffes. Aucune autre espèce ne montre une aussi grande variation dans les couleurs que celle-ci. On y trouve le vert clair, le vert jaune et le vert sale dans toutes ses nuances, de même que le jaune clair, le jaune roux, orange ou ferrugineux; dans la variété β, les feuilles prennent quelquefois une teinte vert foncé ou noirâtre, ou passent même au noir complet. Diverses nuances se montrent souvent sur le même pied.

SEDIS INCERTÆ.

10. SPHAGNUM AURICULATUM Schimp.

(Planche XXIV.)

« *Planta* triuncialis et longior, pallide viridis inferne candicans,

« mollis fragilis, habitu inter formam laxam *Sph. rigidi* et *Sph. sub-*
« *secundum var. contortum* ludens.

« *Caulis* pallide fuscescens, strato corticali simplici. Ramuli fla-
« gelliformes, laxius foliosi, cellulis corticalibus inæqualibus ma-
« joribus utriculiformibus apice vix incurvo pertusis.

« *Folia* caulina magna, lingulato-lanceolata, ad insertionem auri-
« culis magnis e cellulis hyalinis maximis porosis atque spiriferis
« compositis, apice truncatulo dentato; cellulæ hyalinæ flexuoso-
« elongatæ apicem versus spiriferæ, spiræ convolutionibus confer-
« tis, poris numerosis in utroque latere seriatis. Folia ramulina
« illis præcedentis speciei similia reticulatione ut in fol. caulinis.

« *Flores* et fructus ignoti.

« *Habit. Hayword's Heath* prope *Hurstpierpoint*, Sussexiæ; cl.
« Mitten sine nomine misit. »

Cette intéressante espèce se distingue surtout de l'espèce précédente par la couleur, d'un vert légèrement jaunâtre, de ses feuilles, par les feuilles caulinaires beaucoup plus grandes, et garnies à leur base de deux grandes oreillettes, composées de grandes cellules hyalines utriculaires percées de pores et garnies de fibres spirales (voy. fig. 6). Aucune autre espèce ne montre autant de pores dans les cellules hyalines des feuilles de la tige aussi bien que de celles des rameaux, que cette espèce-ci; on en compte jusqu'à quarante dans une seule cellule.

Cette Mousse mérite une attention toute particulière de la part des bryologues anglais qui l'ont à la portée de leurs investigations.

EXPLICATION DES PLANCHES

DE LA PARTIE MORPHOLOGIQUE ET ORGANOGRAPHIQUE.

PLANCHE I.

GERMINATION ET PROTHALLIUM.

Fig. 1. Sporule de *Sph. acutifolium* vue d'en haut à un grossissement de 500 ($\frac{500}{1}$).
Fig. 2. Sporule vue de côté montrant la base bombée, $\frac{500}{1}$.
Fig. 3, 4. Sporules ouvertes suivant les trois arêtes latérales pour laisser sortir le proembryon, $\frac{400}{1}$.
Fig. 5, 6, 7. Première cellule du proembryon sortant de l'exospore, $\frac{400}{1}$.
Fig. 8. *Idem*, grossissement $\frac{600}{1}$.
Fig. 9. Le proembryon commence à se ramifier, $\frac{400}{1}$.
Fig. 10. Exosporium vide, $\frac{400}{1}$.
Fig. 11. Proembryon formant un filament aminci et décoloré à sa partie inférieure, portant encore à sa partie supérieure renflée verte l'exospore *e*, $\frac{300}{1}$.
Fig. 12. Proembryon ramifié portant encore en *e* l'exospore, se sous-divisant à la partie inférieure en filaments extrêmement minces, incolores, à articulations obliques, se renflant à la partie supérieure en une petite masse verte composée de grandes cellules bombées à leur face extérieure; c'est de cette masse que naît le prothalle ou la jeune plante, $\frac{250}{1}$.
Fig. 13. Proembryon simple portant à la partie supérieure l'exospore *e*, se renflant à sa partie inférieure en une cellule qui doit se segmenter pour commencer le prothalle, $\frac{250}{1}$.
Fig. 14. Proembryon s'éloignant en deux sens opposés de l'exospore *e*, le sectionnement de la cellule prothallique a commencé vers la droite, $\frac{250}{1}$.
Fig. 15. Proembryon plus avancé, le prothalle se compose déjà de plusieurs couches de cellules, $\frac{250}{1}$.
Fig. 16. Proembryon très-ramifié, portant encore en *e* l'exospore, montrant en *A* un renflement tuberculeux composé d'un assez grand nombre de cellules très-bombées extérieurement. *A'*, même renflement vu d'un autre côté. A la partie inférieure en *B*, un tubercule vert ou commencement d'un second prothalle; plus bas, à la partie radiciforme, commencements d'autres tubercules; 16 *B'* plus grossi.

Fig. 17. Exospore détaché d'un proembryon très-avancé, $\frac{400}{1}$.

Fig. 18. Proembryon de six mois nageant dans l'eau, ne montrant aucun commencement de prothalle, $\frac{300}{1}$.

N. B. Tous ces proembryons ont été obtenus par la germination dans l'eau de sporules du *Sph. subsecundum.*

Fig. 19. Prothallium du *Sph. acutifolium*, formé sur la terre humide de tourbières des environs de Leipsick, envoyé par M. W. Hofmeister; *P*, commencement de la plante, $\frac{400}{1}$.

PLANCHE II.

PROTHALLIUM ET JEUNES PLANTES.

Fig. 1. Prothallium avec la jeune plante du *Sphagnum acutifolium.* Grandeur naturelle.

Fig. 1 *b.* Même individu grossi.

Fig. 2. Prothallium fortement ramifié, de la même espèce, $\frac{10}{1}$; figure empruntée à la publication de M. Hofmeister.

Fig. *H* 1. Portion basilaire d'un prothallium, avec la moitié longitudinale d'un bourgeon feuillé, $\frac{300}{1}$; fig. de M. Hofmeister.

Fig. *H* 2. Prothallium avec un bourgeon à sa base et avec le commencement d'un nouveau prothallium sur un des filaments sortis du premier prothallium, $\frac{100}{1}$; fig. de M. Hofmeister.

Fig. 3. Lobe d'un prothalle à la base duquel s'est développée une jeune plante feuillée, poussée un peu de côté, de manière que ses feuilles basilaires se trouvent isolées et paraissent constituer un bourgeon, $\frac{150}{1}$.

Fig. 4. Portion de la même plante vue à un grossissement de 400.

Fig. 5. Sommet végétatif d'un jeune bourgeon, $\frac{400}{1}$.

Fig. 6. Le même à un grossissement de 900.

Fig. 7. Jeune plante de quatre mois du *Sph. subsecundum*, fixée à sa base au moyen de radicelles, sur une vieille tige de la même espèce. Grandeur naturelle.

Fig. 7 *b.* La même, grossie.

Fig. 8. Deux jeunes plantes de la même espèce, issues d'un même bourrelet prothallique. Grandeur naturelle.

Fig. 8 *b.* Les mêmes, grossies.

Fig. 9. Partie inférieure de la tige d'une jeune plante, avec la première feuille montrant l'origine des radicelles et leur forme, $\frac{500}{1}$.

Fig. 10, 11, 12. Extrémités de radicelles, $\frac{900}{1}$.

Fig. 13. Troisième feuille depuis la base de la figure 7, $\frac{700}{1}$.

Fig. 14. Jeune feuille prise dans le bourgeon terminal de la même plante; cette feuille est encore en voie de développement, $\frac{700}{1}$.

Fig. 15. Huitième feuille de la même plante. Même grossissement.

Fig. 16, 17. Coupes transversales de jeunes tiges, $\frac{500}{1}$.

Fig. 18. Jeunes plantes de dix mois montrant les premiers ramules qui sont encore simples; le capitule commence à se former. Grandeur naturelle.

PLANCHE III.

ÉVOLUTION DE LA TIGE ET DES FEUILLES.

Fig. 1. Bourgeon terminal de la tige, laissant dépasser le sommet végétatif de cette dernière (*Sph. acutifolium*), $\frac{100}{1}$.

Fig. 2. Bourgeon terminal coupé sur le côté, montrant les feuilles les plus intérieures intactes, ainsi que le sommet végétatif de la tige (*Sph. cymbifolium*), $\frac{100}{1}$.

Fig. 3 et 4. Bourgeons terminaux de la même espèce, montrant la première évolution des feuilles. En figure 4 le sommet végétatif est très-allongé, et la cellule terminale est plus longue qu'à l'ordinaire, $\frac{150}{1}$.

Fig. 5 et 6. Coupes verticales de deux bourgeons de la même espèce, montrant la segmentation de la cellule terminale et l'origine des feuilles, $\frac{500}{1}$.

Fig. 7. Coupe verticale d'un sommet végétatif d'un ramule de *Sph. cymbifolium*, $\frac{500}{1}$.

Fig. 8. Sommet végétatif de la tige de *Sph. cymbifolium*, montrant le commencement de cinq feuilles, et le sectionnement de la cellule terminale pour une sixième feuille qui viendrait se placer à peu près au-dessus de la première, $\frac{500}{1}$.

Fig. 9. Commencement de feuille, la cellule primaire s'est déjà sectionnée, $\frac{500}{1}$.

Fig. 10, 11, 12, 13. Jeunes feuilles à différents degrés de développement, faisant encore entrevoir le premier sectionnement de la cellule primaire, $\frac{500}{1}$.

Fig. 14. Très-jeune feuille de *S. cymbifolium*, à mailles presque rectangulaires, $\frac{500}{1}$.

Fig. 15. Portion de la même feuille grossie davantage, pour montrer le sectionnement rectangulaire ultérieur.

Fig. 16. Bord d'une feuille semblable, mais un peu plus développée.

Fig. 17. Portion d'une jeune feuille dans laquelle les cellules hyalines commencent à se former, $\frac{600}{1}$.

Fig. 18. Portion d'une jeune feuille où le réseau de cellules vertes est déjà formé; les cellules hyalines ne sont encore, en général, entourées que de quatre cellules vertes, $\frac{600}{1}$.

Fig. 19. Figure schématique pour montrer le sectionnement qui prépare la formation des deux espèces de cellules; les *a* correspondent aux cellules hyalines, les *b* aux cellules vertes; la progression du sectionnement est symétrique.

Fig. 20. Très-jeune feuille caulinaire de *Sph. subsecundum;* la différentiation des cellules n'y a pas encore commencé, $\frac{500}{1}$.

Fig. 21. Jeune feuille caulinaire de *Sph. cymbifolium*, dont la multiplication des cellules a cessé vers le sommet, tandis qu'elle continue encore dans la moitié inférieure, $\frac{500}{1}$.

Fig. 22. Jeune feuille de la même espèce, un peu plus avancée que la précédente, même grossissement; la partie basilaire, qui ressemble à celle de la précédente, n'est pas dessinée.

Fig. 23. Jeune feuille d'un bourgeon terminal de *Sph. cymbifolium*, recouvrant le bourgeon en forme de capuchon, $\frac{100}{1}$.

Fig. 24. *Idem* de *Sph. subsecundum.*

Fig. 25. Portion d'une jeune feuille raméale de *Sph. acutifolium*, dont les cellules ont acquis leur forme et leur grandeur normales, mais dont les hyalines ne montrent encore ni fibres, ni pores, $\frac{600}{1}$.

Fig. 26. Portion d'une jeune feuille caulinaire de *Sph. cymbifolium.* Les cellules hyalines se sont en partie sous-divisées, mais ne montrent pas encore de pores, $\frac{600}{1}$.

Fig. 27. Portion d'une jeune feuille raméale de *Sph. subsecundum.* Les pores des cellules hyalines sont indiqués par un bourrelet; quelques-uns seulement montrent une petite ouverture, les fibres commencent à se former du côté de cellules vertes, qui elles-mêmes ne sont pas encore débordées par les cellules hyalines.

PLANCHE IV.

ORGANISATION DE LA TIGE.

Fig. 1. Coupe verticale d'un bourgeon terminal de *Sph. cymbifolium*, pour montrer l'origine des feuilles et des rameaux; les chiffres I, II, IV, VII, indiquent les rameaux entamés par cette section suivant leur ordre de succession sur la tige; deux rameaux étant tombés en avant et deux en arrière de la coupe, les chiffres arabes indiquent le même ordre de succession des feuilles; environ $\frac{90}{1}$.

Fig. 2. Portion de cette coupe prise vers la partie inférieure, vue à un grossissement de $\frac{300}{1}$; on y distingue les cellules pointillées, de la partie ligneuse; les quatre couches de cellules corticales, qui sont encore très-petites; l'origine des feuilles, et en haut le commencement d'une paraphyse.

Fig. 3. Cellules pointillées du même morceau à $\frac{800}{1}$.

Fig. 4. Coupe longitudinale d'une partie de tige entièrement formée de *Sph. cymbifolium*, montrant les couches corticales spongieuses avec de nombreux pores, l'origine de deux feuilles, celle d'un rameau qui se sous-divise en ramules, $\frac{200}{1}$.

Fig. 5. Coupe transversale de cette tige, montrant la couche corticale, la couche ligneuse et le faisceau axile, formé de cellules plus tendres et vertes.

Fig. 6. Portion d'une coupe transversale plus fortement grossie, $\frac{300}{1}$.

Fig. 7. Coupe transversale d'un ramule horizontal.

Fig. 8. Cellules de la couche ligneuse, $\frac{500}{1}$.

Fig. 9. Cellule du parenchyme axile, $\frac{500}{1}$.

Fig. 10. Coupe transversale de cellules ligneuses, $\frac{800}{1}$.

Fig. 11. Coupe transversale de cellules du parenchyme axile, même grossissement.

PLANCHE V.

ORGANISATION DE LA TIGE ET DES RAMEAUX, DISPOSITION DES FEUILLES.

Fig. 1. Portion d'une tige de *Sph. cymbifolium* montrant la disposition des feuilles sur la tige, leur mode d'insertion ainsi que le mode d'insertion des rameaux, $\frac{50}{1}$.

Fig. 2. Portion de la tige du *Sph. acutifolium*, pour la disposition des feuilles et des rameaux, $\frac{25}{1}$.

Fig. 3. Portion de la couche corticale extérieure de la figure 1, montrant les pores et les fibres, $\frac{500}{1}$.

Fig. 4. Plusieurs cellules isolées de cette portion, $\frac{800}{1}$.

Fig. 5. Cellule isolée de la même partie.

Fig. 6. Une paroi de ces cellules montrant le bourrelet qui entoure les pores, $\frac{1000}{1}$.

Fig. 7. Portion d'un ramule pendant de la variété *purpurascens* du *Sph. cymbifolium*, avec la partie basilaire d'une feuille, $\frac{400}{1}$.

Fig. 8. Portion d'un ramule de la forme ordinaire verte, $\frac{500}{1}$; dans les deux fig. 7 et 8, cellules à fibres spirales sans pores.

Fig. 9. Coupe transversale d'un ramule de la variété *purpurascens*, $\frac{800}{1}$.

Fig. 10. Cellules à fibres spirales d'un ramule, isolées, $\frac{800}{1}$.

Fig. 11. Portion d'un ramule pendant du *Sph. acutifolium*, avec des cellules en fiole percées au sommet, $\frac{500}{1}$.

Fig. 12 Tronçon d'une tige de *Sph. subsecundum* dont l'enveloppe corticale n'est formée que par une seule couche cellulaire, $\frac{200}{1}$.

Fig. 13. Portion d'une coupe transversale de la même tige, $\frac{400}{1}$.

Fig. 14. Coupe transversale du tissu parenchymateux axile, $\frac{500}{1}$.

PLANCHE VI.

TISSU CELLULAIRE DES FEUILLES.

Fig. 1. Portion du tissu cellulaire d'une feuille caulinaire du *Sph. squarrosum*. Quelques-unes des cellules hyalines montrent encore des traces de leur cytoblaste; quelques autres se sont divisées en deux par une cloison simple, $\frac{500}{1}$.

Fig. 2. Coupe à travers quelques cellules vertes et hyalines; les premières ne sont pas encore recouvertes par les dernières, qui elles-mêmes sont divisées en deux par des cloisons très-minces.

Fig. 3. Portion d'une feuille entièrement formée prise sur une branche horizontale du *Sph. cymbifolium*. Les fibres sont annulaires et les pores assez grands, $\frac{500}{1}$.

Fig. 4. Portion d'une feuille périchétiale de la même espèce; les fibres sont incomplètes, les pores très-grands, $\frac{500}{1}$.

Fig. 5. Portion d'une feuille de la tige du *Sph. cymbifolium*, prise vers le bord où il n'y a que des cellules hyalines sans pores et sans fibres, $\frac{500}{1}$.

Fig. 6. Portion d'une feuille raméale du *Sph. acutifolium*. Les cellules hyalines ont débordé les cellules vertes et se touchent avec leurs bords. Voyez la coupe transversale, fig. 7 et 8, $\frac{600}{1}$.

Fig. 9. Portion d'une feuille caulinaire du *Sph. squarrosum*, dont les cellules hyalines n'ont ni fibres ni pores, $\frac{500}{1}$.

Fig. 10 et 11. Tissu des feuilles raméales du *Sph. subsecundum*, dont les cellules hyalines se distinguent par leurs nombreuses fibres en partie roulées en spirales, par la petitesse, et souvent par l'absence des pores, $\frac{500}{1}$.

Fig. 12. Tissu cellulaire d'une feuille raméale du *Sph. macrophyllum*, espèce de l'Amérique du Nord, dont les cellules hyalines très-allongées et étroites sont toujours dépourvues de fibres, mais percées de pores très-nombreux entourés d'un fort bourrelet, $\frac{500}{1}$.

Fig. 13. Feuille entière avec une portion d'un ramule de *Sph. acutifolium* vue du dos, $\frac{500}{1}$.

Fig. 14. Partie basilaire de cette feuille vue du dedans; les cellules basilaires s'allongent en culs-de-sac. Même grossissement.

PLANCHE VII.

MODE DE RAMIFICATION, DE RAJEUNISSEMENT ET D'INNOVATION DE LA TIGE, DISPOSITION DES FEUILLES ET DES RAMEAUX, ETC.

Fig. 1. Partie supérieure d'une plante fertile de *Sph. cymbifolium*, $\frac{25}{1}$.

Fig. 2. Figure théorique du mode de ramification, de rajeunissement et d'innovation.

Fig. 3. Diagramme montrant la disposition des feuilles et des rameaux. La grande flèche indique la direction de la spire foliaire, qui est de la gauche vers la droite; la petite flèche indique la direction de la spire des rameaux qui marche en sens inverse.

Fig. 4. Diagramme avec des directions opposées.

Fig. 5. Diagramme montrant la disposition des feuilles à l'extrémité des ramules.

Fig. 6. Bourgeon terminal de la plante figure 1, montrant l'origine des jeunes ramules, $\frac{150}{1}$.

Fig. 7. Partie intérieure de ce bourgeon; les feuilles se recouvrent en capuchon, de nombreux filaments d'une extrême ténuité se trouvent entre ces feuilles et les recouvrent comme une toile d'araignée, $\frac{300}{1}$.

Fig. 8, 9. Filaments de la figure 7, à $\frac{500}{1}$.

Fig. 10. Portion d'un de ces filaments à $\frac{1200}{1}$.

PLANCHE VIII.

INFLORESCENCES ET ORGANES DE GÉNÉRATION MÂLES.

Fig. 1. Plante de grandeur naturelle du *Sph. acutifolium* v. *purpurascens*, portant des fruits et des chatons mâles.
Fig. 2. Une partie de cette plante, grossie.
Fig. 3. Chaton mâle, $\frac{5}{1}$.
Fig. 4. Chaton mâle en partie défeuillé montrant les anthéridies, $\frac{5}{1}$.
Fig. 5. Plante mâle du *Sph. cymbifolium* v. *purpurascens*.
Fig. 6. Chaton mâle de la même, $\frac{5}{1}$.
Fig. 7. Chaton mâle de la même, plus avancé, défeuillé à sa partie inférieure pour montrer les anthéridies; même grossissement.
Fig. 8. Portion de l'axe défeuillé d'un chaton mâle de *Sph. acutifolium*, avec des anthéridies à différents degrés de développement, $\frac{200}{1}$.
Fig. 9. Premier commencement d'une anthéridie, $\frac{200}{1}$.
Fig. 10, 11. Anthéridies très-jeunes, $\frac{200}{1}$.
Fig. 12. Anthéridie du *Sph. acutifolium*, avec une feuille involucrale pour montrer la place qu'elle occupe par rapport à cette feuille, $\frac{200}{1}$.
Fig. 13, 14. Anthéridies de la même espèce peu de temps avant leur déhiscence, $\frac{250}{1}$.
Fig. 15, 16. Mêmes anthéridies au moment où elles s'ouvrent et émettent leur contenu, $\frac{250}{1}$.
Fig. 17. Une anthéridie quelques minutes après sa déhiscence; les bords se sont roulés en arrière et les anthérozoïdes se sont déjà en grande partie dispersés. Coupe transversale du pédicelle en *x*.
Fig. 18. Une même complétement vide; m. gr.
Fig. 19. Coupe transversale à travers une anthéridie non encore complétement mûre, $\frac{250}{1}$.
Fig. 20. Anthérozoïdes à différents degrés de développement d'une anthéridie non encore mûre.
Fig. 21. Anthérozoïdes enroulés dans leur enveloppe, $\frac{500}{1}$.
Fig. 22. Un de ces derniers anthérozoïdes, $\frac{1000}{1}$.
Fig. 23. Anthérozoïdes libres en mouvement, $\frac{1000}{1}$.
Fig. 24. Un des mêmes à $\frac{1300}{1}$.
Fig. 25. Un anthérozoïde mort, $\frac{1300}{1}$.
Fig. 26. Portion du bord qui se déroule d'une anthéridie ouverte, $\frac{250}{1}$.
Fig. 27. Partie de la même portion grossie davantage; les cellules se désagrégent.
Fig. 28. Portion du tissu cellulaire d'une anthéridie, avec la substance extracellulaire qui forme une membrane très-fine et hyaline; ces cellules se désagrégent très-facilement, $\frac{1000}{1}$.
Fig. 29. Granulations chlorophylleuses de ces cellules.

PLANCHE IX.

FLEURS FEMELLES, ORIGINE DES ARCHÉGONES ET LEUR ORGANISATION, CELLULES GERMINATIVES.

Fig. 1. Bourgeon terminal du *Sph. squarrosum*, montrant à gauche une jeune fleur femelle, et à droite un jeune rameau, $\frac{150}{1}$.
Fig. 2. Fleur femelle contenant des archégones complétement formés, m. gr.
Fig. 3. Coupe verticale à travers une très-jeune fleur femelle; les trois archégones surmontent le sommet de la tige, chacun sous forme d'une cellule divisée en deux; les feuilles périchétiales internes sont très-rudimentaires, les externes recouvrent le tout en forme de capuchon, $\frac{300}{1}$.
Fig. 4. Deux archégones sur le sommet en voie de formation, $\frac{400}{1}$.
Fig. 5, 6, 7, 8. Jeunes archégones à différents degrés de développement.
Fig. 9. Coupe verticale à travers une fleur femelle, montrant trois archégones complétement formés et les paraphyses rameuses, $\frac{200}{1}$.
Fig. 10. Archégones avec leurs feuilles périchétiales internes, celui du milieu va s'ouvrir, $\frac{300}{1}$.
Fig. 11. Archégone parfait environ huit jours avant la déhiscence de son sommet; le tissu cellulaire est encore très-mou et montre beaucoup de granulations vertes, $\frac{300}{1}$.
Fig. 12. Archégone prêt à être fécondé; on voit la cellule germinative avec deux cytoblastes à travers le tissu, $\frac{400}{1}$.
Fig. 13. Le même archégone coupé longitudinalement; la cellule germinative est mise à nu.
Fig. 14. Archégone dont le sommet du style venait de s'ouvrir.
Fig. 14 *x*. Coupe à travers le style montrant le canal.
Fig. 15. Cellule germinative avant la segmentation, $\frac{400}{1}$.
Fig. 16. Cellule germinative avec deux segmentations.
Fig. 17. Commencement du jeune fruit (embryon), $\frac{400}{1}$.
Fig. 18. Coupe verticale d'un archégone fécondé avec un embryon déjà assez avancé, $\frac{400}{1}$.
Fig. 19. Un embryon semblable vu à un grossissement de $\frac{800}{1}$.
Fig. 20. Production hyaline qui remplit le tube des archégones, et fils ramifiés qui en partent, vus à un très-fort grossissement.

PLANCHE X.

FORMATION DU JEUNE FRUIT.

Fig. 1. Réceptacle surmonté de deux archégones fécondés, dont l'un avorte, et dont l'autre montre à sa base le commencement du fruit, $\frac{400}{1}$.
Fig. 2. Coupe verticale du même; dans le jeune fruit on voit la couche cellulaire,

encore simple, dans laquelle doivent se former les sporules; la partie inférieure de l'embryon s'est introduite dans le réceptacle qui, de cette manière, s'est transformé en ramule; l'archégone à droite montre sa cellule germinative plusieurs fois sectionnée, mais arrêtée dans son développement à la suite du développement de l'archégone voisin, $\frac{600}{1}$.

Fig. 3. Embryon encore un peu plus jeune que le précédent.

Fig. 4. Embryon encore plus jeune que celui de la figure 3.

Fig. 5. Cellules prises dans l'intérieur de la partie renflée de l'embryon de la fig. 2; elles sont encore en voie de multiplication.

Fig. 6, 7. Cellules mérenchymateuses prises à la base de cette même partie, $\frac{500}{1}$.

Fig. 8. Coupe longitudinale à travers une portion d'une capsule embryonnaire montrant le premier sectionnement de la couche cellulaire qui doit produire les sporules, $\frac{800}{1}$.

Fig. 9. Portion inférieure d'un jeune sporange; le sectionnement du tissu du sporange même est terminé, les cellules-mères des sporules commencent à devenir libres, $\frac{400}{1}$.

Fig. 10. Une cellule contenant quatre cellules-mères de sporules, $\frac{800}{1}$.

PLANCHE XI.

FORMATION DES SPORULES, STRUCTURE DU FRUIT MÛR.

Fig. 1. Coupe verticale du commencement de la jeune capsule; le sporange commence à se montrer sous forme d'une couche cellulaire simple renfermant un liquide mucilagineux avec de très-petites granulations, $\frac{400}{1}$.

Fig. 2. Portion de la même partie grossie davantage, $\frac{800}{1}$.

Fig. 3. Portion de jeune sporange; le sectionnement des cellules n'est pas complétement achevé, $\frac{400}{1}$.

Fig. 4. Portion du même à $\frac{800}{1}$.

Fig. 5 et 6. Portion de sporange dans lequel les cellules-mères des sporules commencent à devenir libres, $\frac{600}{1}$.

Fig. 7-11. Cellules-mères de sporules à différents degrés de développement, $\frac{800}{1}$.

Fig. 12. Cellule-mère de sporule dans laquelle le sectionnement en quatre du contenu a commencé, $\frac{800}{1}$.

Fig. 13. Coupe d'une portion de capsule non encore mûre; les sporules, en partie encore réunies par quatre et transparentes, nagent librement dans le contenu liquide du sporange, $\frac{100}{1}$.

Fig. 14. Sporules encore en place, mais pas encore mûres, $\frac{400}{1}$.

Fig. 15. Quatre sporules encore réunies et hyalines, $\frac{300}{1}$.

Fig. 16. Les quatre sporules d'une cellule-mère encore réunies, mais mûres et sur le point de se séparer, $\frac{400}{1}$.

Fig. 17. Sporule mûre vue d'en haut, $\frac{400}{1}$.

Fig. 18. *Idem* vue de côté.

Fig. 19. Microspores vues au même grossissement que figure 18.

Fig. 20. Une des mêmes grossie davantage.
Fig. 21. Jeune fruit encore vert avec sa membrane péricarpique intacte, $\frac{50}{1}$.
Fig. 22. Le même coupé verticalement, $\frac{50}{1}$.
Fig. 23. Coupe verticale d'une capsule parfaitement mûre; les sporules restent attachées à la partie supérieure de la paroi interne, après que la columelle s'est contractée, $\frac{50}{1}$.
Fig. 24. Portion supérieure, restant ordinairement sur l'opercule, de la membrane péricarpique avec l'archégone desséché, $\frac{500}{1}$.
Fig. 25. Vaginule.
Fig. 26. Portion de la membrane péricarpique qui reste attachée à la vaginule; m. gr.
Fig. 27. Portion de la membrane capsulaire montrant les stomates, $\frac{200}{1}$.
Fig. 28 et 29. Stomates vus à un grossissement de $\frac{600}{1}$.

PLANCHE XII.

DIFFÉRENTES ESPÈCES DE *SPHAGNUM* PORTANT DES FRUITS MÛRS.

Fig. 1. *Sph. squarrosum.* Les fruits sont réunis dans le capitule.
Fig. 2. Fruit de la même espèce avec son périchèse.
Fig. 3. Forme compacte du *Sph. cymbifolium.* Les fruits sont réunis dans le capitule et presque sessiles.
Fig. 4. Fruit du *Sph. acutifolium.* La capsule est encore sessile et entièrement cachée dans le périchèse.
Fig. 5. Fruit de la même espèce. La capsule est sortie du périchèse à la suite du prolongement du réceptacle qui constitue un faux pédicelle.
Fig. 6. *Sph. molluscum* vel *gracilescens.* Les fruits sont dispersés sur la tige à la suite du développement ultérieur de la tige.
Fig. 7. Fruit de la même espèce. Les feuilles périchétiales sont dispersées sur le faux pédicelle, fortement allongé.
Fig. 8. Fruit du même au moment où la capsule s'ouvre pour laisser sortir les sporules.

PLANCHE XIII.

SPHAGNUM ACUTIFOLIUM.

Fig. 1 à 6. Plantes de grandeur naturelle des principales du type normal.
Fig. β. Var. *deflexum.*
Fig. γ. Var. *tenellum.*
Fig. δ. Var. *purpureum.*
Fig. ε. Var. *fuscum.*

PLANCHE XIV.

ANALYSES DE LA MÊME ESPÈCE.

Fig. 1. Portion du tronc montrant les feuilles caulinaires et quatre rameaux divisés en ramules, vue à un grossissement de $\frac{8}{1}$.
Fig. 2 et 3. Cellules prises vers la base.
Fig. 4. Cellules prises vers le sommet d'une feuille de la tige, $\frac{400}{1}$.
Fig. 5 et 6. Feuilles prises au milieu d'un ramule étendu.
Fig. 7, 8, 9. Feuilles prises vers le sommet du même ramule, $\frac{40}{1}$.
Fig. 10. Tissu foliaire du milieu de la base.
Fig. 11. —— du bord.
Fig. 12. —— du sommet d'une feuille raméale, $\frac{400}{1}$.
Fig. 13. Ramule sec.
Fig. 14. Portion d'un ramule avec une feuille montrant en *a* les échancrures du sommet, $\frac{100}{1}$.
Fig. 15. Deux chatons mâles avec deux ramules pendants, $\frac{6}{1}$.
Fig. 16. Périchèse renfermant son fruit, $\frac{10}{1}$.
Fig. 17. Feuille périchétiale interne, $\frac{20}{1}$.
Fig. 18. Périchèse avec sa capsule portée sur un faux pédicelle, m. gr.
Fig. 19, 20. Feuilles périchétiales internes, $\frac{20}{1}$.

PLANCHE XV.

SPHAGNUM FIMBRIATUM.

Fig. 1 et 2. Plantes de grandeur naturelle.
Fig. 3. Portion de tige grossie montrant les feuilles caulinaires; à droite, deux chatons mâles, et à gauche un rameau divisé en trois ramules.
Fig. 4. Feuille de la tige, $\frac{20}{1}$.
Fig. 5. Feuille de la tige prise sur le bourgeon terminal; elle est encore accolée à sa partie supérieure, $\frac{40}{1}$.
Fig. 6. Feuille de la tige prise au-dessus du bourgeon terminal; son sommet n'est plus creux, $\frac{100}{1}$.
Fig. 7. Cellules du milieu d'une feuille caulinaire, $\frac{400}{1}$.
Fig. 8-10. Feuilles raméales.
Fig. 11. Cellules du milieu.
Fig. 12. Cellules du bord d'une feuille raméale, $\frac{400}{1}$.
Fig. 13. Périchèse avec une capsule déoperculée.
Fig. 14. Feuille périchétiale inférieure.
Fig. 15. Feuille périchétiale supérieure.
Fig. 16. Sommet étendu d'une feuille périchétiale supérieure.
Fig. 17. Tissu cellulaire d'une feuille périchétiale supérieure, $\frac{400}{1}$.
Fig. 18. Capsule desséchée avec son opercule entr'ouvert.

PLANCHE XVI.

SPHAGNUM CUSPIDATUM.

Fig. 1. Plante de grandeur naturelle.
Fig. 2. Portion de la tige avec des feuilles caulinaires, un ramule transformé en chaton et un ramule pendant.
Fig. 3. Feuille caulinaire.
Fig. 4. Sommet d'une feuille caulinaire, $\frac{400}{1}$.
Fig. 5, 6, 7. Feuilles raméales prises au milieu et à l'extrémité d'un ramule.
Fig. 8. Sommet d'une feuille raméale, $\frac{400}{1}$.
Fig. 9. Petite portion du tissu d'une feuille raméale prise vers la partie supérieure.
Fig. 10. *Idem* vers la partie inférieure; les deux à $\frac{800}{1}$.
Fig. 11. Portion de section transversale de la tige, $\frac{300}{1}$.
Fig. 12. Cellules de la couche corticale extérieure.
Fig. 13. Portion d'un ramule.
Fig. 14. Coupe transversale du même; mêmes grossissements que figure 11.
Fig. 15 et 16. Capsules déoperculées sèches.
Fig. β 1. Var. *immersum.*
Fig. β 2. Ramule grossi de cette variété.
Fig. γ 1 et γ 2. Var. *plumulosum.*
Fig. δ. Var. *plumosum.*
Fig. ε. Var. *hypnoides.*

PLANCHE XVII.

SPHAGNUM SQUARROSUM.

Fig. 1. Plante de grandeur naturelle (voyez aussi pl. XII, fig. 1).
Fig. 2. Portion de la tige grossie, avec des ramules et un chaton mâle.
Fig. 3. Feuille de la tige.
Fig. 4. Tissu de cette dernière au sommet.
Fig. 5. Le même vers sa base, $\frac{400}{1}$.
Fig. 6, 7. Feuilles raméales.
Fig. 8. Tissu du sommet, $\frac{300}{1}$.
Fig. 9. Tissu de la partie inférieure, $\frac{500}{1}$.
Fig. 10. Portion de coupe transversale de la tige, $\frac{300}{1}$.
Fig. 11. Portion de ramule.
Fig. 12, 13. Coupes transversales de ramules vers la base et vers le sommet; m. gr.
Fig. 14. Capsule avec périchèse. Les périchèses sont ordinairement plus grands et composés d'un plus grand nombre de feuilles (voyez aussi pl. XII, fig. 2).

PLANCHE XVIII.

SPHAGNUM RIGIDUM.

Fig. 1 et 2. Plante de grandeur naturelle.
Fig. 3. Portion de la tige avec un ramule dressé et deux ramules pendants, dont le plus long porte les anthéridies.
Fig. 4. Portion de tige pour montrer le mode d'insertion des feuilles caulinaires.
Fig. 5. Feuille caulinaire.
Fig. 6. Tissu de cette dernière vers le sommet.
Fig. 7-11. Feuilles raméales.
Fig. 12. Sommet d'une feuille raméale à $\frac{200}{1}$.
Fig. 13. Tissu d'une même à $\frac{400}{1}$.
Fig. 14. Sommet d'une feuille prise à l'extrémité d'un ramule, $\frac{200}{1}$.
Fig. 15. Extrémité d'un ramule pendant portant des anthéridies.
Fig. 16. Feuille involucrale avec son anthéridie.
Fig. 17. Périchèse renfermant son fruit.
Fig. 18. Capsule sortie de son périchèse fermée par son opercule, à l'état humide.
Fig. 19. Capsule sèche avec son opercule entr'ouvert.
Fig. 20. Portion de coupe transversale de la tige.
Fig. 21. Portion de ramule pour montrer son tissu extérieur et l'insertion des feuilles.
Fig. 22, 23. Coupe transversale d'un ramule vers la base et vers le sommet.

PLANCHE XIX.

SPHAGNUM CYMBIFOLIUM.

Fig. 1 et 2. Plantes de grandeur naturelle.
Fig. 3. Pousse annuelle d'une plante mâle.
Fig. 4. Portion de tige avec ramules et fruit.
Fig. 5. Feuille de la tige.
Fig. 6. Tissu de cette feuille, au sommet.
Fig. 7, 8. Feuilles raméales.
Fig. 9, 10. Pointes de ces feuilles montrant les papilles qui s'y trouvent.
Fig. 11. Feuille raméale vers l'extrémité d'un ramule.
Fig. 12. Tissu d'une feuille raméale, au sommet.
Fig. 13. Tissu de la base; même grossissement que les mêmes parties dans les plantes précédentes.
Fig. 14. Chaton mâle.
Fig. 15, 16. Portions de ramule montrant les cellules corticales avec leurs fibres spirales.
Fig. β 1. Var. *congestum*, grand. nat.

Fig. β 2. Ramule grossi.

Pour la structure de la tige de cette espèce, voyez les pl. IV, V et XII.

PLANCHE XX.

SPHAGNUM RUBELLUM.

Fig. 1. Plante fertile de grandeur naturelle.
Fig. 2 et 3. Plantes mâles, *idem.*
Fig. 4. Portion de tige avec ramules.
Fig. 5. Feuille de la tige.
Fig. 6. Tissu de cette feuille au sommet.
Fig. 7-10. Feuilles raméales.
Fig. 11. Sommet d'une feuille raméale.
Fig. 12. Tissu d'une feuille raméale.
Fig. 13. Chaton mâle avec un ramule pendant.
Fig. 14. Feuille périgoniale avec son anthéridie évacuée.
Fig. 15. Fleur femelle.
Fig. 16. Portion de tige avec un fruit et un ramule.
Fig. 17. Feuille périchétiale interne.
Fig. 18. Tissu de cette feuille.
Fig. 19. Portion de coupe transversale de la tige.
Fig. 20. Tissu extérieur de la couche corticale de la tige.
Fig. 21. Portion de ramule; les cellules à pores ont la forme de fiole.
Fig. 22. Coupe transversale d'un ramule.

PLANCHE XXI

SPHAGNUM MOLLUSCUM.

Fig. 1 et 2. Plantes fertiles de grandeur naturelle.
Fig. 3. Plante mâle.
Fig. 4 et 5. Jeunes plantes qu'on rencontre souvent dans les touffes.
Fig. 6. Portion de tige avec feuilles caulinaires et un fascicule de ramules.
Fig. 7 et 8. Feuilles caulinaires.
Fig. 9. Sommet d'une telle feuille à $\frac{100}{1}$.
Fig. 10. Tissu d'une feuille caulinaire pris à sa base.
Fig. 11. *Idem* pris vers la partie supérieure, $\frac{400}{1}$.
Fig. 12-14. Feuilles raméales.
Fig. 15. Sommet d'une feuille raméale à $\frac{100}{1}$.
Fig. 16. Chaton mâle avec un ramule.
Fig. 17. Portion de tige avec fruit et ramules.
Fig. 18. Périchèse avec sa capsule au moment où celle-ci sort.
Fig. 19. Portion d'une coupe transversale de la tige.

Fig. 20. Portion de ramule; les cellules en forme de fiole ouverte au sommet recourbé par un pore sont très-nombreuses, jaunâtres vers le haut.

Fig. 21. Coupe transverse d'un ramule. Voyez, pour la variété flottante, ainsi que pour les diverses formes du périchèse et pour la capsule, pl. XII, fig. 6, 7, 8.

PLANCHE XXII.

SPHAGNUM SUBSECUNDUM.

Fig. 1, 2, 3. Plantes de grandeur naturelle, représentant les principales modifications de la forme-type.

Fig. 4. Ramules grossis.

Fig. 5, 6, 7. Feuilles raméales.

Fig. 8. Feuille raméale de la figure 2.

Fig. 9. Périchèse avec sa capsule déoperculée et un fascicule de ramules.

Fig. 10. Périchèse avec sa capsule encore operculée.

Fig. β 1. Var. *subsecundum*, forme épaisse.

Fig. β 2. Même variété, flottante dans l'eau.

Fig. *a*. Portion de ramule, fortement grossie.

Fig. *b* et *c*. Feuilles raméales.

Fig. *d*. Sommet d'une feuille raméale.

Fig. *e*. Feuille de la tige.

PLANCHE XXIII.

SUITE DU *SPHAGNUM SUBSECUNDUM*.

Fig. 1 et 2. Tissu de feuilles raméales.

Fig. 3. *Idem* vers le bord à la partie inférieure, $\frac{400}{1}$.

Fig. 4. Bourgeon terminal avec des involucres femelles.

Fig. 5, 6. Involucres femelles.

Fig. 7. Feuille involucrale renfermant deux archégones.

Fig. 8. Feuille involucrale.

Fig. 9. Archégones avec les jeunes feuilles périchétiales.

Fig. 10. Portion de coupe transversale de la tige. (Voyez, pour la coupe complète et les feuilles caulinaires, pl. XV, fig. 12, 13.)

Fig. 11. Tissu cortical.

Fig. 12. Coupe transversale d'un ramule.

Fig. β 1. Var. *contortum;* c'est le type du *Sph. contortum* Nees et Hornsch.

Fig. β 2. Plante mâle de la même variété.

Fig. β 3. Portion de la tige avec les feuilles caulinaires et les ramules.

Fig. β 4. Feuille raméale.

Fig. β 5. Tissu de cette feuille.

Fig. β 6. Chaton mâle.

PLANCHE XXIV.

SPHAGNUM AURICULATUM.

Fig. 1. Plante de grandeur naturelle.
Fig. 2. Portion de tige avec feuille caulinaire et fascicule de ramules.
Fig. 3. Portion montrant seulement les feuilles caulinaires.
Fig. 4. Autre portion grossie davantage.
Fig. 5. Feuille caulinaire très-grossie.
Fig. 6. Base de cette dernière à $\frac{200}{1}$.
Fig. 7. Sommet de la même; m. gr.
Fig. 8. Même sommet à $\frac{400}{1}$.
Fig. 9. Cellule d'une même feuille prise vers le milieu, $\frac{400}{1}$.
Fig. 10. Feuilles raméales en place.
Fig. 11. Sommet d'une feuille raméale.
Fig. 12. Tissu d'une feuille raméale, vers le sommet.
Fig. 13. *Idem* vers la base.
Fig. 14. Portion d'une coupe transversale de la tige.
Fig. 15. Portion de ramule défeuillé.
Fig. 16, 17. Coupes transversales d'un ramule.

MÉMOIRES
SUR LA VISION,

PAR M. L. L. VALLÉE,

OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR,
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES, EN RETRAITE.

TROISIÈME MÉMOIRE[1].

PROPOSITIONS RELATIVES A L'ŒIL,

Infirmant les théories admises, et conduisant à une nouvelle théorie, dans laquelle les indices du cristallin décroissent de l'extérieur au noyau; achromatisme satisfaisant résultant de cette théorie; elle explique une expérience importante de M. de Haldat, et cette expérience est confirmative de la nouvelle théorie; autre expérience également confirmative.

136. Nos recherches précédentes nous avaient conduit pour expliquer l'achromatisme, dans le cas le plus facile (celui des objets situés sur l'axe optique), à des indices du corps vitré peu admissibles, comme étant trop élevés. Nous avons voulu nous rendre compte des choses, par des constructions géométriques, pour le cas des objets vus obliquement, et ces constructions nous ont ouvert un champ nouveau de considérations entrevues par nous depuis longtemps [577][2], qui vont être l'objet de ces Mé-

[1] Les Mémoires I et II sont dans le tome XII du Recueil des Savants étrangers. Les numéros des paragraphes et des figures font suite à ceux des Mémoires I et II.

[2] Les numéros placés entre des crochets renvoient à la *Théorie de l'œil*. Ceux qui sont mis entre parenthèses renvoient à nos *Mémoires sur la vision*, insérés dans le Recueil des Savants étrangers. (Voir la note du n° 7 de ce Recueil, page 208 du tome XII.)

moires et de plusieurs autres, destinés à l'exposition d'une nouvelle théorie de la vision.

CHAPITRE PREMIER.

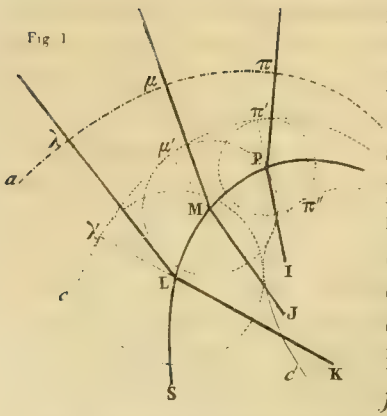
PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

137. Proposition I. — *Problème.* Étant donné une surface réfringente S ou S L M P (fig. 1, page suivante), une surface a, ou $a\lambda\mu\pi$, à laquelle sont normaux les rayons lumineux homogènes d'un même faisceau, et connaissant le rapport l du sinus d'incidence au sinus de réfraction pour la surface S, trouver une surface c, ou $c\lambda'\mu'\pi'$, à laquelle soient normaux les rayons réfractés.

Nous prévenons d'abord que les surfaces dont il s'agit se trouvent indiquées sur la figure, chacune, seulement par une ligne; qu'il en sera de même dans ce qui va suivre; que le discours s'appliquera, tout à la fois, aux surfaces et aux courbes planes qui les représentent, ces courbes étant considérées comme propres à réfracter les rayons lumineux situés dans leur plan, et que l est supposé plus grand que l'unité.

138. Cela posé, prenons sur la surface S, des points L, M, P...; par ces points menons des normales, L λ, M μ, P π...; sur les parties de ces normales comprises entre les surfaces S et a, prenons des grandeurs $\frac{1}{l}$ L λ = L λ', $\frac{1}{l}$ M μ = M μ', $\frac{1}{l}$ P π = P π'...; des points L, M, P... comme centres, avec ces grandeurs comme rayons, décrivons des sphères; menons l'enveloppe $c\lambda'\mu'\pi'$ de ces sphères, et cette enveloppe, d'après ce qu'on a vu n° 92, sera la surface cherchée.

139. Si la lumière marchait dans le sens K L λ', au lieu de marcher dans le sens λ L, l'enveloppe $a\lambda\mu\pi$ se déduirait de $c\lambda'\mu'\pi'$ en divisant les grandeurs L λ', M μ', P π'... par le coefficient $\frac{1}{l}$, c'est-à-dire en les multipliant par l, et en opérant, d'ailleurs, de la même manière. Ainsi, les deux surfaces a et c sont, par



rapport à la surface réfringente S, des conséquences l'une de l'autre.

La lumière marchant dans le sens λL, nous appellerons la première, à laquelle sont normaux les rayons incidents, l'*enveloppe antécédente*, la *surface antécédente* ou simplement l'*antécédente*, et la seconde la *conséquente*, ou l'*enveloppe conséquente* ou la *surface conséquente*.

Les normales d'une surface étant normales à toutes les surfaces concentriques (85, note) de cette surface, il est clair qu'une surface réfringente a une infinité d'antécédentes et une infinité de conséquentes, qui se déduisent les unes des autres, les premières comme les dernières, dès que l'on connaît les distances qui les séparent.

140. Il est évident que l'enveloppe construite plus haut (138) a une seconde nappe $c'\pi''$, qui n'est d'aucun intérêt dans le problème physique proposé; mais il est essentiel qu'on ne la confonde pas avec la nappe $c\pi'$, et pour cela il est bon de faire remarquer ici que la nappe $c\pi'$, dont on a besoin, est du même côté de la surface S que la surface $a\pi$.

Nous ajouterons que des deux surfaces $c\pi'$, $a\pi$, celle $a\pi$ qui correspond à des enveloppées sphériques dont les diamètres sont les plus grands, est normale aux rayons incidents L λ, M μ, P π..., appartenant au milieu le moins dense, et que l'autre $c\pi'$, qui est donnée par des sphères de diamètres plus petits, est normale aux rayons réfractés LK, MJ, PI..., appartenant au milieu le plus dense

141. Proposition II. — *Problème.* Étant donné l'œil n° 2 [45]; étant donné un faisceau de rayons homogènes émanés d'un point rayonnant R, assez éloigné pour qu'ils soient sensiblement parallèles:

l'inclinaison de ces rayons étant de 30 degrés avec l'axe de l'œil, dans le plan de cet axe et du trou du nerf optique; enfin, le corps vitré étant homogène, construire l'image du point rayonnant R.

Nous choisissons l'œil n° 2, parce que le docteur Krause n'y a pas trouvé de couche moyenne pour le cristallin, ce qui rend le travail plus facile; nous ne devons, d'ailleurs, l'employer qu'avec des valeurs d'indices tellement choisies, que le foyer soit sur la rétine, ou à peu près.

142. Nous avons supposé que l'indice 1.33 [605] était commun à la cornée, à l'humeur aqueuse et au corps vitré; puis, pour amener le foyer sur la rétine, que l'indice moyen 1.42 des couches qui enveloppent le noyau du cristallin de la carpe [132] était celui de la couche molle, et nous avons pris le chiffre 1.46, indice du noyau du cristallin de l'ours, le plus élevé de tous les indices que M. Chossat a déterminés [371], pour l'indice du noyau. Cela, comme on le voit, suppose cinq surfaces réfringentes, le devant de la cornée, le devant du cristallin, le devant du noyau, sa surface postérieure et la surface du corps vitré.

143. Quant aux dimensions, nous avons rectifié quelques légères erreurs d'impression relatives aux mesurages rapportés dans notre premier Mémoire de la *Théorie de l'œil*, et nous avons posé en millimètres :

$$g_1 = 3.70;\ g_2 = 2.20;\ g_3 = 2.10;\ g_4 = 0.5;\ g_5 = 1.54;$$
$$r_1 = 10.1;\ r_2 = 10.8;\ r_3 = 11.1;\ r_4 = -3.9;\ r_5 = -4.1;$$

ce qui, avec les indices précédents, donne

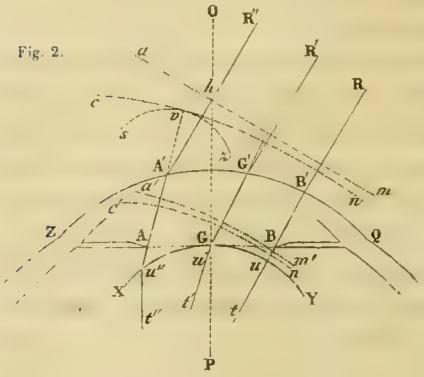
$$f_1 = 40.70;\ f_2 = 31.93;\ f_3 = 28.35;\ f_4 = 21.18 \text{ et } f_5 = 14.75.$$

Ainsi, avec les indices très-forts que nous employons, le foyer n'est que de 0.65 en deçà de la rétine. Pour qu'il soit exactement sur cette membrane, nous raccourcissons le diamètre du globe de ces 0.65. Nous supposons d'ailleurs que le segment postérieur est sphérique; que son rayon est égal à 11.00, et que l'écartement des centres des deux segments est de 2.70.

144. Le lobe extérieur du cristallin et le noyau sont terminés par des surfaces de révolution dont les axes coïncident avec l'axe optique et dont les génératrices sont : 1° pour les surfaces antérieures, des demi-ellipses ayant pour diamètres, dans le sens de l'axe optique 2.245 et 0.857, et perpendiculairement au même axe 4.750 et 3.097; 2° pour les surfaces postérieures, des paraboles dont les sommets sont donnés par les valeurs de g_1, g_2, g_3 et g_4, et qui passent respectivement par les sommets des ellipses génératrices des surfaces antérieures.

Enfin, le cercle A B de la pupille a 2.70 de rayon et son plan sont à 3.30 en arrière du point le plus saillant du devant de la cornée.

Fig. 2.



145. Avec ces données, un plan am perpendiculaire au faisceau des rayons arrivant sur l'œil, l'indice l étant 1.33, nous avons décrit d'un point, par exemple, tel que A', de la cornée Z Q, avec des rayons $A'v = \frac{A'h}{1.33} = \frac{3}{4} A'h$, des arcs de cercles $s\,v\,z$ qui ont pour enveloppe la courbe $c\,n$, laquelle est la conséquente de am. Si donc on mène par les points A et B, et par des points quelconques G de X Y, des normales A A', B B', G G', à la conséquente $c\,n$, les deux premières enfermeront le pinceau des rayons qui arrivent sur le cristallin, G G' étant le rayon qui passe par le point G, centre de la pupille.

Nous avons déduit de la conséquente $c\,n$ une surface analogue $a'\,m'$, enveloppe de sphères d'un même rayon pris arbitrairement, tangentes du même côté à $a'\,m'$, et cette surface étant l'antécédente de la réfraction qui s'opère à l'entrée des rayons dans le cristallin, nous en avons déduit la conséquente $c'\,n'$ normale aux rayons réfractés par le devant de ce corps.

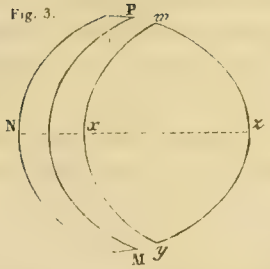
146. Ensuite, le faisceau se divise en deux parties, l'une située en dehors du noyau, l'autre traversant le noyau; nous avons opéré sur chacune de ces deux parties, pour chaque réfraction nouvelle, comme nous avions opéré pour les réfractions précédentes, et finalement, nous avons trouvé : 1° que l'image se compose d'un croissant M N P, représenté fig. 3, page suivante, sur une échelle décuple, et d'une partie orbiculaire $x\,y\,z\,w$; 2° que la distance de N en z est de $2^{mm}.65$; 3° enfin, que le centre de l'image est, sur la sphère formée par le fond de l'œil, à 35 degrés un quart environ du point où elle est rencontrée par l'axe optique.

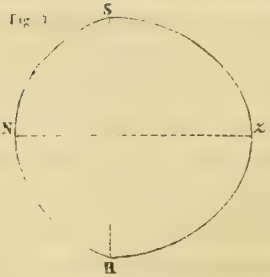
147. Proposition III. — *Corollaire.* Il est clair que si le noyau se trouvait remplacé par le système d'un lobe et d'un autre noyau plus petit, l'image orbiculaire se décomposerait encore en deux, savoir : une partie orbiculaire plus petite et un nouveau croissant, détaché de la première image orbiculaire, lequel croissant se trouverait placé entre le premier et la nouvelle image orbiculaire.

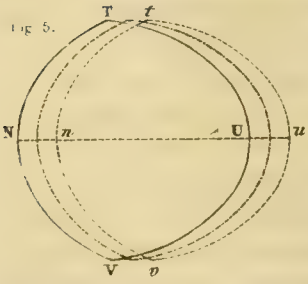
148. Proposition IV. — *Corollaire.* Il suit de là que, si le cristallin présentait n lobes et un noyau, de dimensions finies, on aurait sur le fond de l'œil, toujours avec les données des n^os^ 142 et suivants, n croissants et une image orbiculaire, séparés par des espaces finis.

149. Proposition V. — *Corollaire.* Si l'un des lobes placés entre l'extérieur du cristallin et le noyau se décomposait en deux, l'un interne, conservant son indice, l'autre externe, ayant un indice intermédiaire entre l'indice primitif et l'indice du lobe enveloppant, le croissant correspondant au lobe décomposé se diviserait lui-même en deux autres, et que le croissant nouveau viendrait se placer entre le croissant primitif et le croissant du lobe enveloppant.

150. Proposition VI. — *Corollaire.* Il faut conclure de là que, si le cristallin se composait d'une infinité de lobes infiniment minces, ou que, sans lobes réels, les indices augmentassent graduellement en approchant du centre, l'image d'un point vert sur la rétine, pour l'œil n° 2, serait une image oblongue N S z R







(fig. 4) de grandeur finie, composée de croissants infiniment étroits, juxtaposés entre eux et avec une image orbiculaire.

151. Proposition VII. — *Corollaire.* Si le point rayonnant était rouge ou violet, au lieu d'être vert, l'image, dans le premier cas, serait rouge et terminée par le contour en ligne pleine NTUV (fig. 5), et dans le second cas, violette et comprise dans le contour ponctué *n t u v* de la même figure.

152. Proposition VIII. — *Corollaire.* Si le point rayonnant était blanc, son image aurait pour contour la figure en lignes mixtes placée entre les contours NTUV, *n t u v*, et elle serait irisée par ses deux extrémités, savoir : en rouge, limité à la ligne VNT, du côté N, et en violet, limité à la ligne *t u v*, du côté *u*.

153. Proposition IX. — *Corollaire.* Si l'œil, au lieu d'avoir les formes et les indices admis aux n^os^ 142 et 143 pour l'œil n° 2, était tel qu'avec un noyau infiniment petit et des couches infiniment minces, l'image orbiculaire, pour un point rayonnant vert, fût un point, l'image entière serait une petite ligne verte.

154. Proposition X. — *Corollaire.* Dans le même cas, si le point rayonnant était blanc, son image serait une ligne de grandeur finie présentant toutes les couleurs du spectre, rouge à l'opposé du centre de la rétine et violette du côté de ce centre.

Le défaut qui produirait ce résultat dans l'œil est ce qu'on peut appeler l'*aberration transversale.*

CHAPITRE II.

SUR LA THÉORIE QUI SUPPOSE, DANS LE CRISTALLIN, DES INDICES DIMINUANT DE L'EXTÉRIEUR AU NOYAU; ACHROMATISME DE L'OEIL, SUIVANT CETTE THÉORIE, POUR LES OBJETS VUS OBLIQUEMENT.

155. Les huit dernières propositions du chapitre précédent résultent de ce que les indices du cristallin croissent de l'extérieur au centre; or, ces propositions ne peuvent guère être admises : d'où il suit qu'il est peu croyable que le cristallin soit ainsi disposé.

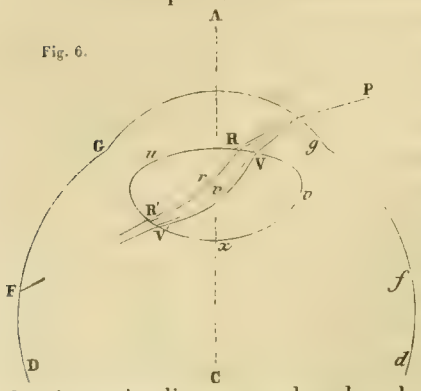
Les indices de ce corps décroissent-ils au contraire ? Telle est la question que nous avons dû nous faire. Nous avons reconnu bientôt qu'elle conduisait à des conséquences heureuses; puis nous avons vu qu'elle était appuyée de faits bien constatés; puis, enfin, qu'il paraissait possible de répondre péremptoirement aux objections qu'elle soulève.

Mais tout cela ne peut pas être exposé dans un seul Mémoire. Nous nous bornerons ici à ce qui concerne l'achromatisme, objet assurément d'une grande importance dans la vision, et nous n'épuiserons même pas ce que nous avons d'important à dire sur cet objet. Il faut qu'on veuille bien accueillir nos idées dans ce qu'elles ont de plausible, et même de séduisant, et qu'on attende l'ensemble de notre travail pour voir si notre théorie n'est pas absolument celle qu'il faut admettre.

156. Nous devons d'abord définir ce que nous appelons l'axe d'un pinceau efficace. Les rayons qui formeront ce pinceau, et qui concourront à la formation du foyer, occuperont une petite calotte de la surface extérieure de la cornée; par le centre de figure de cette calotte passera un rayon, et ce rayon, courbé ou brisé d'une manière quelconque dans l'œil, est ce que nous nommerons l'axe du pinceau, ou, avec M. Sturm, *le rayon central de ce pinceau.*

157. Cela posé, les indices du cristallin uvx diminuant de valeur en approchant d'un certain centre, A C étant l'axe optique et D F G, gfd, l'intersection du plan de la figure et de la rétine, soit P un point rayonnant blanc placé en avant de l'œil et en dehors de l'axe optique. Il enverra un pinceau rouge R R′ F et un pinceau violet V V′ F sur la rétine; les rayons de ces pinceaux décriront des lignes courbes dans le cristallin, et ces lignes auront une courbure d'autant plus forte qu'elles rencontreront plus de lobes, ou, pour parler sans faire aucune supposition sur l'existence ou la non-existence de lobes apparents, ils seront courbés de plus en plus à mesure que, s'approchant plus du centre, ils rencontreront un plus grand nombre de surfaces dont les points aient un même indice. D'où l'on voit que si les indices décroissent convenablement, à part toute idée d'homogénéité ou de non-homogénéité du corps vitré, les axes du rouge ou du violet, ainsi que les axes des autres pinceaux colorés, se trouveront achromatisés sur un point F de la rétine.

Fig. 6.

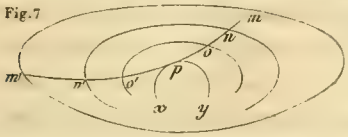


158. Et si l'on fait attention que la décroissance des indices peut être différente en avant et en arrière du centre, à droite et à gauche de ce centre; que sa position, à lui-même, peut être choisie d'une infinité de manières, et que le choix des surfaces antérieures et postérieures des points de même indice peut se faire, depuis la cornée jusqu'à la rétine inclusivement, avec des conditions, non pas absolument arbitraires, mais aussi arbitraires que le comportent les différences de forme des yeux humains, on verra que la disposition du cristallin se prête, quant à l'image de la rétine, à des conditions extrêmement diversifiées, sans que, pour chaque point de l'image, l'achromatisme soit en défaut.

Ainsi se résout forcément, suivant nous, cette question si difficile de l'image achromatique des objets vus obliquement.

159. Nous devons faire observer, toutefois, que, chaque lobe présentant nécessairement une petite zone suivant laquelle les rayons d'une très-grande incidence ne pénètrent pas et sont réfléchis, il semble en résulter que tout rayon $m\,n\,o\,p\,o'\,n'\,m'$ courbé dans le cristallin, étant, en un de ses points p, tangent à un lobe $x\,p\,y$, il aura du être réfléchi par le lobe précédent et n'arrivera pas au foyer qui doit lui correspondre sur la rétine. Mais il faut remarquer que les couches du cristallin peuvent être supposées infiniment minces; que les valeurs de l, pour chaque réfraction, diffèrent alors infiniment peu de l'unité; que, par conséquent, chaque rayon $m\,n$, à sa rencontre en n avec un lobe, se brise sans s'infléchir autrement que d'une quantité infiniment petite; qu'il arrive ainsi au lobe $x\,p\,y$ et le rencontre en p sous un angle infiniment petit; que là il se réfléchit; que l'angle $o\,p\,o'$ formé en p est égal à deux droits diminués seulement d'une quantité infiniment petite, et que, ensuite, les réfractions en o', n', m', continuent de n'opérer en chaque point que des infléchissements infiniment petits. C'est-à-dire qu'un rayon quelconque $m\,n\,o\,p\,o'\,n'\,m'$, traversant le cristallin, n'éprouve en chacun de ses points qu'un infléchissement infiniment petit dû, savoir : pour l'un de ses points p à la réflexion, et pour les autres points m, n, o, o', n', m', à la réfraction. Chaque rayon sera donc, comme nous l'avons dit (157), d'autant plus courbe qu'il passera plus près du centre; de sorte que, suivant ce qu'on voit sur la figure 6, le cristallin rapprochera les directions de l'axe rouge et de l'axe violet, de manière que, avec des décroissements d'indices convenables, ils s'achromatiseront sur la rétine.

Fig. 7



159 *bis*. Il est aisé de voir que si, contrairement à ces idées nouvelles, le cristallin augmentait de densité en approchant du centre, les rayons rouges et violets, au lieu de se rapprocher en

arrivant au corps vitré, seraient courbés dans le sens opposé à celui qu'indique la figure 6, ce qui les écarterait et donnerait une frange irisée considérable, nuisible à une bonne vision. Cela, évidemment, n'est point admissible. De plus, les images seraient projetées plus près du centre de la rétine, ce qui restreindrait le tableau des objets vus, lequel, comme nous l'avons dit ailleurs [255], s'étend sur tout l'hémisphère postérieur du globe, ce qui s'accorde parfaitement avec les courbures RR′, VV′, qui produisent l'achromatisme des rayons dispersés. Nous reviendrons plus loin sur ces considérations. (Voyez le manuscrit de notre XIV^e^ Mémoire sur la *Théorie de l'œil*, chap. I.)

CHAPITRE III.

TABLEAUX RELATIFS AUX RÉFRACTIONS DE L'OEIL CONSTITUÉ COMME ON LE SUPPOSE DANS LA NOUVELLE THÉORIE.

160. TABLEAU A (178). Ce tableau a pour objet de constater par un exemple de calcul la possibilité d'obtenir un achromatisme à peu près satisfaisant pour le point rayonnant situé à l'infini sur l'axe optique, le cristallin étant composé de couches de moins en moins denses en approchant du centre de ses lobes. Nous avons admis pour le cristallin quatre couches et un noyau.

La *Théorie de l'œil*, aux pages 364 et 365, présente les modèles des calculs que nous avons eu à faire et dont le tableau A donne le résumé. Les rayons de courbure des couches cristallines sont calculés comme au n° 370 du même ouvrage, et les n^os^ 68, 74, 390 et 418 font connaître les moyens que nous avons employés pour déduire les indices du violet de ceux du rouge.

161. Quant à ces derniers, le choix a été fait sous l'inspiration de ces idées, 1° que, dans le vivant, la cornée étant humectée, d'un côté par les larmes et de l'autre côté par l'humeur aqueuse, elle est sans doute plus dense que dans le mort. En conséquence, nous

avons pris pour son indice (rayon rouge) le chiffre 1.50, qui est très-élevé, mais qui réalise l'avantage, souvent attribué à la cornée, d'agir avec une grande énergie; 2° que le cristallin, dans le vivant, a des indices plus forts que ceux qu'on a trouvés en opérant sur le cadavre; 3° que, pour le corps vitré, les indices obtenus étant ceux du liquide renfermé dans les cellules de la membrane hyaloïde, nous devions prendre ce chiffre plus élevé que celui qui répond aux recherches des physiciens.

Il ne s'agit, d'ailleurs, que d'un exemple de calcul; nous ne prétendons pas justifier les données que nous avons admises; mais, comme il ne nous a pas fallu moins de 7 à 800 multiplications pour arriver aux résultats obtenus, nous croyons qu'ils méritent d'être insérés dans ce Mémoire, afin qu'ils épargnent un peu de peine à ceux qui, avec de meilleures données, voudront un jour perfectionner notre travail.

162. Les distances focales du rouge, après chaque réfraction, étant représentées par f, et celles du violet par F, on voit que leurs différences f — F passent du chiffre 0.843, donné par la surface S_2, au chiffre 0.236 donné par la surface S_{12}. Et il est aisé de voir que si de tels calculs n'étaient pas très-fatigants, il nous aurait été facile, en modifiant seulement les rayons de courbure et les épaisseurs des couches, sans sortir des limites à peu près admissibles, d'arriver à la coïncidence exacte des foyers du rouge et du violet.

163. Tableau B (179). Nous avons parlé précédemment [511 et 513] des déformations que le cristallin éprouve nécessairement quand le globe oculaire s'allonge; mais nous attachions peu d'importance à ces déformations lorsque, d'après les idées reçues, croyant ce corps plus dur à l'intérieur qu'à l'extérieur, nous le supposions doué d'une résistance notable contre les pressions exercées à son équateur. Il n'en n'est plus ainsi actuellement. Et puisque le cristallin a plus de mollesse dans ses parties centrales que dans ses parties extérieures, il peut, quand le globe s'allonge, prendre aussi une figure allongée.

164. Admettons que son allongement, dans le sens de l'axe optique, soit d'un vingt-cinquième, et que, pour chaque lobe, les sections elliptiques méridiennes se changent en sections équivalentes d'une figure encore elliptique. Pour un lobe quelconque, désignons par a et b, les deux demi-axes, par r le rayon de courbure de la section correspondante à l'œil raccourci, et représentons les grandeurs analogues relatives à l'œil allongé, par les majuscules A, B, R. La surface de l'ellipse dont a et b sont les demi-axes étant $4\pi ab$, on aura

$$4\pi ab = 4\pi AB, \text{ ou } ab = AB.$$

Si donc l'allongement dans le sens de l'axe est d'un vingt-cinquième, il faudra qu'on ait :

$$B = \frac{26}{25}b, \text{ ce qui donne } A = \frac{25}{26}a.$$

Mais,

$$R = \frac{A^2}{B} = \left(\frac{25}{26}\right)^2 \frac{a^2}{b} = \left(\frac{25}{26}\right)^3 r;$$

donc finalement $R = 0.889\ r$; c'est-à-dire que chaque rayon de courbure de l'œil allongé est égal à l'ancien rayon multiplié par le coefficient de réduction 0.889 [1].

165. Cela posé, si l'on admet, 1° que les rayons de courbure r_1, r_2 des surfaces S_1, S_2 de la cornée, diminuent chacun d'un trentième, ces rayons se changeront en 6.47 et 5.184 au lieu de 6.7 et 5.4; 2° que les épaisseurs g_1 et g_2 passent des chiffres 1.10 et 2.80 aux chiffres 1.14 et 2.89 par un allongement d'un trentième; 3° que les épaisseurs des couches cristallines soient toutes augmentées, comme nous l'avons dit plus haut, d'un vingt-cinquième, on aura, au lieu des valeurs de f, pour le rouge, consignées au tableau A (178) et rapportées dans la 6e colonne du

[1] On voit que l'ellipse nous sert ici à constater une propriété fort importante, c'est que, pour de très-petites déformations du cristallin, les rayons de courbure aux sommets des petits axes, lesquels, ici, sont supposés sur l'axe optique, décroissent de valeur dans le rapport considérable des cubes du quotient de l'épaisseur première de ce corps à son épaisseur nouvelle.

tableau B (179), on aura, disons-nous, les valeurs indiquées en regard des précédentes dans la 11e colonne du même tableau B.

166. Or, nous prenons ces valeurs de f de la 6e colonne pour celles du vert dans l'œil raccourci; les chiffres de la 11e sont les valeurs de F dans l'œil allongé, et la 6e colonne nous donne, pour chaque réfraction, les différences des distances focales à l'œil raccourci et à l'œil allongé. D'où l'on voit que ces différences, portées à 1.513 par la seconde réfraction, se modifient ensuite et que, après la douzième réfraction, la valeur de F—f n'est plus que de 0.043.

Il suit de là que si l'épaisseur du corps vitré était de 13.123 dans l'œil raccourci, l'image du point rayonnant placé à l'infini se trouverait sur la rétine, et que, si cette épaisseur s'augmentait de 0.043 quand l'œil s'allonge pour la vision de l'objet éloigné seulement de 250 millimètres, l'image se trouverait encore sur la rétine. Ainsi, avec des diminutions d'un trentième pour les rayons r_1 et r_2; avec des allongements d'un trentième pour g_1 et g_2; avec des épaississements des diverses couches du cristallin d'un vingt-cinquième, et un allongement de l'œil de $0.04 + 0.19 + 0.16 + 0.043 = 0.433$, au plus, la vision se maintiendrait nette à toutes les distances depuis 250 millimètres jusqu'à l'infini.

167. Si maintenant on se reporte à nos recherches précédentes sur la possibilité d'obtenir la vision nette dans le même intervalle, au moyen des déformations de l'œil [166-174, 287, 350, 401, 483 *bis*, 540, 750 et 751], on verra qu'il nous fallait trois modifications : 1° un vingt-cinquième de diminution du rayon de la cornée; 2° un déplacement du cristallin d'arrière en avant de 0.200 à 0.300; 3° un allongement du globe de 0.308 à 0.324 [606] : d'où il résulte que nous sommes actuellement dans un système d'idées plus acceptable à beaucoup d'égards.

168. En effet, la vision se portant de l'infini à la distance de 250 millimètres, les circonstances que nous avons mentionnées au n° 751 et ailleurs se produisent; le globe est resserré surtout à sa partie antérieure; sa partie postérieure résiste par la grande

épaisseur du fond de la sclérotique; le cristallin est, en conséquence, fortement pressé à son équateur; la rigidité des procès ciliaires aide cette pression, et en admettant que l'épaisseur du cristallin s'augmente d'un vingt-cinquième, on a, d'après le tableau B, tout ce qu'il faut pour que le foyer se maintienne sur la rétine. Ainsi, l'hypothèse d'un cristallin moins dense à l'intérieur qu'à l'extérieur, par le fait des calculs, ne présente rien qui répugne, et, au contraire, devient fort admissible : on peut dire même qu'elle est à peu près justifiée.

168 *bis.* Cette hypothèse est d'ailleurs parfaitement d'accord avec les observations de Th. Young, consignées dans les Transactions philosophiques (année 1793), et d'où il résulte que l'organisation du cristallin se prête éminemment bien aux changements de forme de ce corps. Les idées de Young, quant à l'existence des tendons qu'il admettait et quant à la muscularité des fibres, ont, il est vrai, été repoussées (voy. le Mémoire de Hosack, *Trans. phil.*, année 1794, et le Mémoire de Dulong, *Journal des Savants*, année 1818); mais elles subsistent quant aux dispositions des fibres.

CHAPITRE IV.

SUR LA CONFIRMATION RÉCIPROQUE D'UNE EXPÉRIENCE DE M. DE HALDAT ET DE NOTRE THÉORIE; OBSERVATION QUI NOUS EST PROPRE SUR UNE AUTRE EXPÉRIENCE.

169. Ce Mémoire ayant été envoyé à M. Faye dans l'automne de 1850, il a bien voulu appeler notre attention sur les expériences par lesquelles M. de Haldat a constaté que le cristallin, employé comme lentille instrumentale, donne des images dans toutes les directions et pour tous les éloignements, plus nettes et mieux achromatisées que celles des verres lenticulaires les plus habilement construits. On va voir que l'explication de ce fait important découle de ce qui précède.

170. Les expériences de M. de Haldat sont consignées dans plusieurs de ses ouvrages et notamment dans l'*Optique oculaire*, qu'il a publiée en 1849. Il avait eu la bonté de nous envoyer cet ouvrage; mais, occupé d'autres choses et malgré l'intérêt que le sujet nous présentait, nous n'avions pas donné à son expérience sur le cristallin l'attention qu'elle mérite et qui avait excité la surprise de nos savants les plus recommandables. L'un d'eux, après avoir loué cette expérience, dit qu'elle semble être *en opposition avec les lois de la dioptrique* [753], et un autre, non moins célèbre comme géomètre que comme physicien, en la vérifiant s'est exprimé ainsi : *Je le vois, mais je ne le crois pas* (*Optique oculaire*, p. 51). C'est que les faits d'optique qui ne sont pas sanctionnés par la géométrie ou le calcul n'imposent pas une foi entière, de même que les théories qui ne paraissent pas s'accorder avec l'expérience demeurent à peu près sans valeur.

171. Ici l'expérience et la théorie se justifient mutuellement; car M. de Haldat est parvenu à son résultat par le moyen d'instruments dans lesquels il substituait un cristallin à une lentille, tandis que nous sommes arrivé par des considérations purement scientifiques à prouver que la lentille cristalline, quant à son objet dans la vision, est plus parfaite qu'aucune des lentilles de nos opticiens.

172. Il peut toutefois paraître surprenant que la lentille cristalline, calculée pour le rôle qu'elle joue dans l'intérieur de l'œil, convienne aussi, extraite du globe oculaire, comme lentille instrumentale. Mais, la surprise diminue pour peu qu'on s'arrête à cette observation : que si, dans les expériences de M. de Haldat, le cristallin est précédé par de l'air et suivi par de l'air, il est, dans le vivant, précédé par des milieux denses, la cornée et l'humeur aqueuse, et suivi par un autre milieu dense, l'humeur vitrée, ce qui rapproche les conditions dans lesquelles il se trouve pour les deux cas dont il s'agit.

173. Afin de juger mieux de la valeur de cette observation, nous avons calculé, pour le rouge et le violet, dans le tableau C (180), les réfractions du cristallin employé dans les tableaux A

et B des nos 178 et 179. Les chiffres que nous avons obtenus font voir que l'écartement des deux foyers, de la première à la dernière réfraction, passe du chiffre 0.709 au chiffre 0.244, l'éloignement du point rayonnant étant de 250 millimètres. Or, pour le même cristallin, placé dans l'œil, l'écartement est réduit (162) de 0.843 à 0.236 : c'est-à-dire que, par l'un et par l'autre de ces deux calculs, il ne l'est pas tout à fait assez. Mais il est aisé de voir que si l'on modifiait les rayons de courbure et les épaisseurs des couches du cristallin afin d'obtenir l'achromatisme complet dans le tableau A, on approcherait beaucoup de l'avoir exact dans le tableau C, d_1 étant égal à 250.

174. Il serait, d'ailleurs, très-facile, pourvu qu'on ne craignît pas de se jeter dans des calculs de quelques jours, de diminuer et de rendre nulle la différence 0.244 (tableau C, n° 180), si l'on faisait varier, seulement de quelques dixièmes de leurs valeurs respectives, les rayons de courbure négatifs et l'épaisseur 0.3 des couches postérieures, sans changer rien aux calculs des cinq premières réfractions. Et l'on remarquera que ce travail, qui ne serait pas dépourvu d'intérêt, donnerait, pour le tableau A, une modification évidemment satisfaisante.

175. Si l'on suppose que l'on ait pris la peine de faire les calculs dont il s'agit pour le cristallin employé comme lentille, et si l'on fait attention aux chiffres que nous avons placés au bas du tableau C, on sera conduit à une remarque importante : c'est que, pour les valeurs ∞, 400, 350, etc., de d_1, les valeurs de f_2 et F_2 relatives au rouge et au violet, présentent des différences 0.596, 0.600, 0.683, etc., qui, notamment pour 350, 300 et 250, sont presque égales entre elles. Or, il s'ensuit que si l'achromatisme complet a lieu, par exemple, pour $d_1 = 300$, il aura lieu à très-peu près pour $d_1 = 350$ et $d_1 = 250$, et que, même, il ne sera pas très-sensiblement altéré pour des éloignements beaucoup plus grands. C'est justement ce que l'expérience de M. de Haldat a constaté [752]. Cette expérience, comme on voit, est complétement *d'accord avec les lois de la dioptrique* (170).

176. Le mécanisme d'où elle résulte étant maintenant bien connu, il serait désirable que l'art pût l'utiliser et nous fournir des lentilles qui imitassent les cristallins des animaux. Il n'est pas présumable que jamais cet avantage s'obtienne. Mais l'accord de la théorie et de la pratique sur l'expérience du vénérable professeur de Nancy aura du moins pour résultat de donner à notre nouvelle théorie de la vision un caractère de vérité qui n'échappera pas aux amis éclairés de la science.

On verra par les Mémoires suivants que cette théorie donne la clef de beaucoup de faits d'une grande importance pour l'avancement de la physiologie.

177. Observation *relative aux expériences que nous avons faites sur des yeux de lapin albinos.* — Les yeux dont il s'agit, au bout de trois ou quatre heures d'extraction, sont extrêmement flasques, et, de quelque façon qu'on les place, ils sont toujours très-manifestement déformés. Cependant, malgré les déformations que leur propre poids leur fait subir, et malgré celles qu'on leur impose en pressant la sclérotique jusqu'à un certain point, d'un côté ou d'un autre, une lumière placée, dans l'appartement où l'on opère, à plus de six ou huit centimètres du globe, présente toujours une image qui, vue par le moyen d'une loupe, est d'une admirable netteté. Il y a plus, c'est que vingt-quatre ou trente-six heures après la mort, quand l'œil a perdu presque toute sa consistance, les mêmes faits se remarquent encore.

La connexion de cette expérience et de celle de M. de Haldat est manifeste; mais nous nous bornons à cette mention et quand, au moyen des yeux cataractés, nous nous serons occupé de la non-homogénéité du corps vitré, nous reviendrons sur l'expérience des yeux du lapin albinos et nous rappellerons l'expérience de M. Magendie, d'accord avec les deux précédentes, citée à la page 63 de la première édition de son *Précis de physiologie.*

178. Tableau A (160), relatif à l'achromatisme de l'œil.

MILIEUX.	SURFACES.	COUCHES.	DIMENSIONS.		ROUGE.				VIOLET.				DIFFERENCES
			r	g	i	l	d	f	I	L	D	F	f F.
Cornée.....	S_1		6.7	1.1	1.5	1.5	∞	20.100	1.52	1.52	∞	19.585	+ 0.515
Hum. aqueuse.	S_2		5.4	2.7	1.331	0.887	− 19.000	27.979	1.344	0.884	— 18.485	27.136	+ 0.843
Cristallin (couches et noyau).	S_3	1	7.5	0.5	1.48	1.112	— 25.279	20.380	1.499	1.115	— 24.436	19.841	+ 0.539
	S_4	2	6.	0.5	1.474	0.996	− 19.880	20.067	1.493	0.996	— 19.341	19.544	+ 0.523
	S_5	3	4.5	0.5	1.470	0.997	— 19.567	19.732	1.488	0.997	— 19.044	19.231	+ 0.501
	S_6	4	3.	0.5	1.467	0.998	— 19.232	19.481	1.485	0.998	— 18.731	18.868	+ 0.613
	S_7	n	1.5	0.8	1.466	0.999	— 18.981	18.987	1.484	0.999	— 18.368	18.519	+ 0.468
	S_8	4	— 1.	0.3	1.467	1.001	— 18.187	18.519	1.485	1.001	— 17.719	18.182	+ 0.337
	S_9	3	— 2.	0.3	1.470	1.002	— 18.219	18.519	1.488	1.002	— 17.882	18.182	+ 0.337
	S_{10}	2	— 3.	0.3	1.474	1.003	18.219	18.634	1.493	1.003	— 17.882	18.193	+ 0.441
	S_{11}	1	— 4.	0.3	1.48	1.004	18.334	18.779	1.499	1.004	− 17.993	18.423	+ 0.356
Hum. vitrée..	S_{12}		— 5.		1.362	0.920	18.479	13.123	1.377	0.919	− 18.133	12.887	+ 0.236

179. Tableau B (163), relatif aux déformations de l'œil.

SURFACES.	VALEURS de l.	ŒIL RACCOURCI.				ŒIL ALLONGÉ.				VALEURS de F — f.
		r	d	f	g	R	D	F	G	
S_1	1.5	6.7	∞	20.100	1.1	6.48	250.000	20.506	1.14	+ 0.406
S_2	0.887	5.4	— 19.000	27.979	2.7	5.22	— 19.366	29.492	2.89	+ 1.513
S_3	1.112	7.5	— 25.279	20.380	0.5	6.67	— 26.602	20.460	0.52	+ 0.080
S_4	0.996	6.	— 19.880	20.067	0.5	5.33	— 19.940	20.190	0.52	+ 0.123
S_5	0.997	4.5	— 19.567	19.732	0.5	4.	— 19.670	19.900	0.52	+ 0.168
S_6	0.998	3.	— 19.232	19.481	0.5	2.67	— 19.380	19.632	0.52	+ 0.151
S_7	0.999	1.5	— 18.981	18.987	0.8	1.33	— 19.112	19.275	0.832	+ 0.288
S_8	1.001	— 1.	— 18.187	18.519	0.3	— 0.89	— 18.443	18.936	0.312	+ 0.417
S_9	1.002	— 2.	18.219	18.519	0.3	— 1.78	— 18.624	19.140	0.312	+ 0.621
S_{10}	1.003	— 3.	— 18.219	18.634	0.3	— 2.67	— 18.818	19.348	0.312	+ 0.604
S_{11}	1.004	— 4.	— 18.334	18.779	0.3	— 3.56	— 19.036	19.560	0.312	+ 0.781
S_{12}	0.920	— 5.	— 18.479	13.123	13.123	— 4.45	— 19.248	13.166	13.166	+ 0.043
								Longueur de l'œil allongé...	21.356	
			Longueur de l'œil raccourci.....		20.923	.....			20.923	
						Différence (166), égale à 0.04 + 0.19 + 0.16 + 0.043 =			0.433	

180. Tableau C (173), relatif au cristallin employé comme lentille instrumentale.

Couches et milieux.	l	r	q	Rouge. d	Rouge. f	Violet. D	Violet. F	Différences f F.
1re	1.48	7.5	0.5	250.000	24.671	250.000	23.962	+ 0.709
2e	0.996	6.	0.5	— 24.171	24.490	— 23.462	23.715	+ 0.775
3e	0.997	4.5	0.5	— 23.990	24.304	— 23.215	23.560	+ 0.764
4e	0.998	3.	0.5	— 23.824	24.194	— 23.060	23.438	+ 0.756
Noyau	0.999	1.5	0.8	— 23.691	24.194	— 22.938	23.438	+ 0.756
4e	1.001	— 1.	0.3	— 23.394	23.810	— 22.638	23.256	+ 0.554
3e	1.002	— 2.	0.3	— 23.510	24.096	— 22.956	23.529	+ 0.567
2e	1.003	— 3.	0.3	— 23.796	24.390	— 23.229	23.810	+ 0.580
1re	1.004	— 4.	0.3	— 24.090	24.845	— 23.510	24.242	+ 0.603
Air	0.676	— 5.		— 25.545	6.402	— 23.942	6.158	+ 0.244

Pour les valeurs de d égales à	∞	400	350	300	250	150	100
On trouve pour f (rouge)	23.125	24.038	24.194	24.430	24.671	25.773	27.372
On trouve pour F (violet)	22.529	23.438	23.511	23.734	23.962	25.	26.502
Différences (f — F)	+ 0.596	+ 0.600	+ 0.683	+ 0.696	+ 0.709	+ 0.773	+ 0.870

QUATRIÈME MÉMOIRE.

SUR LES YEUX DES CATARACTÉS, QUANT AU CALCUL DES RÉFRACTIONS DANS LE VIVANT;

SUR UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DE L'ŒIL, CONSIDÉRÉ DANS SES PROPORTIONS, ET SUR L'ANATOMIE COMPARÉE DE CET ORGANE.

CHAPITRE PREMIER.

IDÉE GÉNÉRALE DES CALCULS QUI SUIVENT.

181. On sait que les personnes opérées de la cataracte avec un plein succès lisent quelquefois, un mois après l'opération, au moyen de verres convexes d'un numéro ordinairement compris entre 2 et 4 : c'est-à-dire avec des verres qui ont de deux à quatre pouces de foyer. Or, on ne peut guère supposer que dans le court espace de quinze jours, d'un mois ou de deux mois, le cristallin se trouve remplacé dans le globe oculaire par autre chose que de l'humeur aqueuse, laquelle, comme on l'a reconnu, se reproduit avec la plus grande facilité [5]. Donc l'œil cataracté avec lequel on lit, au moyen d'un verre n° 3, ou à peu près, est un œil que l'on peut considérer, sans grande erreur, comme composé de trois milieux seulement : 1° la cornée; 2° une humeur aqueuse occupant, avec sa place ordinaire, celle que la disparition du cristallin a laissée libre; 3° le corps vitré.

Il est clair qu'un œil si simple convient beaucoup pour approfondir quelques-unes des difficultés que rencontre l'explication de la vision. On ne s'est malheureusement pas assez occupé de recueillir des faits sur le degré de bonté de la vue des personnes

cataractées; cependant, ceux que nous allons citer vont fournir, quant aux indices des milieux de l'œil *dans le vivant*, des résultats d'un certain intérêt.

182. Nous avons appliqué nos calculs à un œil dont les proportions, ce nous semble, ne soulèvent aucune objection, ni pour le globe raccourci, ni pour le globe allongé; mais qui peut paraître trop petit, son diamètre, jusqu'à la sclérotique exclusivement, n'étant que de 19 millimètres 8 dixièmes. On verra plus loin que l'on peut augmenter ou diminuer ces dimensions dans une proportion quelconque, sans qu'il y ait rien à changer à nos calculs, à nos raisonnements et à nos indices (202).

183. De même que, dans les lentilles achromatiques, on emploie des verres d'un faible et d'un grand pouvoir dispersif, de même nous aurons besoin dans ce qui suit de prendre les indices de manière qu'ils écartent plus ou moins les foyers des rayons extrêmes, rouge et violet, du spectre. Lorsque nous voudrons une faible dispersion, nous supposerons que l'indice du violet se déduit de celui du rouge, comme pour l'eau [66], en multipliant ce dernier par 1.01. Et, lorsque nous aurons besoin d'une plus grande puissance dispersive, nous admettrons un multiplicateur plus grand que 1.01, mais toujours moindre que le chiffre 1.057 relatif à la potasse [66].

184. Nous continuerons d'ailleurs de désigner par les lettres *i, l, r, d*, etc., les indices, rapports, rayons, etc., employés dans nos calculs antérieurs, les minuscules s'appliquant, soit au rouge, soit à l'œil raccourci, et les majuscules au violet et à l'œil allongé. S_1, S_2, S_3, etc., désigneront toujours, dans leur ordre naturel, les surfaces réfringentes de cet organe. Celles du verre lenticulaire, que nous supposerons placé en avant d'un œil cataracté, seront désignées par σ_1 et σ_2.

CHAPITRE II.

DE LA VISION CHEZ LES CATARACTÉS.

185. Nous supposons que le sujet cataracté dont nous nous occupons emploie pour lire un verre de crown-glass (n° 6, page 31 de la *Théorie de l'œil*), dont les indices sont, pour le rouge 1.524, et pour le violet 1.545. Nous donnons à ce verre 6 millimètres d'épaisseur et nous supposons les rayons de ses deux surfaces égaux à 50 millimètres, ce qui porte les distances focales des rayons parallèles normaux au plan du cercle commun à ces deux surfaces, pour le rouge à 46.685, et pour le violet à 44.843, en moyenne 45.764 : c'est-à-dire que le foyer de ce verre est d'environ 1 pouce 8 lignes, ou qu'il est du n° 1 et deux tiers. Nous aimerions mieux avoir employé un verre d'un foyer de 2 pouces; mais nos calculs tels qu'ils sont peuvent servir à l'exposé de nos idées.

186. En calculant les distances focales du rouge et du violet, pour un point rayonnant éloigné de la surface sphérique antérieure de 250 millimètres, on les trouve de 58.275 et 55.556 (voy. le tableau D, n° 229). Ainsi le verre dont il s'agit étant placé au devant de l'œil, à 7 millimètres de la cornée, comme dans le cas à peu près ordinaire de lunettes appuyées sur la racine du nez par leurs membrures, on a $d = -51.475$ et $D = -48.556$, pour la réfraction qui s'opère à l'entrée des rayons dans le globe.

187. Cela posé, les physiciens et les physiologistes ayant trouvé pour les indices de la cornée, de l'humeur aqueuse et du corps vitré, des nombres à peu près égaux à l'indice de l'eau [61 et 68], supposons, pour un premier essai de calcul, et pour être dans cet essai d'accord avec les auteurs, qu'il n'y ait dans l'œil cataracté que des substances d'une puissance de réfraction égale sensiblement à celle de l'eau, de sorte que l'on ait, à l'entrée des rayons dans la cornée, $i = 1.331$ et $I = 1.344$.

Le rayon du devant de l'œil étant dans tout ce qui va suivre de 6.8, on aura, $f = 19.540$; $F = 18.889$ et $f - F = 0.651$. C'est à-dire que le point rayonnant qui, par une inadvertance sans inconvénient que nous avons commise, est écarté de la cornée de 263 millimètres, et n'en devrait être éloigné que de 250, ce point, d'ailleurs, étant supposé à la distance de la vision distincte, donne, pour l'œil armé du verre n° 1 et deux tiers, des foyers rouge et violet écartés de 0.651. Or, selon nous, ce résultat n'est pas admissible, vu que la vision serait trop imparfaite.

188. En vain on dirait, avec d'Alembert [234], que l'œil peut s'allonger de manière à placer la rétine à une même distance entre les deux foyers, et qu'alors les cercles respectifs rouge et violet, orange et indigo, jaune et bleu se superposant, on a pour image un cercle vert, plus intense à son centre que dans son pourtour, et qu'une telle image donne la sensation de l'objet. Non-seulement ce que nous avons dit contre cette explication [234] nous paraît la repousser; mais chacun reconnaîtra que la lumière distribuée sur l'image circulaire étant soustraite à la masse lumineuse qui, utilisée totalement, donnerait de l'éclat au centre, on ne peut avoir dans le cas dont il s'agit, ni sous le rapport de la couleur, ni sous celui de la vivacité des teintes, des images comme celles qui sont nécessaires et que nous présente, *même après la mort,* l'œil du lapin albinos [77].

Au surplus, il n'y a pas lieu de s'arrêter davantage à l'explication de d'Alembert; car celle qui suit paraît être, à tous égards, beaucoup plus satisfaisante.

189. Elle est due à l'idée toute simple d'obtenir un achromatisme complet; ce qui est rationnel, ce qui, dans l'état où sont les choses au moyen des mémoires précédents, est devenu facile et ce qui va nous conduire bientôt, en abandonnant les hypothèses admises au n° 186, à la connaissance de faits importants relatifs à l'œil normal.

Les données et les résultats de nos calculs sont consignés, en ce qui concerne l'œil cataracté, dans l'article 1^er^ du tableau D (229).

Nous examinerons plus loin les observations qui peuvent être faites sur les données; ici nous devons nous occuper du moyen de calcul sur lequel se fonde notre solution.

190. L'œil cataracté devenant une lentille à trois verres, nous avons pris, pour les deux milieux antérieurs, pour la cornée et pour l'humeur aqueuse, des pouvoirs dispersifs très-restreints. Ainsi les indices du violet relatifs à ces trois milieux sont égaux à ceux du rouge, multipliés par le chiffre 1.01 (183).

Les valeurs de d, à l'entrée des rayons dans le corps vitré, se trouvent d'après cela (229), pour le rouge de 11.564, et pour le violet, de 10.898. Or, les foyers devant se trouver sur le fond de l'œil, les f doivent être égaux à 12.4, ce qui nous conduit, au moyen de la formule

$$l = \frac{1 + \frac{r}{d}}{1 - \frac{r}{f}},$$

à ces valeurs

$$l = 1.018 \text{ et } \mathrm{L} = 1.030;$$

d'où l'on tire, pour le corps vitré, les indices

$$i = 1.344 \text{ et } \mathrm{I} = 1.373,$$

qui donnent un achromatisme parfait.

191. La première question à se faire, quant à ces résultats, c'est celle de savoir si le pouvoir dispersif que supposent les chiffres 1.344 et 1.373 sont en harmonie avec les faits observés par les physiciens, et l'on voit tout de suite que les indices obtenus n'ont rien de répugnant; car, si le corps vitré dispersait les couleurs comme les disperse la potasse [68], on aurait l'indice I du violet égal à $1.344 \times 1.057 = 1.422$, chiffre beaucoup plus fort que le chiffre 1.376 auquel nous parvenons.

192. De là, et sans aller plus loin, vu que les indices du blanc, $\frac{1}{2}(1.33 + 1.343) = 1.337$ et $\frac{1}{2}(1.32 + 1.333) =$

1.327, diffèrent peu des indices admis [61], on doit conclure qu'une vision pure, pour l'œil cataracté appliqué à lire, par exemple, et armé d'un verre convenable, est un genre de vision qui s'explique parfaitement.

193. Et il sera bon de remarquer que si nous avions fait nos calculs pour le cas d'un verre dont le foyer eût été plus long que le foyer d'un pouce deux tiers (185), ce qui aurait été plus conforme aux demandes faites le plus communément aux opticiens par les cataractés, nous aurions trouvé, pour l'indice I, un chiffre moins élevé encore que le chiffre obtenu 1.373.

CHAPITRE III.

SUR LA DÉTERMINATION, DÉDUITE DE L'ŒIL CATARACTÉ, DES INDICES DE L'ŒIL NORMAL DANS LE VIVANT.

194. Supposons, ce qui est entièrement conforme aux idées reçues, qu'un bon œil, atteint de la cataracte, ne reçoive de cette maladie aucun autre défaut que celui de l'opacité du cristallin; et, puisque nous connaissons maintenant les indices de la cornée, de l'humeur aqueuse et du corps vitré, pour un exemple bien calculé d'œil cataracté, remontons de cet exemple à celui de l'œil sain, avant la cataracte.

Les calculs à faire sont indiqués à l'article 2 du tableau D (229). Ils sont, suivant ce qui précède, la conséquence de cette idée, que le corps vitré, avec les mêmes indices du rouge et du violet, doit faire coïncider sur la rétine les foyers de ces deux couleurs, soit que le cristallin ait été extrait de l'œil, soit qu'il y soit renfermé avec les conditions de transparence et de densité que la maladie n'a point altérées.

195. Cela posé, supposons que l'indice de la capsule, pour le rouge, soit de 1.45 et celui du violet de $1.465 = 1.45 \times 1.01$. On aura, au passage de la partie postérieure de la capsule dans le corps vitré,

$$l = \frac{1.344}{1.45} = 0.927 \text{ et } L = \frac{1.373}{1.465} = 0.937;$$

puisque les indices de ce corps ont été trouvés (191), pour l'œil cataracté, de 1.344 et 1.373. De là on tire

$$d = \frac{r}{l\left(1 - \frac{r}{f}\right) - 1} = -16.729 \text{ et } D = -15.917,$$

en mettant dans la formule, au lieu de r et f, les valeurs — 4.5 et 12.2.

Avec ces valeurs de d et D on obtient donc la coïncidence exacte des foyers du rouge et du violet sur la rétine, dans l'œil pourvu de son cristallin : c'est-à-dire l'achromatisme complet de l'organe de la vue dans le cas des objets très-éloignés.

196. Mais ce résultat est soumis à une vérification importante. En effet, après la réfraction de la partie antérieure de la capsule, l'épaisseur du cristallin étant de 4 millimètres, on a pour $g = 4$, $f - g = 15.702$; $F - G = 15.186$, nombres qui, pris négativement, seraient les valeurs de d_n et D_n à l'entrée des rayons dans le corps vitré, si le cristallin était homogène. Il faut donc que les réfractions successives des couches de ce corps amènent graduellement les valeurs de $f - g$, 15.702 et 15.186, à donner les valeurs $d_n = -16.729$, $D_n = -15.917$, trouvées plus haut pour la surface antérieure de l'humeur vitrée, surface dont le rayon est égal à — 4.5. Et si cela n'était pas possible, la solution obtenue ne pourrait être admise.

197. Or, on sait que les réfractions des couches allongent ici les distances focales, et que la soustraction de leur épaisseur à chaque réfraction diminue les mêmes distances; d'où il suit évidemment que les chiffres . . . . . 15.702 et 15.186
devront, par les réfractions successives des couches s'augmenter de. 1.027 0.731
pour que, à l'entrée du corps vitré on ait
pour d_n et D_n les valeurs 16.729 15.917

Nos résultats, sous ce rapport, sont donc dans des conditions tout à fait satisfaisantes.

198. Mais les allongements 1.027 et 0.731, en moyenne, pour le blanc, 0.879, sont-ils ce qui convient? Nous n'en savons rien, parce que nous ne connaissons pas la disposition que le cristallin doit présenter, quant aux densités de ses couches, quant à leurs rayons de courbure et quant aux formes de leurs surfaces, pour que ce corps remplisse parfaitement son objet. Tout ce que nous pouvons dire, c'est qu'avec des indices 1.45 et 1.465 = 1.45 × 1.01, convenablement élevés, on aura, au lieu du chiffre d'allongement 0.879 du blanc, le chiffre qu'on voudra.

Ainsi, notre exemple, en ce qu'il y a de connu maintenant sur l'œil, ne fait défaut sous aucun rapport.

199. On peut trouver, cependant, que les chiffres 1.45 et 1.465 sont fort élevés; mais on remarquera, 1° qu'avec des dimensions mieux choisies (assez difficiles à trouver toutefois, du moins au début de ces recherches), ces nombres seraient certainement beaucoup plus faibles; car nous n'avons pas pu, dans notre essai, tomber sur les dimensions justement les plus avantageuses à la vision; 2° que M. Chossat ayant obtenu [371], pour le noyau du cristallin de l'ours, l'indice 1.463, nous sommes dans les limites que l'observation assigne quant à la possibilité d'avoir pour l'œil des substances, autres que des cristaux, dont la puissance de réfraction soit fort élevée.

200. Au surplus, nous reviendrons tout à l'heure (210) sur ce sujet. Mais avant de le quitter nous ferons observer que l'épaisseur du cristallin, selon qu'elle grossit trop ou trop peu la distance occupée par l'humeur aqueuse, après la disparition du cristallin, distance qui est de 6.09 dans l'article 1^er^ du tableau E (230) est un des éléments qui influent le plus sur la détermination des indices 1.344 et 1.373 du corps vitré, et conséquemment sur le plus ou le moins d'élévation des indices 1.45 et 1.465 de la capsule. Maître de nos résultats, sous ce rapport, nous avons tâché de rester, quant à l'épaisseur du cristallin et quant aux indices,

dans des termes acceptables, sans refaire totalement nos calculs, ce qui n'aurait, en définitive, apporté que des changements insignifiants sur nos résultats.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DE L'ŒIL CONSIDÉRÉ DANS SES PROPORTIONS; DIMENSIONS QUE NOUS AVONS ADOPTÉES POUR LES CALCULS PRÉCÉDENTS; RÉFRACTIONS DU CRISTALLIN DE L'ŒIL NORMAL.

201. Imaginons qu'on ait sous les yeux les tableaux, analogues à ceux que nous employons, de toutes les réfractions de l'œil normal pour le rayon entrant dans la cornée suivant la direction de l'axe optique, relatifs au blanc, au rouge et violet. A chaque ligne de ces tableaux correspondrait la condition

$$l = \frac{1 + \frac{r}{d}}{1 - \frac{r}{f}}.$$

Or, cette équation fait voir que si les dimensions de l'œil et en même temps les grandeurs d et f, se doublent, par exemple, ou deviennent moitié moindres, se multiplient ou se divisent par un nombre quelconque entier ou fractionnaire, les rapports $\frac{r}{d}$ et $\frac{r}{f}$ ne changent pas, d'où résulte cette propriété extrêmement remarquable, et sur laquelle nous aurons plus d'une fois à revenir, que les valeurs de l demeurent, dans l'œil modifié d'étendue, ce qu'elles étaient dans l'œil normal donné.

202. Il suit de là que nous pourrions, dans l'article 2 du tableau D (229), augmenter toutes les dimensions d'un cinquième, afin que nos calculs se trouvassent appliqués à un œil d'environ 24 millimètres de diamètre, du devant de la cornée au-devant de la sclérotique, diamètre qui est considéré comme le plus ordinaire chez l'adulte. Cependant nous ne faisons pas de changement au ta-

bleau précité, parce que, au fond, ce serait inutile, et parce que nous ne recommencerons les calculs qu'il exige qu'après avoir acquis les lumières propres à les rendre beaucoup meilleurs.

203. Un point important, pour bien apprécier notre travail, c'est de voir si nos dimensions ne méritent pas quelques reproches graves. Dans ce but nous les mettons en regard les unes des autres dans l'article 3 du tableau E (230). Nous ne nous arrêterons pas à les justifier; il nous semble qu'elles se justifient à peu près d'elles-mêmes, sauf, toutefois, ce qui concerne le cristallin, dont nous allons parler.

204. Nous aurions voulu combler la lacune qui existe, pour l'œil normal (art. 2 du tableau D), entre la partie antérieure de la capsule (surface S_3) et le devant du corps vitré (surface S_n), par la détermination de conditions satisfaisantes pour les lobes du cristallin, et en supposant le nombre de ces lobes, par exemple, de 100, dont chacun aurait eu, pour ses deux couches 0.0394 d'épaisseur. Mais le calcul à faire, avec des tâtonnements plus ou moins heureux, devait être fort long; il n'était pas d'une notable importance, et nous ne l'avons pas entrepris. Nous nous contenterons de montrer ici, par un exemple d'ailleurs inacceptable et grossier où le cristallin, dans sa capsule, est formé d'un seul lobe enveloppant un noyau, que la question, si l'on avait 100 lobes ou plus, serait susceptible, non pas d'avoir une solution, mais d'en avoir une infinité.

205. Avant tout, nous devons avertir que les données de l'article 1^er^ du tableau E, au lieu d'être prises dans l'article 1^er^ du tableau D (rayon rouge), sont celles d'un premier tableau qui, modifié, a donné le tableau D. Ainsi, dans les valeurs suivantes, chaque chiffre de ce dernier tableau est remplacé dans le tableau E par le chiffre placé au-dessous, savoir :

$i_3=1.45$;	$l_3=1.098$;	$r_3=6.6$;	$f_3=19.702$;	$i_n=1.344$;	$l_n=0.927$;	$d_n=16.729$;	$g_n=12.2.$	
par 1.46	1.106	7.2	19.900	1.338	0.916	17.308	12.	

Or, il est aisé de voir que les chiffres de la seconde ligne valent, pour notre objet, tout autant que ceux de la première.

206. Maintenant, nous ferons observer que la capsule, dans ses épaisseurs, dans son indice, et même dans son rayon de courbure, n'est pas forcément liée aux lois, quelles qu'elles soient, qui assujettissent les unes aux autres les couches du cristallin, parce que tous les rayons d'un même pinceau rencontrant sa partie antérieure et sa partie postérieure, son existence avec des conditions qui peuvent lui être particulières, n'empêche pas les rayons de ce pinceau d'arriver au corps vitré soumis à une même loi, comme c'est nécessaire, pourvu cependant, ainsi que nous l'admettons, que les couches cristallines en nombre infini satisfassent à des conditions convenables.

207. D'après cela, nous avons pris les rayons extrêmes 7.18 et 4.48 des lobes du cristallin, sans nous préoccuper d'autre chose que d'obtenir, par la capsule, une membrane mince enfermant de toute part la substance qui forme les lobes. Quant aux rayons intermédiaires 3.59 et 2.24, ils sont respectivement égaux à la moitié des précédents, parce que nous avons supposé, ainsi que dans les tableaux A, B, C, du précédent Mémoire, que les couches ayant des épaisseurs égales en avant du centre, et de même égales aussi, mais différentes, en arrière, les rayons croissaient suivant la plus simple des lois, celle de la proportionnalité du nombre des couches.

208. Le tableau E donnant, 1° quant à la capsule la valeur $f = 19.900$, d'où se tire la valeur $d = -19.860$, pour la première couche cristalline; 2° la valeur -17.308 de d, pour le corps vitré, d'où se tire, pour la partie antérieure de la capsule, $f = 17.308 + 0.02 = 17.328$, et, par la formule $d = \frac{r}{l\left(1-\frac{r}{f}\right)-1}$, le chiffre -16.760 égal à d, puis la valeur 17.230 de f, pour le devant du lobe postérieur au noyau, nous n'avons plus à déterminer que les indices du noyau et du lobe dans lequel il est renfermé, indices qui conduisent aux valeurs de l comprises entre les deux lignes extrêmes des chiffres qui nous occupent.

Nous avons, après quelques essais, adopté l'indice 1.45 pour le lobe qui enveloppe le noyau, parce que cet indice accroît dans une assez bonne proportion la valeur de d de la ligne suivante, en la portant à — 18.612.

209. Enfin, il fallait déterminer l'indice du noyau. En le désignant par x, nous avons eu, pour les troisième et quatrième lignes de notre tableau, les deux équations,

$$f = \frac{3.59 \times 18.612\, x}{(x - 1.45)\, 18.612 + 3.59 \times 1.45};$$

$$17.328 = \frac{-1.45 \times 2.24\, d}{(1.45 - x)\, d + 2.24\, x}.$$

Nous avons éliminé f et d de ces équations en posant $f - g = -d = 1.97 - f$, ce qui nous a conduit à l'équation

$$x^2 - 0.7695\, x - 0.9787 = 0,$$

et finalement nous a donné la valeur $x = 1.446$ de l'indice du noyau.

210. Il est aisé de voir que si nous avions eu 100 lobes au lieu de 2, à part la fatigue des tâtonnements, nous aurions complété notre tableau tout aussi facilement.

Nous croyons, en conséquence, avoir établi que l'œil humain peut être constitué, quant à ses réfractions dans le cristallin, conformément à la théorie exposée dans le Mémoire précédent.

CHAPITRE V.

CONSIDÉRATIONS RELATIVES AUX CALCULS PRÉSENTÉS DANS CE MÉMOIRE, ET À CEUX QUI DEVRONT ÊTRE FAITS ULTÉRIEUREMENT.

211. Un de nos camarades et bons amis, M. Vauvilliers, mort en 1848, inspecteur général des ponts et chaussées, avait été opéré de la cataracte par M. Roux, et l'opération, faite sur les deux yeux, avait parfaitement réussi. Pour lire, pour voir à une moyenne dis-

tance et pour voir très-loin, M. Vauvilliers employait des verres de trois numéros. C'est sur l'exposé de ce qui lui arrivait que nous avons eu l'idée des calculs de ce Mémoire. Si, trop occupé de nos devoirs d'ingénieur, nous n'avions pas dû alors ajourner ces calculs, nous aurions eu de lui, 1° les numéros des trois sortes de lunettes dont il se servait; 2° les éloignements où sa vue opérait le mieux avec ces mêmes lunettes.

Ainsi, au lieu de la donnée d'une lentille du n° 1 et deux tiers (184) pour un éloignement de 263 millimètres (186), nous aurions eu trois données analogues, et notre travail se serait trouvé riche de matériaux tout à fait convenables.

212. Concevons que, muni de tels matériaux, c'est-à-dire connaissant les n^{os} n, n', n'', des verres et les éloignements correspondants e, e', e'', des points vus, nous ayons, comme dans ce qui précède, combiné un œil pour ces trois cas, 1° l'œil raccourci, relatif à n'' et e''; 2° l'œil allongé, relatif à n et e; 3° l'œil moyen, relatif à n' et e', et que nous ayons procédé à l'essai de quelques indices et calculé les autres. Nos résultats ne se seraient pas tout d'abord trouvés satisfaisants; nous aurions modifié les chiffres de l'œil (dimensions et indices) qui nous auraient paru les plus défectueux, et à force de persévérance et de tâtonnements, nous serions arrivé à des dimensions et à des indices qui, pour le rouge et le violet, auraient placé le foyer sur la rétine; et, dans nos essais, dirigé par les vues qui nous ont guidé en calculant le tableau D, nous aurions tâché que l'indice de la capsule cristalline ne s'élevât pas jusqu'au chiffre 1.463 (198), qui est le plus élevé de tous ceux que M. Chossat a obtenus [371].

213. Or, l'indice de la capsule et celui de l'humeur aqueuse se trouvant liés par la condition d'avoir des valeurs de f convenables, nous aurions probablement été conduit, comme dans le tableau D, à un indice de l'humeur aqueuse plus faible que celui de l'eau. Nous pensons qu'un tel indice pourrait très-bien être admis; car cette humeur se reproduisant promptement [5], il est assez présumable qu'elle attire les liquides ambiants et que, dès qu'elle est

à l'air, son indice tend à se mettre à l'unisson de celui de l'eau, ce qui fait comprendre que les physiciens ont pu trouver pour elle des indices 1.337 et 1.338 [61] plus élevés que ceux qui existent dans le vivant.

Quant aux indices de la cornée et du corps vitré, il ne faut compter presque pour rien les opérations des physiciens. En effet, la cornée, dans le vivant, est humectée en dehors par les larmes et en dedans par l'humeur aqueuse, ce qui la met dans un état tout autre que celui qu'elle a dans l'air quand on la soumet à des expériences; et, pour ce qui concerne le corps vitré, il suffit de dire qu'on n'a opéré que sur le liquide contenu dans la membrane hyaloïde et qu'il aurait été impossible d'opérer sur une portion de ce corps, lequel ne peut être séparé en parties sans que le liquide s'écoule, ce qui dénature leur ensemble. On a donc, pour les indices de la cornée et du corps vitré une latitude assez grande.

214. Mais, malgré cette latitude, ce serait un travail extrêmement long et extrêmement pénible que de faire concorder les dimensions et les indices avec la vision d'un œil cataracté dans les trois cas mentionnés plus haut (212), et dont chacun est double, le foyer, pour chaque cas, devant se trouver exactement sur la rétine, soit qu'on prenne l'œil cataracté armé d'un verre, soit qu'on le prenne avant la cataracte, alors qu'il est sain et sert à juger des objets sans le secours du verre.

On peut dire, cependant, que ce travail une fois fait et donnant une concordance numérique exacte entre tous les éléments de la question, il porterait plus de jour sur le mécanisme de l'œil que n'y en peuvent porter nombre d'expériences tentées sur le mort.

215. Il est aisé de voir, en effet, combien ces expériences sont peu satisfaisantes; car, si l'on jette les yeux sur le tableau du n° 61 de la *Théorie de l'œil*, on trouve pour l'indice du noyau le chiffre 1.399, déterminé par M. Brewster, et le chiffre 1.420 déterminé par M. Chossat opérant avec les instruments du Collége de France et recevant les conseils de M. Biot. On peut donc être parfaitement sûr que les chiffres trouvés 1.399 et 1,420 sont les

indices exacts des substances essayées, et il faut en conclure, ou qu'il y aurait, d'homme à homme, des différences considérables (21 millièmes au moins) entre les indices des noyaux de l'œil humain, ou qu'on a opéré, ce qui est beaucoup plus admissible, sur des noyaux qui avaient subi des détériorations de degrés différents.

216. Il est donc bien établi que les calculs indiqués ci-dessus auraient beaucoup d'utilité. Mais, le corps vitré n'étant pas homogène; l'achromatisme, dans la direction de l'axe optique, n'étant pas d'une exactitude complète, et l'œil normal pendant la vie changeant graduellement de dimensions et d'indices, il convient d'étudier à fond toutes ces circonstances, qui seront traitées dans les Mémoires suivants, avant d'entreprendre le travail très-long et très-pénible dont il s'agit.

Les calculs déjà faits ayant, pour le moment, une certaine valeur, nous plaçons les indices que nous avons obtenus sur le tableau du n° 230. Ils occupent sur ce tableau la première ligne de l'article 2, et les indices trouvés par M. Chossat forment la deuxième ligne du même article, ce qui rend facile la comparaison de ces deux systèmes d'indices.

217. Dans l'article 1^er^, nous sommes parti pour la capsule, dans le cas du rouge, de l'indice 1.46, et l'indice du noyau est égal à 1.446; on peut admettre qu'en partant de l'indice 1.45, qui est celui du tableau D (229), l'indice 1.446 se réduirait, dans le rapport de 1.46 à 1.45, au chiffre 1.436, pour le rouge, ce qui donne, pour le blanc, le chiffre $1.436 \times 1.005 = 1.443$. C'est l'indice de la première ligne, quatrième colonne de l'article 2. Nous ne le donnons pas comme étant le résultat d'un calcul satisfaisant; mais les variations de densité des couches cristallines n'ayant pour objet que de courber les rayons obliques violets un peu plus que les rayons rouges (157), ces variations doivent être resserrées entre des limites peu écartées, et le chiffre 1.443 étant de 0.015 au-dessous de notre indice 1.458 de la capsule, ce chiffre 1.443 nous semble propre à figurer utilement dans le tableau de l'article 2. Si l'on pensait qu'il dût être abaissé, il n'en

serait que plus rapproché de l'indice 1.42, placé au-dessous, et trouvé par M. Chossat pour le noyau.

218. En comparant les chiffres des deux lignes de l'article 2, on voit qu'il y a un accord assez surprenant entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie. Cet accord, toutefois, se borne à ce qui concerne la cornée, l'humeur aqueuse, le noyau et l'humeur vitrée : c'est beaucoup certainement. Mais il faut remarquer, premièrement, que l'indice 1.35 de M. Chossat pour la capsule est beaucoup plus faible que le nôtre 1.458; secondement, un autre désaccord très-grave, dont nous avons bien des fois parlé, lequel consiste en ce que, d'après l'expérience, le noyau (indice 1.420) est plus dense que la capsule (indice 1.35). De là faut-il conclure que tout ce qui constitue le cristallin, depuis la capsule jusqu'au noyau, éprouve de grandes détériorations quand on prépare les expériences sur le mort, tandis que les autres milieux n'en éprouvent que peu? Nous le croyons; nous en avons déjà donné des raisons et nous reviendrons sur cet objet important lorsque nous pourrons l'aborder avec toutes les données que nous essayerons de rassembler.

CHAPITRE VI.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'ŒIL ET SUR LA PHYSIOLOGIE COMPARÉE DE CET ORGANE.

219. Notre objet, dans ce Mémoire, était en grande partie d'arriver, au moyen de la vision des cataractés, à un type d'œil plus satisfaisant, quant aux dimensions et quant aux indices, que celui auquel nous avons appliqué nos calculs dans le Mémoire précédent. Nous croyons que, pour l'état actuel de la science, ce but est virtuellement atteint. Mais nous sommes loin d'avoir opéré avec des données aussi complètes que celles qui sont indiquées au n° 212. D'un autre côté, le verre du n° 1 et deux tiers que nous avons employé est trop faible (184). D'où il résulte que c'est prin-

cipalement comme exemple et comme modèle de calcul que notre travail pourra être utile. Toutefois, c'était un pas important, suivant nous (219), que d'arriver, par une voie théorique et rationnelle, à des indices tels que ceux des première et deuxième lignes de l'article 2 du tableau E. De plus tout s'accorde très-bien, dans ce Mémoire, avec nos idées sur le cristallin, plus dense à l'extérieur que dans ses couches internes (155), ce qui est d'un grand poids comme fait de calcul confirmatif de notre théorie.

220. Considérons maintenant, sous le rapport de sa perfection, l'œil théorique humain, tel que nous le décrivons. Un objet placé à la distance de la vision distincte, c'est-à-dire à dix fois environ son diamètre horizontal, ou placé à une distance plus grande, jusqu'à l'infini, donne sur la rétine une image nette et achromatique. Ainsi, un point rayonnant qui lance beaucoup de lumière, comme les étoiles, est parfaitement vu, quelque éloigné qu'il soit, et de même un objet très-menu, par exemple un moucheron, avec une clarté ordinaire, est aussi parfaitement vu.

221. Voudrait-on que l'œil de l'homme convînt mieux pour voir de près? Il n'y aurait, en sacrifiant la vision des objets très-éloignés, qu'à modifier un tant soit peu, dans un sens convenable, les dimensions et les indices, et l'organe étant ainsi disposé, on cesserait de voir les corps distants de l'œil de plus de 30, 40 et 50 mètres de distance, ou du moins on ne les verrait plus que fort confusément; mais, avec des déformations de même amplitude que pour l'œil ordinaire, les objets d'une grande ténuité, à 10, 12 et 15 centimètres de distance deviendraient susceptibles d'être vus avec perfection : l'œil serait myope et l'on pourrait lire avec une très-faible clarté.

222. Et ce qui est digne de remarque, c'est que, si la matière était supposée divisible à l'infini, de manière qu'on pût avoir des yeux humains semblables et de toutes les grandeurs, non pas seulement du géant au nain, mais de l'éléphant à l'oiseau mouche, ces yeux auraient tous, d'après ce que nous avons démontré au

n° 201, la même perfection. Cela, d'ailleurs, est vrai pour l'œil normal, de même que pour l'œil myope.

223. A part donc ce qui concerne la divisibilité de la matière, divisibilité qui ne permet peut-être pas qu'un très-petit œil ait les mêmes parties et les mêmes proportions qu'un grand œil, il n'y a pas d'animal, vivant et s'exerçant dans le milieu éclairé d'une certaine façon où nous nous trouvons, qui, avec un œil humain, myope ou normal, disposé pour sa taille, ne reçoive sur la rétine l'image achromatique et nette d'un objet placé à une des distances où cet animal a besoin d'apprécier ce qui s'offre à sa vue. C'est-à-dire que tout animal vertébré, pris parmi ceux qui agissent le jour, si on le suppose en repos à la surface du sol, armé d'un œil humain et observant un objet, verra cet objet avec toute la perfection qui nous permet de voir admirablement bien les étoiles et de lire un livre imprimé en très-petit caractère.

224. Pourquoi donc, chez les animaux qui sont réputés comme ayant une bonne vue, reconnaît-on à la première inspection, d'un genre à un autre, d'une espèce à une autre, de très-grandes différences? On a souvent exprimé, en décrivant avec éloquence ce qu'il y a d'admirable dans la création, et sans s'arrêter assez peut-être à la pensée de J. J. Rousseau, si pompeuse avec des mots simples, sentie si mathématiquement, qu'un fétu n'est pas moins étonnant qu'un homme; on a, disons-nous, considéré les particularités des yeux des animaux comme ayant pour objet une vision plus parfaite. Cela est vrai seulement, en ce sens que leurs yeux conviennent mieux aux conditions de leur conformation et de leur genre de vie; mais ce n'est pas vrai, du moins nous croyons le prouver, en ce sens que l'image formée sur la rétine de l'œil humain aurait des imperfections qui placeraient cet œil à un rang secondaire en physiologie comparée.

225. Sous ce rapport, ce qu'il faut principalement considérer dans la physiologie de l'œil chez les animaux, ce n'est pas la vision en elle-même, mais les circonstances qui se rattachent à elle, et qui tiennent, soit à la nature, soit au degré de clarté du milieu

qu'habite l'être dont on s'occupe, soit à ses besoins particuliers, soit aux mouvements plus ou moins rapides qui sont des conséquences de sa constitution et de sa manière de vivre.

226. Ainsi, figurons-nous qu'un faucon, posé à la surface de la terre, observe à 20 ou 30 mètres de distance la proie qu'il convoite; l'œil humain, d'une grosseur convenable pour la taille de l'oiseau, sera excellent pour satisfaire son besoin de bien voir, parce que, pour l'homme et pour le faucon, dans ce cas particulier, l'axe optique sera horizontal et les deux êtres dans des situations conformes à leurs habitudes. Mais si le faucon vient d'atteindre, par exemple, un héron que des chasseurs poursuivent, et qu'il commence le combat sous la double difficulté d'éviter le bec du héron et d'être en garde contre les chasseurs, de voir de près l'un de ses ennemis, et de suivre de loin les mouvements des autres qui, tout éloignés qu'on les suppose, sont cependant redoutables, il faudra que les coups du faucon portent juste; il faudra que la violence de la lutte ne dérange rien du mécanisme de ses yeux, afin qu'il puisse, en temps opportun, fuir dans la direction convenable après avoir vaincu, et emportant pour vivre quelque lambeau des chairs de sa victime.

Ces conditions sont bien différentes de celles que l'œil humain doit remplir, et, toutefois, on peut dire qu'elles sont indépendantes de la perfection de l'image oculaire, et de ce qui, à proprement parler, constitue la vision.

227. L'histoire naturelle offre une foule de circonstances de cette sorte, circonstances dans lesquelles l'œil se trouve changé de façon que la bonté de la vue, qui, nous le répétons, ne s'élève chez aucun animal plus haut que chez l'homme, convienne mieux aux besoins particuliers des divers genres d'animaux.

L'étude de ces particularités, intimement liées à la théorie de l'œil, et descendant probablement de cette théorie comme chaque section conique descend de l'équation générale du second degré à deux variables, est évidemment très-propre au prompt perfectionnement de la vision. Mais, pour explorer avec fruit la physiologie com-

parée en ce qui concerne la vue, il fallait préalablement l'explication du phénomène principal : LA VISION CHEZ L'HOMME, dans le cas hypothétique des surfaces réfringentes centrées sur un même axe. Nous nous persuadons que cette explication est celle que nous avons indiquée, plutôt qu'exposée dans le précédent Mémoire; elle nous servira de point de départ, dans les Mémoires suivants, pour rendre compte de faits nombreux puisés dans l'anatomie comparée. Ces faits développeront et confirmeront nos idées relatives au cristallin.

POST-SCRIPTUM.

228. Nos précédents Mémoires ont suffisamment établi que le corps vitré ne peut guère être considéré comme homogène. La supposition qu'il est composé de couches de plus en plus denses en s'éloignant du cristallin était donc plausible; et ce qui est plausible doit être permis et, du moins nous le croyons, parfaitement permis, comme hypothèse, quand il s'agit de difficultés que Descartes, Newton, Euler, d'Alembert, Young, Dulong et nos géomètres vivants n'ont pu surmonter. Cependant, nous n'avons pas voulu, dans ce Mémoire, admettre un corps vitré non homogène, bien que, par là, nous ayons dû trouver, pour la capsule, un indice moins élevé que celui que nous avons obtenu.

Nous nous occuperons, dans le Mémoire suivant, des yeux cataractés, en admettant un corps vitré composé de couches de plus en plus denses en approchant de la rétine.

229. TABLEAU D (186). RÉFRACTIONS DANS L'ŒIL CATARACTÉ ET DANS L'ŒIL NORMAL.

	COULEURS, MILIEUX ET SURFACES.	VALEURS DES INDICES, RAPPORTS, RAYONS, ETC.						
		i	l	r	d	f	g	$f-g$
	ART. 1. ŒIL CATARACTÉ ALLONGÉ, ARMÉ D'UN VERRE DONT σ_1 ET σ_2 SONT LES DEUX SURFACES.							
ROUGE.	Verre. . . . . σ_1	1.524	1.524	50.	250.	234.742	6.	228.742
	Air. . . . . σ_2	1.	0.656	— 50.	— 228.742	58.275	7.	51.275
	Cornée. . . . . S_1	1.33	1.33	6.573	— 51.275	19.052	1.02	18.032
	Humeur aqueuse. S_2	1.32	0.992	4.93	— 18.032	18.464	6.9	11.564
	Corps vitré. . . . . S_n	1.344	1.018	— 4.001	— 11.898	12.4	12.4	0.
VIOLET.	Verre. . . . . σ_1	1.545	1.545	50.	250.	224.215	6.	218.215
	Air. . . . . σ_2	1.	0.647	— 50.	— 218.215	55.556	7.	48.556
	Cornée. . . . . S_1	1.343	1.343	6.573	— 48.556	18.463	1.02	17.463
	Humeur aqueuse. S_2	1.333	0.993	4.93	— 17.463	17.798	6.9	10.898
	Corps vitré. . . . . S_n	1.373	1.030	— 4.001	— 10.898	12.4	12.4	0.
	ART. 2. ŒIL RACCOURCI NORMAL.							
ROUGE.	Cornée. . . . . S_1	1.33	1.33	6.8	∞	27.406	1.	26.406
	Humeur aqueuse. S_2	1.32	0.992	5.1	— 26.406	27.273	2.8	24.473
	Capsule. . . . . S_3	1.45	1.098	6.6	— 24.473	19.702	4.	15.702 1.027
	Cristallin.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	16.729
	Corps vitré. . . . . S_n	1.344	0.927	— 4.5	— 16.729	12.2	12.2	0.
VIOLET.	Cornée. . . . . S_1	1.343	1.343	6.8	∞	26.624	1.	25.624
	Humeur aqueuse. S_2	1.333	0.993	5.1	— 25.624	26.425	2.8	23.625
	Capsule. . . . . S_3	1.465	1.099	6.6	— 23.625	19.186	4.	15.186 0.731
	Cristallin.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	15.917
	Corps vitré. . . . . S_n	1.373	0.937	— 4.5	— 15.917	12.2	12.2	0.

NOTA. L'inconnue calculée dans chacune de ces lignes de nombres, sauf les exceptions suivantes, est la distance focale f.

Pour les 5e et 10e lignes, l est l'inconnue calculée.

Pour les 15e et 20e lignes, d est l'inconnue calculée.

Les 5e, 10e, 15e et 20e lignes donnent $f = g$, ce qui place le foyer sur la rétine.

230. Tableau E. Réfractions dans le cristallin; dimensions et indices de l'œil.

Surfaces antérieures des milieux.	Valeurs des indices, rapports, rayons, etc.						
	i	l	r	d	f	g	$f-g$
Art. 1 (205). Exemple du calcul des réfractions du cristallin composé de la capsule, du noyau et d'un lobe intermédiaire de l'œil normal, dans l'hypothèse, fausse au fond, de l'existence de deux lobes.							
Capsules	1.46	1.106	7.2	— 24.473	19.900	0.04	19.860
Lobe intermédiaire	1.45	0.993	7.18	— 19.860	20.112	1.5	18.612
Noyau	1.446	0.997	3.59	— 18.612	18.895	1.97	16.925
Lobe intermédiaire	1.45	1.003	— 2.24	— 16.925	17.230	0.47	16.760
Capsules	1.46	1.007	— 4.48	— 16.760	17.328	0.02	17.308
Corps vitré	1.338	0.916	— 4.5	— 17.308			

Nota. On n'a pas eu besoin de calculer f dans la 3e ligne, ni d dans la 4e.

Indication des groupes.	Cornée.	Humeur aqueuse.	Capsule (partie antérieure).	Noyau du cristallin.	Capsule (partie postérieure).	Corps vitré.
Art. 2 (204,219). Indices du blanc.						
1° D'après nos calculs (V. le ch. v).	1.338	1.326	1.458	1.443	1.458	1.358
2° D'après M. Chossat [61]	1.33	1.338	1.35	1.420	1.35	1.339
Art. 3 (203). Dimensions employées dans ce mémoire pour les six milieux désignés dans les colonnes de l'article 2.						
1° œil raccourci.						
Épaisseurs	1.	2.8	0.04	3.94	0.02	12.4
Rayons	6.8	5.1	6.6			- 4.5
2° œil allongé.						
Épaisseurs	1.2	2.85	0.04	4.10	0.02	12.2
Rayons	6.573	4.93				- 4.001

3° cristallin dans le cas du calcul fait pour l'œil normal raccourci.

Épaisseur de la couche antérieure.	1.50	Rayon de la couche antérieure	7.18
Épaisseur du noyau	1.97	Rayon du noyau	3.59
Épaisseur de la couche postérieure.	0.47	Rayon de la couche postérieure	- 2.24
		Rayon de la capsule postérieure	- 4.48

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

RELATIVES

AU MOUVEMENT DE L'EAU

DANS LES TUYAUX,

PAR M. H. DARCY,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.

SOMMAIRE.

Ce Mémoire traitera du mouvement de l'eau dans les tuyaux.

Il est divisé en six chapitres.

Le premier chapitre a pour objet d'indiquer les motifs qui m'ont déterminé à me livrer à ces recherches expérimentales.

Le second chapitre est consacré à la description des appareils employés dans ces recherches.

Le troisième présente le résultat des expériences.

Le quatrième, les procédés employés pour déterminer les coefficients des formules.

Le cinquième donne la description des expériences relatives à la recherche de la loi qui lie entre elles les vitesses des filets fluides.

Dans le sixième et dernier, je détermine le coefficient de contraction à l'entrée des conduites cylindriques; je fais précéder cette recherche d'un résumé des résultats obtenus dans le cours de ce Mémoire et de quelques considérations relatives aux variations respectives des deux termes de la résistance *dans l'expression générale* d'où l'on déduit la vitesse moyenne de l'eau dans une conduite cylindrique.

Ce Mémoire est suivi d'un appendice renfermant quatre notes et terminé par des tables relatives à l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite, pour des diamètres variant de 1 centimètre jusqu'à 1 mètre inclusivement.

CHAPITRE PREMIER.

UTILITÉ DES EXPÉRIENCES.

Si l'on consulte l'histoire de l'Académie des sciences, année 1732, on aura lieu de constater que l'hydraulique expérimentale avait encore bien des progrès à faire.

Couplet venait d'essayer quelques expériences sur les conduites d'eau de Versailles, et l'Académie s'exprime ainsi dans le compte rendu qu'elle fait de ce travail :

« Il (Couplet) vient ensuite au point le plus difficile de toute cette matière, à la diminution que causent dans la dépense des eaux les accidents physiques, tels que les frottements de l'eau contre les parois intérieures des conduites, les sinuosités de ces conduites, l'air qui s'y trouve intercepté.

« On est peu instruit sur ces sujets, faute d'expériences assez en grand; les conduites courtes ne s'écartent pas beaucoup des règles ordinaires et de la théorie, les longues s'en écartent quelquefois prodigieusement. Par bonheur, M. Couplet a fait des expériences à Versailles, où tout est à souhait pour le grand; mais il s'en faut bien qu'il en ait fait encore assez pour en pouvoir tirer des conclusions un peu générales avec quelque sûreté. Nous ne ferons que détacher de ses observations ou de ses réflexions celles qui paraissent les plus remarquables, et nous n'entrerons nullement dans la description exacte qu'il donne des lieux et des conduites, parce qu'elle n'est nécessaire que pour le détail.

« La règle que les vitesses de l'eau sont comme les racines carrées des hauteurs d'où elle tombe, ou, ce qui est le même, des hauteurs de la colonne d'eau dont la charge fait couler l'eau inférieure, est extrêmement trompeuse dans les grandes conduites,

telles que celles de Versailles, qui vont quelquefois à plus de 2,000 toises. Si l'on jugeait par cette règle de la quantité d'eau qui doit venir, il y a tel cas où l'on trouverait 407 pouces au lieu des 10 1/2 qui sont venus réellement à M. Couplet lorsqu'il en a fait l'expérience. C'est une différence presque du total.

« Assez souvent la quantité d'eau est vingt ou trente fois moindre que celle que la règle promettait. Cette étrange diminution vient des frottements, du moins en grande partie. On voit, et on le devinerait sans expérience, que leur effet est d'autant plus grand que les conduites sont plus longues, les diamètres des tuyaux plus petits, les sinuosités ou coudes plus fréquents, les angles de ces coudes plus aigus, la vitesse de l'eau plus grande, mais on aura bien de la peine à savoir, seulement à peu près, la valeur de chacun de ces principes de diminution, et quels seront les résultats de leurs combinaisons différentes. »

Il est permis d'induire de cette citation qu'en 1732, non-seulement on ignorait les lois expérimentales de l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite, mais qu'on croyait à peine à la possibilité de les découvrir un jour.

Des hommes de science et de pratique se chargèrent successivement de démontrer cette possibilité.

Plus tard, M. de Prony, dont le nom restera toujours gravé dans la mémoire des ingénieurs et de tous ceux qui s'occupent de questions hydrauliques, arriva pour couronner l'œuvre.

Il s'arma de 51 expériences faites sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite :

7 par Couplet,
26 par Bossut,
18 par Dubuat, ce créateur de la science positive des eaux courantes, suivant la juste expression d'un homme qui a rendu aussi de grands services à l'hydraulique, M. l'ingénieur en chef d'Aubuisson.
51

Puis, modifiant heureusement la formule de M. l'ingénieur Girard, formule qui avait été suggérée à ce savant par les belles

expériences de Coulomb sur la résistance des liquides, M. de Prony arriva à l'expression bien connue

$$\frac{1}{4} Dj = \alpha v + \beta v^2,$$

dans laquelle

D = le diamètre du tuyau,
j = la pente par mètre,
$\alpha = 0,0000\,173\,314$,
$\beta = 0,000\,348\,2590$.

Telle est la formule employée par tous ceux qui ont à projeter ou à exécuter des distributions d'eau.

L'habileté incontestable des expérimentateurs et l'autorité du nom de M. de Prony l'ont rendue, pour ainsi dire, classique, et M. Mary, ancien ingénieur en chef des eaux de Paris, aujourd'hui membre du conseil général des ponts et chaussées, s'exprime ainsi, dans le cours qu'il professe à l'École des ponts et chaussées, à l'occasion des tables qu'il a calculées d'après la formule précitée :

« Cette formule donne des débits plus faibles que ceux que l'on obtient avec des conduites neuves, la différence peut aller pour les gros diamètres jusqu'à $\frac{1}{5}$; de sorte qu'en faisant usage de ces tables, on n'a pas à se préoccuper de l'effet de légers dépôts qui peuvent diminuer le diamètre des tuyaux et augmenter le frottement de l'eau. »

La sécurité des ingénieurs aurait donc dû être complète. Cependant M. Arago reçut, le 1er octobre 1829, de M. d'Aubuisson, ingénieur en chef des mines et auteur de la distribution d'eau de Toulouse, une lettre qu'il fit insérer dans le cahier de mars 1830 des *Annales de physique et de chimie*.

« Il est peu de branches des sciences physico-mathématiques, disait M. d'Aubuisson, plus importantes sous le rapport d'une application continuelle à la pratique que celle qui traite du mou-

vement de l'eau dans les tuyaux de conduite; il en est peu en conséquence dont il importe plus de perfectionner les règles ou formules. Déjà quelques savants, entre autres Dubuat, de Prony et Eytelwein, se sont occupés d'établir ces formules; mais ils les ont basées sur des expériences généralement faites sur d'assez petits tuyaux, et elles se sont trouvées en défaut lorsqu'on les a appliquées aux grandes conduites. Leurs résultats, comparés à ceux des expériences que Couplet avait faites, dans le dernier siècle, sur les conduites du parc de Versailles, ont présenté des anomalies considérables. De nos jours, les ingénieurs des eaux de Paris n'ont obtenu de la conduite qui alimente la fontaine des Innocents, que les deux tiers de l'eau indiquée par les formules.

« Celle du faubourg Saint-Victor ne leur a même donné que moitié; il faut en conséquence que l'observation fournisse encore à la théorie de nouvelles données pour le perfectionnement de ses règles.

« L'établissement de nombreuses conduites dernièrement fait à Toulouse, sur lequel vous avez porté votre attention à votre passage dans cette ville, m'a mis à même de faire plusieurs expériences qui pourront servir à cet usage; elles seront l'objet d'un mémoire particulier. Je me bornerai à remarquer ici que leurs résultats sont assez conformes à ceux des formules généralement admises, celles de MM. de Prony et Eytelwein, lorsque nous donnons peu de vitesse à l'eau dans une conduite en rétrécissant l'orifice de sortie à l'aide d'un ajustage, ou plutôt à l'aide d'une mince platine percée d'un trou de 1 ou 2 centimètres de diamètre; mais plus ce diamètre augmente, plus il y a de divergence, et lorsque la platine a été ôtée, le produit s'est trouvé d'un quart et d'un tiers moindre que celui des formules : d'où je conclus que, dans ces expériences, les résistances ont cru comparativement à la vitesse du fluide, dans un plus grand rapport que celui qui est admis dans le calcul (on y suppose que la résistance croît proportionnellement à $v^2 + mv$, m étant à peu près égal à 0,055 et v représentant la vitesse moyenne).

« La disposition de quelques-unes de nos conduites a encore permis de faire des expériences d'une nature particulière. On mène l'eau sur les points principaux de la ville à l'aide de deux conduites égales en diamètre et placées l'une à côté de l'autre dans la même galerie (si une avait besoin de réparation, l'autre pourvoirait au service), de sorte que l'on peut à volonté donner l'eau aux mêmes orifices ou bouches de sortie par une ou par deux conduites.

« J'ai fait connaître (dans mon petit *Traité du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite*, page 51) une expérience de ce genre, faite de concert avec M. de Montbel, lorsqu'il était maire de Toulouse. L'eau, étant fournie au beau jet d'eau de la place Bourbon par deux conduites de $0^m,16$ de diamètre et 287 mètres de longueur sous une charge de $7^m,19$, s'est élevée à une hauteur de . . . . . $6^m,55$
en n'employant qu'une conduite, l'élévation n'était que de $5^m,83$
Le volume d'eau dépensé était d'environ $0^m,012$ cubes par seconde. C'est encore de quelques expériences de cette espèce que je vais vous entretenir. Elles m'ont paru d'un assez grand intérêt pour vous être communiquées, et même pour occuper une place dans vos *Annales de physique et de chimie;* vous en déciderez. Avant de les exposer, je rappelle le principe qui nous a dirigés, et je fais connaître les conduites sur lesquelles on a opéré.

« Admettons une conduite pleine d'eau en repos; la charge ou pression sur chaque point des parois serait mesurée par le poids d'une colonne d'eau ayant pour hauteur la verticale comprise entre ce point et le niveau du fluide sur la tête de la conduite : en conséquence, si l'on perçait la paroi en différents points et qu'à chaque trou percé l'on adaptât un tube vertical, l'eau s'élèverait dans tous les tubes au niveau susmentionné. Supposons maintenant que le fluide se meuve dans la conduite et que le mouvement y soit parvenu à l'uniformité; si la conduite n'opposait aucune résistance au mouvement, la pression sur chaque point ne serait diminuée que de la hauteur due à la vitesse du fluide vis-à-vis ce point, et la vitesse étant partout la même (à égalité de diamètre), toutes les

diminutions de pression seraient égales, toutes les colonnes manométriques baisseraient d'une égale quantité, et leurs extrémités supérieures seraient encore à un même niveau. Mais il n'en est pas réellement ainsi : la conduite, soit par le frottement contre les parois, soit par des étranglements, etc. oppose une résistance au mouvement; dès lors les colonnes fluides contenues dans les tubes faisant fonction de manomètres diminuent de hauteur depuis l'origine de la conduite jusqu'à son extrémité : et la différence de hauteur ou de niveau pour deux points pris à volonté indique la résistance que la conduite a opposée au mouvement entre ces deux points; en conséquence, si à l'extrémité d'une conduite on adapte convenablement un tube manométrique, la différence de niveau entre l'eau qu'il renferme et celle qui est sur le tube de la conduite exprimera la résistance de la conduite : ce sera la hauteur de la colonne d'eau, mesurant cette résistance. »

M. d'Aubuisson passe ensuite à la description de ces expériences, dont les résultats sont portés au tableau synoptique suivant :

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE des TUYAUX.	LONGUEUR.	VOLUME DÉBITÉ.	PERTE DE CHARGE d'après L'EXPÉRIENCE.	PERTE DE CHARGE d'après LA FORMULE.	RAPPORT entre les RÉSISTANCES.
	mèt.	mèt.	pouces.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,27	605,26	76,065	0,453	0,343	0,757
2	0,27	605,26	140,25	1,413	1,06	0,750
3	0,12	437,50	14,80	0,805	0,542	0,673
4	0,12	437,50	26,83	2,423	1,657	0,683

En mars 1830, M. d'Aubuisson, et M. Castel, conservateur des fontaines de Toulouse, ont fait d'autres expériences dans lesquelles les rapports des pertes de charge, selon la formule et l'expérience, s'affaiblissent encore.

Ces expériences sont données avec détail dans l'histoire de l'établissement des fontaines de Toulouse. Elles sont au nombre

de cinq, comprenant chacune plusieurs groupes de tuyaux de $0^m,08$, 0,09, 0,12, 0,16 de diamètre.

Je me bornerai à rappeler ici les rapports entre les pertes de charge données par l'expérience et la formule.

Ces rapports sont :

Expérience n° 1	0,511
——— 2	0,42
——— 3	0,47
——— 4	0,46
——— 5	0,524

Il paraît donc résulter de ces expériences que la formule de M. de Prony ne donnerait, au moins pour les conduites déjà posées depuis un certain temps, qu'une résistance deux fois plus petite que la résistance indiquée par des expériences spéciales.

M. de Prony fait remarquer (page 171 de ses *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*) que le calcul de la vitesse, par sa formule, n'a rien de difficile, mais que cependant, lorsqu'il s'agira de calculs pratiques ordinaires et que la vitesse de l'eau dans le tuyau ne sera pas très-petite, on pourra évaluer cette dernière par l'équation très-simple

$$V = 26,79\sqrt{Dj},$$

ou pour le volume

$$Q = 21,03\sqrt{D^5 j}.$$

Ce qui revient, on le voit, à supposer que les résistances sont simplement proportionnelles au carré des vitesses du fluide.

M. d'Aubuisson dit aussi que dans les mêmes circonstances, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de vitesses supérieures à $0^m,60$ par seconde, il se borne à recourir à la formule

$$Q = 14,66\sqrt{D^5 j}.$$

Voici comment il est parvenu à cette expression :

Des expériences de Couplet, il a déduit l'équation

$$Q = 20{,}3\sqrt{D^5 j};$$

puis partant du résultat pratique constaté par lui, savoir que la charge doit être doublée, il conclut que Q doit être divisé par $\sqrt{2}$, ce qui conduit en définitive à

$$Q = 14{,}66\sqrt{D^5 j},$$

laquelle donne des résultats d'environ $\frac{1}{3}$ plus faibles que celles de M. de Prony, et motive la méthode que M. d'Aubuisson recommande et qui consiste à supposer que les tuyaux ont à conduire moitié en sus du volume d'eau auquel ils doivent réellement livrer passage.

En présence de tous ces résultats n'était-il pas opportun, au moins dans un intérêt pratique, de rechercher les causes des déviations observées?

Dans certaines circonstances, les formules semblent justifiées par l'expérience; dans d'autres, elles offrent avec les faits observés un désaccord complet.

L'harmonie qui existe aujourd'hui entre les formules et les résultats de l'expérience se maintiendra-t-elle encore après quelques années, lorsqu'une légère couche d'oxyde ou de dépôt calcaire altérera l'état de la surface sans même modifier la section d'une manière appréciable?

Et s'il en est autrement, dans quelles limites cette altération des surfaces exercera-t-elle son influence sur le débit?

M. d'Aubuisson croit à tort, suivant moi, et j'espère le démontrer, que la théorie devrait recevoir quelques modifications, et qu'il serait possible que la résistance crût comparativement à la vitesse dans un rapport plus grand que celui qui est admis, d'après Coulomb, dans les calculs.

Il m'a paru toutefois que les rayons devaient jouer un rôle plus important que celui qui leur est attribué.

Que l'on considère, en effet, la petite couche liquide en contact avec les parois et logée en partie dans les interstices formés par la rugosité des surfaces.

Que l'on considère, en outre, les attractions exercées par ces parois, et l'on admettra, je crois, que les éléments de cette couche sont animés de mouvements giratoires comparables à ceux que l'on remarque dans les élargissements brusques des lits des canaux et qu'ils ne participent pas, au même degré que les autres, au mouvement de translation générale.

On comprendra encore que les particules qui viennent choquer dans leur marche les saillies dont la paroi est parsemée jettent un certain trouble dans la translation des filets voisins.

Or l'un et l'autre de ces effets doivent avoir d'autant plus d'influence sur le débit, que le diamètre du tuyau est plus petit.

J'ai du moins constaté que les choses se passaient comme si ces hypothèses étaient fondées.

Il est vrai que la formule de M. de Prony est en désaccord avec ce que j'avance maintenant et ce que je me réserve de prouver plus tard. Mais je puis dès à présent faire remarquer que les 51 expériences de MM. Bossut, Dubuat et Couplet se subdivisent ainsi :

Bossut, 26, avec tuyaux neufs en fer-blanc d'un pouce à deux pouces de diamètre, ayant de $9^{m},74$ à $58^{m},47$ de longueur.

Dubuat, 18, avec tuyaux neufs en fer-blanc de $0^{m},0271$ de diamètre et de $19^{m},95$ de longueur.

Couplet, 6, avec un tuyau de $0^{m},135$ anciennement posé et d'une longueur de 2,280 mètres.

1, avec tuyau de $0^{m},49$ anciennement posé et d'une longueur de 1,169 mètres.

Ce simple exposé suffit pour faire comprendre que si, contrairement aux allégations des premiers expérimentateurs, l'état des surfaces exerce une notable influence sur le débit, une espèce de compensation a pu s'établir entre le débit de tuyaux de petit diamètre neufs et d'anciens tuyaux de grand diamètre.

C'est l'explication naturelle de ce qui paraît causer l'étonnement

que M. de Prony manifeste dans ses recherches (art. 43, p. 70) au sujet de l'identité parfaite de la quarante-troisième expérience avec la formule.

J'ai dit les principaux motifs qui m'ont engagé à entreprendre la longue série d'expériences[1] que je vais bientôt décrire. Mais afin d'arriver à la solution de cette double question, savoir :

1° Influence de l'état des surfaces sur le débit;

2° Rôle que paraissent jouer les diamètres,

Il était indispensable de procéder autrement qu'on ne l'a fait jusqu'à présent.

Il fallait faire, en nombre suffisant, des expériences sur des tuyaux de diamètres divers, de différentes natures, à parois neuves ou recouvertes de dépôts.

Il fallait ensuite opérer le classement de ces expériences par espèces de tuyaux et par diamètres, de telle façon que l'on pût, s'il y avait lieu, en déduire des lois générales.

On ne pouvait évidemment arriver qu'à une sorte de compensation confuse en combinant entre elles des expériences faites sur des tuyaux de différents diamètres, à parois lisses ou recouvertes de dépôts[2].

C'est cette confusion que j'ai cherché à éviter. Le tableau synoptique suivant donne la nomenclature, l'espèce et l'état des surfaces des tuyaux soumis à mes expériences.

Il indique en outre le nombre des expériences auxquelles chaque tuyau a été assujetti, et les limites entre lesquelles j'ai fait varier les vitesses.

[1] MM. Poncelet et Bellanger ont bien voulu assister à plusieurs de mes expériences, examiner mes appareils et me donner des conseils qui m'ont été très-profitables.

[2] Si MM. de Prony et Dubuat ont agi différemment, c'est qu'ils avaient posé ce principe : « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche du fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau, ou dans laquelle ce lit est creusé : cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. »

TABLEAU DES TUYAUX SOUMIS AUX EXPÉRIENCES.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES.		NATURE DES TUYAUX.	ÉTAT des SURFACES.	LONGUEUR de chaque tuyau.	NOMBRE DE JOINTS par 100 mètres.	MODE DE RACCORDEMENT.	VITESSES MOYENNES OBTENUES.	
								Minimum.	Maximum.
	mèt.				mèt.			mèt.	mèt.
1	0,0122			neuf.....	2,15	47	A vis.....	0,0344	1,195
2	0,0266	3	Fer étiré.....	*idem*.....	2,47	40	*Idem*.....	0,0578	2,1840
3	0,0395			*idem*.....	3,85	26	*Idem*.....	0,0626	2,5971
4	0,014			neuf.....	11,75	8	Nœuds en soudure.	0,04	1,29
5	0,027	3	Plomb.....	*idem*.....	6,60	16	*Idem*.....	0,065	1,679
6	0,041			*idem*.....	5,20	20	*Idem*.....	0,12	2,305
7	0,0268			neuf.....	2,79	36	A vis.....	0,03	2,507
8	0,0826	4	Tôle et bitume.	*idem*.....	2,90	34	*Idem*.....	0,10	3,897
9	0,196			*idem*.....	2,90	34	*Idem*.....	0,18	6,01
10	0,285			*idem*.....	2,90	34	*Idem*.....	0,395	3,207
11	0,04968	1	Verre.....	neuf.....	1,16	86	Joints à brides....	0,153	2,108
12	0,0359			avec dépôts.	1,30	77	*Idem*.....	0,051	0,633
13	0,0364			nettoyé....	1,30	77	*Idem*.....	0,113	1,126
14	0,0795			avec dépôts.	2,50	40	Emboîtements....	0,123	1,142
15	0,0801			nettoyé....	2,50	40	*Idem*.....	0,193	1,526
16	0,0819			neuf.....	2,50	40	*Idem*.....	0,088	3,265
17	0,0137	11	Fonte.....	*idem*.....	2,50	40	*Idem*.....	0,149	4,693
18	0,188			*idem*.....	2,50	40	*Idem*.....	0,205	4,928
19	0,2432			avec dépôts.	2,50	40	Joints à brides ...	0,307	3,833
20	0,2447			nettoyé....	2,50	40	*Idem*.....	0,278	4,497
21	0,297			*idem*.....	2,50	40	Emboîtements....	0,244	3,16
22	0,50			neuf.....	2,50	40	*Idem*.....	0,4207	1,1278

Je dirai d'abord que ces recherches m'ont permis de donner une démonstration positive d'un fait dont la preuve ne reposait, je crois, que sur une expérience incomplète de Dubuat.

M. de Prony fait remarquer en effet dans ses *Recherches hydrauliques* que, « d'après des expériences nombreuses et soignées de Dubuat, Dobeinhem et Benezech, dans le cas de fluidité du corps en mouvement, les résistances qui modifient l'effet de la pesanteur sont, dans une section transversale quelconque, indépendantes des pressions des molécules comprises dans cette section. »

Or l'expérience de Dubuat sur laquelle cette conclusion repose ne saurait porter la conviction dans l'esprit.

« Il paraît, dit Dubuat, page 52 de ses *Principes d'hydraulique*,

que la pression contre les parois est totalement étrangère à la résistance que l'eau éprouve en oscillant; car on peut remarquer dans les expériences 112 et 114 que la pression moyenne de l'eau contre les parois du tuyau était beaucoup moindre que dans les expériences 111 et 113; les vitesses y étaient aussi un peu moindres parce que la colonne fluide était un peu plus courte : deux raisons pour que la résistance y fût moindre et que le mouvement durât plus longtemps; mais comme il est arrivé le contraire, il faut conclure que le plus ou moins de pression n'influe pas sur la résistance d'un lit ni sur l'intensité du frottement. »

Or la pression

dans les expériences 112 et 114 { était, sur la partie inférieure du siphon, de $0^{m},30$ environ;

La pression

dans les expériences 111 et 113 { était, sur la partie inférieure du siphon, de $1^{m},30$ environ.

Il semblait ainsi au premier abord que la pression fût dans le premier cas quatre fois moins grande que dans le second. Mais il fallait évidemment ajouter le poids de l'atmosphère.

Le rapport des pressions n'était donc en réalité que $\frac{10,30}{11,30} = \frac{103}{113}$, c'est-à-dire trop faible pour que l'on pût en tirer une conclusion positive.

Dans les expériences spéciales que j'ai faites, au contraire, j'ai disposé les pressions de telle sorte qu'elles fussent dans le rapport réel d'environ $\frac{18}{41}$.

Le résultat trouvé n'était plus susceptible de controverse.

Si l'on remarque que, d'après les expériences de Coulomb, la résistance éprouvée par les liquides glissant contre des parois est exprimée par une fonction de la forme

$$\alpha v + \beta v^{2},$$

v étant la vitesse du fluide contre les parois, et les coefficients α et β des nombres constants à déduire de l'expérience.

On trouvera que, dans un tuyau de rayon R, la résistance éprouvée par le liquide est, par mètre courant,

$$2\pi R(\alpha v + \beta v^2);$$

mais, le mouvement étant uniforme, on démontre que cette expression est égale au poids d'un cylindre liquide ayant pour diamètre celui du tuyau et pour hauteur la charge i du tuyau par mètre courant. On aura donc en faisant

$$\frac{\alpha}{1000} = a, \quad \frac{\beta}{1000} = b,$$

$$\pi R^2 i = 2\pi R(av + bv^2)$$

ou

$$\frac{Ri}{2} = av + bv^2.$$

Or on se rappelle que c'est précisément l'équation calculée par de Prony. Seulement, dans les ouvrages de cet éminent géomètre, v n'est point la vitesse à la paroi, mais la vitesse moyenne ou celle dont on fait le plus fréquent usage.

Avait-on le droit de faire cette substitution?

Tout ce qui résulte de l'analyse de de Prony, c'est que les actions réciproques des diverses couches concentriques fluides disparaissent de l'équation finale d'équilibre, et qu'il ne reste dans cette équation que la vitesse à la paroi.

Il est facile, du reste, de s'en assurer par un calcul direct, ainsi que l'a fait de Prony, ainsi que l'a fait plus tard M. l'ingénieur en chef Dupuit dans ses études hydrauliques.

Partageons, par la pensée, le fluide qui s'écoule dans un tuyau de rayon R, en une infinité de cylindres concentriques.

L'expérience démontrera que le cylindre central a la vitesse maximum, et que pour tous les autres cylindres-enveloppes la vitesse va toujours en décroissant jusqu'à ce que l'on arrive à la couche contiguë à la paroi, où l'on rencontre la vitesse minimum.

Soit, en partant du cylindre central,

v_n la vitesse centrale;

v_{n-1}
v_{n-2}
v_{n-3}
v_{n-4}
v_{n-5}
v_{n-6} } les vitesses des couches concentriques;
.
.
.
.
.
.

v la vitesse à la paroi;

r_n
r_{n-1}
r_{n-2}
r_{n-3}
r_{n-4}
r_{n-5}
r_{n-6} } les rayons correspondants;
.
.
.
.
.
.
R_1

le nombre de ces cylindres-enveloppes étant infini, les différences entre les vitesses

$$v_n \quad \text{et } v_{n-1},$$
$$v_{n-1} \text{ et } v_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

sont infiniment petites;

les différences entre les rayons

$$r_n \quad \text{et } r_{n-1},$$
$$r_{n-1} \text{ et } r_{n-2},$$
$$r_{n-2} \text{ et } r_{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

sont aussi infiniment petites et, par hypothèse, égales entre elles.

Soit δ cette différence, de telle sorte que

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}, \quad \frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}, \ldots,$$

représentent en nombres finis des quantités proportionnelles aux différences infiniment petites des vitesses des couches.

D'après ces notations, il est évident que l'on peut poser la série d'équations suivante :

$$\pi r^2_n i = 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right), \ [1]$$

$$\pi\left(r^2_{n-1} - r^2_n\right) i = 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right) - 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right),$$

$$\pi\left(r^2_{n-2} - r^2_{n-1}\right) i = 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right),$$

$$\pi\left(r^2_{n-3} - r^2_{n-2}\right) i = 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-3} - v_{n-4}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right),$$

$$\pi\left(r^2_{n-4} - r^2_{n-5}\right) i = 2\pi r_{n-4} f\left(\frac{v_{n-4} - v_{n-5}}{\delta}\right) - 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-3} - v_{n-4}}{\delta}\right),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\pi\left(R^2 - R^2_1\right) = 2\pi R\left(av + bv^2\right) - 2\pi R_1 f\left(\frac{v_1 - v}{\delta}\right).$$

En effet, l'accroissement et la diminution de vitesse que chaque cylindre annulaire reçoit des cylindres intérieurs ou extérieurs, à raison de la cohésion des molécules fluides, est une fonction de la différence des vitesses ou des tangentes de la courbe précitée.

Quant à l'équation dernière qui a lieu pour le cylindre annu-

[1] On suppose les coefficients de la fonction qui exprime la résistance due à la cohésion divisés par Dg, produit de la densité du fluide par la gravité.

laire contigu à la paroi, on reconnaît le premier terme du deuxième membre : ce terme est donné par la loi observée par Coulomb.

Si maintenant on ajoute toutes ces équations entre elles, on arrivera à l'équation déjà trouvée

$$\pi R^2 i = 2\pi R (av + bv^2)$$

ou

$$\frac{R i}{2} = av + bv^2,$$

dans laquelle v exprime la vitesse à la paroi.

Équation très-remarquable, ainsi que le font observer MM. de Prony et Dupuit, en ce qu'elle est indépendante de toutes les forces retardatrices qui ne s'exercent pas à la paroi.

Mais, je le répète, pouvait-on substituer dans cette équation la vitesse moyenne u à la vitesse à la paroi?

L'expérience montre qu'en agissant ainsi on n'a pas fait d'erreur appréciable dans la pratique.

On verra plus tard, en effet, que dans les vingt-deux tuyaux que j'ai soumis aux expériences j'ai obtenu très-sensiblement des lignes droites en construisant une ligne avec

les $\frac{i}{u}$ déduits de l'expérience pour abscisses

et les u ou vitesses moyennes déduites de l'expérience pour ordonnées.

Or $\left.\begin{aligned} \frac{i}{u} &= m + nu \\ i &= mu + nu^2 \end{aligned}\right\}$ donne précisément une parabole.

Ajoutons maintenant une partie seulement des équations précédentes entre elles, il viendra :

soit

$$\pi r^2_n i = 2\pi r_n f\left(\frac{v_n - v_{n-1}}{\delta}\right)$$

ou

$$\pi r^2_{n-1} i = 2\pi r_{n-1} f\left(\frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{\delta}\right),$$

$$\pi r^2_{n-2} i = 2\pi r_{n-2} f\left(\frac{v_{n-2} - v_{n-3}}{\delta}\right),$$

$$\pi r^2_{n-3} i = 2\pi r_{n-3} f\left(\frac{v_{n-3} - v_{n-4}}{\delta}\right),$$

ou généralement $\pi r^2 i = 2\pi r f\left(-\frac{dv}{dr}\right)$;

le signe — est donné au coefficient différentiel parce que v diminue lorsque r croît.

Il est évident maintenant que l'équation $\pi r^2 i = 2\pi r f\left(-\frac{dv}{dr}\right)$, qui pour chaque pente présente la relation existant entre le rayon du cylindre annulaire et sa vitesse, donne l'équation de la courbe des vitesses.

Mais la fonction f est inconnue, et rien n'indique ici l'influence que peut avoir sur cette courbe le rayon du tuyau. L'expérience seule pouvait déterminer la forme de la fonction f, et l'influence du rayon du tuyau. J'ai donc cherché à déduire ces éléments de mes recherches expérimentales. Cela m'a permis de trouver l'expression de la vitesse moyenne, et la relation qui existe entre cette vitesse et celles au centre et à la paroi.

Ces résultats sont consignés dans le chapitre V.

Si on se reporte à l'équation d'équilibre $\frac{\mathrm{R}\,i}{2} = av + bv^2$, dans laquelle v, a et b représentent maintenant la vitesse moyenne et ses coefficients; on remarquera que l'on n'a point tenu compte de la charge nécessaire à la production de cette vitesse.

Ce ne pouvait être $\frac{v^2}{2g}$ à raison des phénomènes de la contraction; mais quelle est la valeur du coefficient de contraction dans la pratique?

Ce coefficient étant connu, on le substituera dans l'équation générale suivante :

$$\frac{\mathrm{R}\,i}{2} = \frac{\mathrm{R}}{2l}\,\frac{v^2}{2gm^2} + av + bv^2$$

ou

$$\frac{\mathrm{R}\,i}{2} = \left(\frac{\mathrm{R}}{4gm^2 l} + b\right) v^2 + av \quad (l \text{ longueur du tuyau}).$$

Du reste, on voit que le premier terme du multiplicateur v^2 peut être négligé dans la presque totalité des cas.

CHAPITRE II.

DESCRIPTION DES APPAREILS.

Soit AM (pl. III. fig. 12), un réservoir dont la hauteur est H. Au bas de ce réservoir est placé un tuyau horizontal d'un diamètre constant, entièrement ouvert à son extrémité, et dont la longueur est L.

L'eau s'échappera de ce tuyau avec une vitesse v. La hauteur due à cette vitesse est $\frac{v^2}{2gm^2} = x$.

m est le coefficient de contraction de l'eau à son entrée dans le tuyau.

x est toujours inférieur à la hauteur H du réservoir, et la différence $H - x$ exprime évidemment la partie de la charge absorbée par les frottements.

Le tube étant d'un égal diamètre et parfaitement libre dans toute son étendue, la quantité $H - x$ se distribuera proportionnellement à cette étendue.

Si donc on prenait, à partir du point M, une hauteur égale à $\frac{v^2}{2gm^2}$ et qu'on joignît le point I, placé à cette distance du point M, avec l'extrémité de la conduite, la ligne IC serait telle, que toute perpendiculaire, abaissée d'un de ses points sur la direction de la conduite ou sur l'horizontale AC, représenterait le frottement que le fluide a encore à surmonter pour arriver en C avec la vitesse v.

Conséquemment, la différence entre deux perpendiculaires consécutives exprimerait le frottement contre les parois de la conduite, dans l'intervalle que les perpendiculaires comprennent [1].

On voit aussi que si l'on transformait ces différentes perpendiculaires en autant de tubes verticaux communiquant avec la conduite, l'eau s'élèverait dans ces tubes jusqu'à la limite tracée par la ligne inclinée IC.

La hauteur de l'eau dans chacun des tubes perpendiculaires représentera donc le frottement à vaincre dans le reste de la con-

[1] On démontrera plus tard que le frottement est indépendant de la pression.

duite. Cette hauteur sera en même temps l'expression de la charge que la paroi intérieure des tuyaux supporte, indépendamment de la pression atmosphérique.

De ces réflexions résulte la justification du moyen auquel j'ai eu recours pour déterminer les hauteurs absorbées par les résistances que l'eau rencontre en s'écoulant dans un tuyau. (Voir note 1.)

Des piézomètres indiquaient :

1° La hauteur de l'eau dans le réservoir alimentaire, piézomètre n° 5;

2° La hauteur qu'elle conservait :

1° A son entrée dans le tuyau, piézomètre n° 4 [1];

2° A environ $4^{m},70$ de ce dernier point, piézomètre n° 3 [1];

3° A 50 mètres environ du point précédent, piézomètre n° 2;

4° A 50 mètres environ du point précédent, piézomètre n° 1.

La charge par 100 mètres était déduite de la comparaison des manomètres 1 et 3. On ne partait pas du piézomètre n° 4, afin que les mouvements oscillatoires du liquide qui doivent avoir lieu à l'origine eussent le temps de s'amortir.

Le manomètre 2 servait à reconnaître si les frottements se répartissaient également, et en même temps si les piézomètres remplissaient bien leurs fonctions. J'entrerai plus tard dans quelques explications à ce sujet.

Le manomètre 5, qui accusait la charge sur le réservoir, permettait de déterminer la hauteur nécessaire pour faire naître la vitesse moyenne du tuyau.

Les conduites ne versaient point leurs eaux à l'air libre, mais elles étaient ajustées à un cylindre vertical : les eaux de ce dernier s'écoulaient par un déversoir ou un orifice, suivant les circonstances.

On cotait exactement le niveau des eaux dans ce cylindre; on le comparait à celui du réservoir alimentaire, et l'on obtenait ainsi un moyen de vérifier la pente donnée par les manomètres

[1] Les manomètres 3 et 4, au moyen d'un jeu de robinets, donnaient successivement leurs indications dans le même tube vertical.

1 et 3, en tenant compte, bien entendu, de la hauteur due à la vitesse moyenne.

Je passe maintenant à la description des appareils, laquelle me fournira l'occasion de revenir avec détails sur plusieurs points de cet exposé succinct.

J'ai entrepris les expériences sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite pendant que j'étais chargé de la direction du service des eaux de Paris. Elles ont été commencées le 31 août 1849 et n'ont été terminées que le 27 octobre 1851.

Tout se réunissait pour faciliter mes recherches.

D'une part, j'étais parfaitement secondé par un personnel habile et dévoué. Je citerai particulièrement MM. Regnier, contrôleur du service municipal, et Corot, ancien élève de l'École centrale. Ils ont bien voulu m'assister dans toutes mes expériences, avec un zèle et une sagacité qui ne se sont jamais démentis. Qu'il me soit permis de saisir cette occasion de les remercier encore, car, sans leur concours empressé, il m'eût été difficile de terminer ce long travail[1].

D'autre part, j'ai trouvé à Chaillot, lieu que j'avais choisi pour faire mes expériences, les plus grandes facilités naturelles : au nord, de vastes réservoirs alimentés par des pompes à feu; au sud, des bassins tout disposés pour le jaugeage du débit des conduites en expérience; à proximité, les ateliers de Chaillot qui permettaient de faire réparer immédiatement le moindre dérangement dans les appareils.

En A (pl. I, fig. 1), cuve en tôle de 400 mètres cubes de capacité, à la cote $28^{m},04$[2], alimentée par une conduite de 25 centimètres, qui part des pompes; en $A'A''A'''A^{4}$ (pl. I, fig. 2), quatre bassins à des niveaux différents, de 3,307 mètres cubes de capacité

[1] La presque totalité des calculs a été effectuée, avec une grande précision, par M. Guy, employé du service municipal; M. Laplanche m'a prêté aussi son concours dans l'origine.

[2] $47^{m},20$ au-dessus de l'étiage de la Seine au pont de la Tournelle; $73^{m},45$ au-dessus du niveau de la mer.

chacun, ensemble 13,228 mètres cubes aux cotes $42^m,55$, $43^m,43$, $44^m,14$ et $45^m,53$, pouvant être isolés ou mis en communication à volonté, alimentés par une conduite de 65 centimètres de diamètre; en R (fig. 3), robinet près des ateliers, sur la conduite de 65 centimètres, pour intercepter toute communication avec les machines; derrière le bâtiment des pompes, bassins de jauge nos 1, 2, 3 et 4, munis d'une vanne de décharge V du côté du quai, pour l'écoulement de l'eau dans la Seine : telles étaient les ressources principales dont on pouvait disposer.

Viennent ensuite les appareils spéciaux aux expériences; la planche II en présente l'ensemble.

Afin de mettre le plus de clarté possible dans leur description, nous allons les suivre pas à pas, à partir de la prise d'eau sur les conduites des réservoirs jusqu'aux bassins de jauge, en indiquant succinctement leur destination.

Les prises d'eau se composaient :

1° Sur la conduite de 65 centimètres, d'un tuyau vertical DC (pl. III, fig. 1) avec tubulure de 30 centimètres disposée pour se raccorder avec un robinet vanne R de même diamètre; d'un tuyau en plomb DE de 41 millimètres de diamètre avec robinet de même diamètre R_1; d'une conduite FG de 14 millimètres de diamètre avec robinet R_2 de même diamètre;

2° Sur la conduite de 25 centimètres, d'un tuyau HE de 27 millimètres de diamètre avec robinet R_3 de même diamètre.

En R_4, petit robinet au point haut de la conduite en plomb pour laisser échapper l'air au besoin.

Lorsqu'on faisait usage des bassins de Chaillot, et qu'on n'avait besoin que de petits volumes, les robinets R, R_1, R_3 restaient fermés, le robinet R_2 fonctionnait seul; on l'ouvrait plus ou moins pour obtenir une charge convenable, suivant le diamètre de la conduite soumise aux expériences. Lorsque l'écoulement par ce robinet n'était plus suffisant, on le fermait et l'on se servait du robinet R_1, que l'on abandonnait ensuite pour recourir au robinet R. On passait ainsi par toutes les charges que pouvait donner

le quatrième bassin de Chaillot, maintenu à un niveau constant au moyen de l'eau contenue dans les trois autres bassins plus élevés.

Pour obtenir les charges les plus fortes, on se mettait en communication avec le réservoir circulaire en tôle en ouvrant le robinet R_3, par lequel passait l'eau de la conduite de 25 centimètres alimentée par la cuve A.

A la suite des prises d'eau on avait établi une conduite de 30 centimètres, perpendiculaire aux conduites de 65 et 25 centimètres, jusqu'au cylindre I (pl. III, fig. 2 et 2 *bis*).

Le cylindre I, de 1 mètre de diamètre, couché horizontalement, formait un réservoir intermédiaire destiné à amortir la vitesse de l'eau avant son entrée dans les conduites. Dans l'intérieur, au point J, était un diaphragme formé d'une plaque de tôle percée de trous. Le côté vertical du cylindre était fermé par une plaque en fonte dans laquelle on pratiquait des ouvertures circulaires de différents diamètres auxquelles aboutissaient les conduites en expérience. Un robinet R était placé au sommet pour l'échappement de l'air.

En r_1 était placé le robinet du cinquième manomètre, pour mesurer la charge de l'eau; à côté, mais sur la conduite en r_2, se trouvait le robinet du quatrième manomètre. La différence entre la hauteur de ces deux manomètres donnait la perte de charge due à la vitesse dans le tuyau. En r_3, robinet du troisième manomètre indiquant la charge de l'eau à l'origine de la portion de conduite à laquelle se rapportaient les expériences.

Afin de pouvoir comparer, sans possibilité d'erreur, les résultats accusés par les manomètres, on avait réuni ces appareils sur une même planche, au milieu du parcours des conduites, au moyen de tuyaux en plomb de 14 millimètres de diamètre, r_1 M, r_2 P″, P″N. Une seule conduite PN servait pour les deux manomètres nos 3 et 4.

Le robinet r_2 étant fermé et le robinet r_3 ouvert, on avait la charge du troisième manomètre; le robinet r_3 fermé et le robinet r_2 ouvert, on obtenait la charge du quatrième manomètre.

Les expériences ont toujours été faites sur 100 mètres de longueur, excepté pour la conduite en verre et pour les conduites en plomb.

De distance en distance, des dés en maçonnerie supportaient les conduites. Ces dés avaient été établis de manière à donner aux tuyaux une pente uniforme dans le sens inverse de l'écoulement, et à faciliter ainsi le dégagement de l'air. Les tuyaux en plomb des manomètres reposaient sur des planches placées sur ces dés. Aux points de départ des manomètres 1, 2 et 3 étaient établis des petits réservoirs en fonte P, P′, P″ (pl. III, fig. 2 *bis*, 3 et 7). Pour le manomètre n° 5, ce réservoir P‴ était au pied de l'échelle des manomètres (fig. 3). A la partie supérieure de ces réservoirs, comme aux points les plus élevés des conduites des manomètres, on avait percé des trous fermés par des chevilles pour donner le moyen de faire dégager l'air qui aurait pu s'introduire et altérer les résultats.

Tous les piézomètres, comme on l'a déjà dit, étaient réunis en un même point. La planche III (fig. 3, 4 et 5), donne le détail de ces instruments; dans les uns la pression se mesurait au moyen de l'eau, et dans les autres avec du mercure.

1° Les manomètres à eau étaient employés pour toutes les charges qui ne dépassaient pas 6 mètres;

2° On recourait aux manomètres à mercure pour les charges supérieures à 6 mètres.

Tous ces manomètres étaient établis autour du poteau A contre lequel était placée une échelle verticale E pour les observations.

Les manomètres à eau étaient ajustés sur le parement de la planche qui faisait face aux conduites; les manomètres à mercure étaient disposés de l'autre côté.

Les premiers (pl. III, fig. 4) étaient appliqués sur la planche précitée, haute de plus de 6 mètres, dressée contre le poteau A et divisée en centimètres : ils se composaient de tubes en verre T_1, T_2, T_3, T_4, formés de deux morceaux réunis par des pièces en cuivre adaptées aux joints, et soudées avec de la gomme laque.

L'assemblage avec les tuyaux de plomb s'opérait de la même manière. Il fallait souvent refaire les joints en laque qui supportaient difficilement les variations de température : aussi étaient-ils l'objet d'une surveillance continuelle.

En *r* était placé le robinet du deuxième manomètre posé exactement à 50 mètres du troisième manomètre dont il a été question précédemment, et en P' le réservoir de ce deuxième manomètre.

Le tuyau C_1 (fig. 2 *bis* et fig. 3) amenait l'eau dans le tube T_1 avec la charge du réservoir; le tuyau C_2, qui se raccordait avec la conduite en expérience au moyen des robinets du quatrième et du troisième manomètre, servait à indiquer alternativement, dans le tube T_3, la charge existant à l'origine de la conduite immédiatement après l'introduction de l'eau, ou au robinet r_3 au moyen des manœuvres décrites plus haut. Le tube T_2 accusait la charge au milieu des 100 mètres, et enfin le tuyau C_3, qui amenait l'eau du premier manomètre, déterminait, dans le tube T_1 la charge à l'extrémité des 100 mètres. A première vue, le manomètre du milieu ne semblerait pas nécessaire, mais il a rendu de grands services pendant les expériences, en accusant des perturbations qui auraient vicié les expériences et dont on ne se serait pas aperçu si l'on n'avait pas eu ce piézomètre supplémentaire. En effet, pour être certain que tout fonctionnait convenablement, il fallait que les différences entre le premier et le deuxième, ainsi qu'entre le deuxième et le troisième manomètres, fussent à peu près égales. Je dis à peu près, parce que quelque variation dans le diamètre moyen de la conduite, en amont ou en aval, pouvait occasionner une légère différence, mais dans ce cas la différence devait toujours se produire dans le même sens pour toutes les charges. Lorsque ces conditions n'étaient pas remplies, on était obligé, ou de réparer des fuites, ou de faire différentes manœuvres pour purger d'air la conduite. Ces manœuvres consistaient à faire jouer toutes les chevilles des points hauts des conduites des manomètres; à fermer les robinets d'arrêt r_1, r_2, r_3, r_4 (fig. 4), pour empêcher

l'eau de monter dans les tubes qui renfermaient quelquefois de l'air logé entre deux colonnes d'eau ; à ouvrir les robinets d'écoulement placés au-dessus des robinets d'arrêt, pour vider l'eau contenue dans les tubes, et enfin à ouvrir brusquement les robinets d'arrêt après avoir fermé les autres.

Les manomètres à mercure étaient placés sur deux planches fixées derrière le poteau A. Des communications avec les manomètres à eau avaient été établies en FR_3, GR_4, HR_2, JR_1. Lorsque l'on opérait avec les manomètres à eau, les robinets R_1, R_2, R_3, R_4 restaient fermés. Lorsqu'on arrivait dans les hautes charges, on fermait les robinets r_2, r_3, r_4. Le robinet r_1 pouvait rester ouvert, parce que la charge au premier manomètre n'atteignait jamais 6 mètres. C'était un moyen de contrôler la hauteur donnée par le manomètre à mercure en R_1, en tenant compte de la différence du niveau des échelles.

Le zéro de l'échelle des manomètres à eau était à la cote $68^m,244$

Celui des manomètres à mercure, à..... $68^m,204$

Un manomètre à mercure se composait d'une branche en tuyau de plomb AB (pl. III, fig. 5) avec renflement en A, et de deux tubes en verre BC, CD; en E une poche en caoutchouc remplie de mercure, que l'on introduisait par la pression dans les deux tubes en verre. Cette poche servait aussi à recevoir le mercure lorsqu'on voulait décharger les manomètres. Souvent il fallait calculer approximativement la quantité de mercure à mettre dans les tubes. Si l'on en versait trop, il en sortait par l'extrémité D, et si l'on n'en mettait pas assez, tout s'échappait par cette extrémité à raison de la pression liquide. L'ouverture trop brusque d'un robinet produisait le même effet; quelquefois on a été obligé de verser le mercure par l'orifice D. Dans ce cas, comme il se logeait de l'air entre deux colonnes de mercure, on introduisait un fil de fer dans le tube pour faire sortir l'air. Dans la pièce en cuivre qui reliait en B le tuyau en plomb avec le tube en verre, on avait ménagé un tube en cuivre muni d'un robinet pour permettre l'introduction d'un fil de fer dans le tube en verre, afin de le purger

d'air au besoin. Cette pièce se raccordait avec le tuyau en plomb au moyen d'une soudure, et avec le tube en verre au moyen d'un joint en gomme laque. Dans la partie inférieure, les tubes en verre étaient mis en communication par la pièce en fer C, munie d'un robinet pour l'introduction du mercure, les joints étant aussi en laque. On a essayé de faire des joints en mastic de fontainier, ils n'ont pas pu supporter les fortes pressions. La gomme laque elle-même résistait difficilement aux charges élevées. Rarement on pouvait terminer une opération sans être obligé de réparer un ou plusieurs joints. C'était sur le manomètre R_3 qu'avait lieu la double expérience pour déterminer les charges des troisième et quatrième manomètres.

A l'extrémité de chaque conduite étaient placés des robinets R à vanne (pl. III, fig. 6 et 7) pour les conduites de $0^m,0795$ et au-dessus, et à boisseau pour les conduites d'un diamètre inférieur.

Enfin, comme complément des appareils manométriques, on avait placé contre le cylindre d'arrivée, dans lequel débouchaient les conduites, deux tubes en verre appliqués contre une planche graduée. L'un de ces tubes AB (pl. III, fig. 8) était piqué sur un tronçon de la conduite de 137 millimètres, et donnait la hauteur de l'eau dans le cylindre EF; l'autre CD, branché sur la conduite en expérience, donnait la charge de l'eau en mouvement dans cette conduite. Des robinets d'arrêt avaient été établis en A et en C pour fermer les manomètres au besoin. Cet appareil a fonctionné sur les conduites de $\left\{\begin{matrix}0,0795\\0,0801\end{matrix}\right\}$; 0,188; 0,196; $\left\{\begin{matrix}0,2432\\0,2447\end{matrix}\right\}$ et 0,50.

Avant d'être dirigée dans les bassins de jauge, l'eau, comme on le voit, était reçue soit dans le cylindre en fonte EF, soit dans le cylindre du même métal G_1H_1 (pl. III, fig. 6). L'un, de $1^m,615$ de diamètre et $3^m,33$ de hauteur, a servi pour les conduites de $0^m,0795$ et au-dessus; l'autre, de $0^m,319$ de diamètre et 2^m de hauteur, a été employé pour les expériences faites sur les conduites de $0^m,2477$ et au-dessous.

Une double communication avait été établie entre le cylindre EF et les bassins de jauge : l'une se composait d'un tuyau de 10 centimètres de diamètre, greffé en I, servait à mener l'eau dans le bassin de jauge KL, lors des expériences avec de faibles volumes; l'autre était formée d'une échancrure de 80 centimètres de largeur sur 30 centimètres de hauteur, faite au cylindre pour placer une buse en bois LMN (pl. III, fig. 9, et pl. II, fig. 4), au moyen de laquelle l'eau se rendait dans les bassins.

L'orifice I avait été percé plus bas que le fond de la buse en L. Lorsque le bassin KL devenait insuffisant, on bouchait l'orifice I avec un tampon en bois, et l'eau montant dans le cylindre s'échappait par la buse.

L'eau qui arrivait au cylindre G_1H_1 était conduite aux bassins n^{os} 5, 6 et 7 (pl. III, fig. 6, 7 et 9) au moyen d'une conduite de 81 millimètres. Un coude mobile A (fig. 6) permettait de diriger à volonté les eaux dans l'un des trois bassins.

Sept bassins pouvaient être successivement employés pour le jaugeage des eaux débitées par les conduites.

Les bassins n^{os} 1, 2 et 3 (pl. II, fig. 1, 3 et 4) étaient limités par des murs existant dans la grande citerne située derrière le bâtiment des machines, et qui sert ordinairement à recevoir les eaux de condensation. C'était dans le bassin n° 1 que tombaient par la buse MN les eaux des expériences. Les dimensions de ces bassins ont été prises au niveau du radier, et au niveau du dessus des murs de séparation.

Le bassin n° 4 [1] se composait de la partie supérieure de la citerne, depuis le niveau du sommet des murs de séparation précités jusqu'à $2^m,50$ au-dessus de ces murs.

Pour mesurer la hauteur de l'eau dans le bassin n° 1, un flotteur avait été établi en A. Cet appareil consistait en une bouteille vide bien bouchée et surmontée d'une tige cylindrique en bois, divisée en centimètres, se mouvant dans l'intérieur d'une boîte

[1] La superficie du bassin 4 était donc formée par la réunion des superficies des bassins 1, 2 et 3.

carrée qui descendait jusqu'au fond du bassin. A la partie supérieure de la boîte avait été placée une bande en tôle percée d'un trou pour servir de coursier à la tige. Dans le bassin n° 1, on ne commençait ordinairement les expériences que lorsque l'eau était arrivée à quelques centimètres au-dessus du fond. Au signal donné, une épingle était piquée dans la tige immédiatement au-dessus de la bande en tôle; à un autre signal, à la fin de l'expérience, une autre épingle était placée au point de la tringle qui, dans l'ascension de cette dernière, était venu prendre la place du premier; en mesurant la distance entre ces deux épingles, on avait la hauteur d'eau versée dans le bassin pendant la durée de l'expérience. Un semblable flotteur avait été établi en B pour les bassins nos 3 et 4.

Dans le bassin n° 3 on ne commençait que lorsqu'il y avait assez d'eau pour couvrir entièrement le radier. Pour ce bassin, comme pour le n° 1, on avait soin de prendre la hauteur de l'eau au-dessus du fond, afin de déterminer la section exacte à ce point. Quand on opérait dans le bassin n° 4, ce qui n'avait lieu que pour les conduites d'un gros diamètre et dans les hautes charges, on attendait que l'eau fût arrivée au niveau du dessus des murs des bassins nos 1, 2 et 3; lorsque ces murs étaient couverts d'eau, on prenait exactement la hauteur de l'eau au-dessus des murs, toujours dans le but d'obtenir la superficie exacte de la section.

Pour mesurer la quantité d'eau perdue par infiltration ou par la vanne de décharge, on laissait, à la fin de chaque expérience, les bassins nos 3 et 4 remplis pendant quelques minutes, on mesurait l'abaissement au moyen du flotteur, et l'on en concluait la perte par minute. Cet abaissement a presque toujours été insignifiant; on a cependant eu soin d'en tenir compte.

La forme des bassins ne correspondant pas à un rectangle parfait, à parois verticales, pour obtenir le cube de l'eau on prenait une moyenne entre la section inférieure et la section supérieure, et l'on multipliait cette moyenne par la hauteur observée.

L'eau du bassin n° 1 se vidait au moyen d'un conduit circulaire pratiqué dans l'épaisseur du mur de séparation. A la sortie de ce conduit, sur le bassin n° 3, était adapté un boyau en cuir d'une longueur égale à la hauteur de ce mur. Au signal donné pour le commencement de l'expérience, une personne relevait promptement ce boyau pendant qu'une autre observait la hauteur de l'eau.

Les eaux contenues dans les bassins n^{os} 3 et 4 s'écoulaient à la Seine par la vanne V (pl. II, fig. 3) existant contre la paroi sud de ces bassins. On levait et l'on baissait successivement cette vanne au moyen de la tige OP.

Le bassin n° 5 (pl. III, fig. 9 et 10) était un cylindre en fonte AB de $0^m,96$ de diamètre et $2^m,72$ de hauteur. Une bonde de fond avait été placée en A pour vider le bassin après chaque expérience. On levait cette bonde au moyen du levier BCD, à l'extrémité duquel était attaché un fil de fer avec une poignée E pour la manœuvre.

A l'extérieur était un tube en verre d'un faible diamètre, en communication avec le cylindre. On dressait un double mètre contre ce tube, on mesurait la hauteur de l'eau dans le tube au commencement de l'expérience, on prenait ensuite la hauteur à la fin, et la différence entre les deux hauteurs donnait l'élévation de l'eau dans le cylindre pendant l'expérience. La section de ce bassin était de $0^m,723823$.

Le bassin n° 6 était un autre cylindre en fonte GH (pl. III, fig. 7 et 9) de $0^m,328$ de diamètre et $2^m,50$ de hauteur, avec un tube de verre de $0^m,004$ de diamètre pour mesurer la hauteur de l'eau. On vidait ce cylindre au moyen d'un orifice que l'on fermait avec un tampon en bois. La section du bassin n° 6, en tenant compte de celle du tube de verre, était de $0^m,08451$.

Enfin, le bassin n° 7 était composé d'un tuyau en plomb RS de $0^m,10$ de diamètre et de $2^m,50$ de hauteur, avec un tube en verre de $0^m,0045$ de diamètre pour mesurer la hauteur de l'eau. En R était adapté un robinet pour l'écoulement de l'eau. La

section de ce bassin, y compris celle du tube de verre, était de $0^{m},00787$.

Dans la plupart des expériences, on a toujours opéré avec la charge absolue des bassins de Chaillot ou de la cuve. Pour faire varier la charge, à chaque expérience on rétrécissait la section du robinet de prise d'eau. Ces manœuvres étaient faciles pour les grosses conduites, mais elles présentaient des difficultés pour les conduites d'un faible diamètre. Pour les éviter, on a créé un nouvel appareil, au moyen duquel on formait des réservoirs, à niveau constant, pour chaque charge que l'on voulait soumettre aux expériences.

Cet appareil (pl. III, fig. 11 et 11 *bis*) consistait en une colonne en fonte AB composée de tuyaux de $0^{m},25$ à joints à brides; un tuyau en plomb de $0^{m},014$ de diamètre portait en B l'eau qui alimentait le réservoir pendant les expériences. Un robinet *r* servait à intercepter toute communication, ou à modérer l'écoulement de manière à ne donner que la quantité d'eau nécessaire. On réglait aussi quelquefois l'écoulement au moyen d'un robinet R qui servait en même temps à purger d'air le grand cylindre. Lorsque ce robinet était ouvert, le trop-plein se répandait dans le jardin par un tuyau en plomb RD de $0^{m},027$ (fig. 2 et 11). A une tubulure située au bas de la colonne on avait soudé un tuyau en plomb CE de $0^{m},027$ de diamètre, sur toute la longueur duquel avaient été greffées des tubulures F, G, H, etc. bouchées avec des tampons en bois. Une échelle était dressée contre la colonne AB pour la manœuvre des tampons. Quand on voulait opérer avec la plus faible charge, on enlevait le tampon F, et au moyen du robinet *r* on réglait l'arrivée de l'eau en B, de manière à ne laisser échapper qu'une faible quantité d'eau par l'orifice F; on avait ainsi un réservoir à niveau constant en F. Pour passer à une charge plus forte, on enlevait un des tampons supérieurs, H par exemple, et l'on bouchait tous les tampons inférieurs. La charge la plus forte s'obtenait en tenant tous les tampons fermés, et en laissant déborder l'eau par le haut de la colonne AB.

Les expériences avec cet appareil n'ont eu lieu que sur les conduites en fer étiré de $0^m,0122$ et $0^m,0266$ de diamètre. Un robinet d'arrêt r_2 avait été établi à l'origine du tuyau en expérience. En C était placé le tuyau du cinquième manomètre; en J et en K les tuyaux des quatrième et troisième manomètres qui fonctionnaient de la même manière que pour les autres conduites avec la charge des bassins.

Enfin, un dernier appareil avait été placé dans la cour des machines pour les expériences sur les conduites en plomb et en verre. C'était le réservoir à niveau constant que nous venons de décrire, transporté sur un autre point avec de légères modifications.

On avait amené le cylindre de 1 mètre de diamètre derrière le magasin des métaux, on l'avait placé verticalement sur la calotte (pl. III, fig. 12), et sur ce cylindre on avait rapporté une partie des tuyaux de $0^m,25$ avec le tuyau en plomb garni de tubulures pour créer à volonté des réservoirs à différents niveaux. En R était placé un robinet pour intercepter au besoin la communication entre le cylindre et le tuyau RF; en R_1 existait un autre robinet sur la conduite destinée à faire connaître exactement la hauteur de l'eau dans le cylindre ou la charge.

La prise d'eau établie sur la conduite des bassins amenait l'eau au réservoir par un tuyau en plomb GH de $0^m,041$ de diamètre. Un robinet G servait à régler l'écoulement.

Les conduites soumises aux expériences étaient greffées en K sur une tubulure située au-devant du cylindre. Un robinet avait été placé en E pour arrêter l'écoulement quand on le jugeait nécessaire. Les conduites placées sur des dés en briques longeaient le mur ouest et aboutissaient, vers la clôture, du côté du quai de Billy, à un cylindre précédemment décrit, et qui avait servi aux expériences sur les conduites de petits diamètres.

Pour les conduites en plomb, les manomètres ayant été placés à 25 mètres de distance l'un de l'autre, on opérait sur une longueur de 50 mètres.

Pour la conduite en verre, il a fallu placer les manomètres à des joints de tuyaux; aussi ces manomètres ne se trouvaient pas également espacés : entre les deux manomètres d'amont, il y avait $23^m,29$, et entre ceux d'aval $21^m,57$; on opérait sur $44^m,86$.

La planche graduée des manomètres à eau avait été transportée contre la face ouest du bâtiment des machines; des barres de fer scellées dans le mur remplaçaient l'échelle qui servait à observer la hauteur de l'eau dans les manomètres.

La disposition des robinets des manomètres était la même que pour les autres conduites.

Enfin, dans ces dernières expériences, on s'est servi des bassins de jauge n^{os} 5, 6 et 7.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

Les conduites soumises aux expériences ont toutes été posées avec un soin particulier sur une pente en sens inverse de l'écoulement de l'eau. On enfonçait le cordon jusqu'à l'extrémité de l'emboîtement, afin d'avoir des joints très-peu sensibles à l'intérieur.

Avant de commencer les expériences, on a toujours essayé les conduites en les mettant en charge, et la moindre fuite, le plus petit suintement ont été immédiatement réparés.

Après la pose de la conduite, on s'occupait de l'établissement des manomètres. L'emplacement des manomètres 1, 2 et 3 était déterminé avec soin. Après avoir placé le manomètre 2 près du poteau des manomètres, à un point convenable pour ne pas gêner la manœuvre, on mesurait 50 mètres en amont et 50 mètres en aval pour fixer la position des deux autres, 1 et 3. Le mesurage se faisait avec une règle de fer de 5 mètres de longueur, et à l'aide d'équerres et de pointes à tracer.

Sur les tuyaux en fonte de $0^m,0801$ et au-dessus, les robinets des manomètres vissés dans l'épaisseur de la fonte ont été limés circulairement en dessous pour leur donner la courbure du tuyau, et l'épaisseur du pas de vis a été exactement calculée pour affleurer la paroi intérieure : cette condition était indispensable.

Sur les tuyaux au-dessous de $0^m,0801$, et sur ceux en tôle et bitume, les robinets des manomètres ont été soudés au-dessus d'un trou de 2 à 3 millimètres de diamètre.

Des robinets ou des orifices placés aux points hauts des conduites des manomètres permettaient de faire échapper l'air qui se logeait dans ces points hauts. Les orifices étaient bouchés avec des chevilles en bois.

Les conduites, les robinets, les joints, les chevilles des manomètres ont été l'objet d'une surveillance incessante : souvent on a recommencé des expériences parce qu'à la fin on découvrait une fuite presque insignifiante sur un point quelconque de ces appareils.

Avant de commencer les expériences sur une conduite, on essayait les manomètres; pour cela on mettait la conduite en charge, on enlevait les chevilles, et on ouvrait les robinets des manomètres. On éprouvait toujours beaucoup de difficulté, dans la première expérience, à chasser l'air contenu dans les conduites des manomètres; il fallait souvent laisser couler l'eau longtemps avec la plus forte charge possible. Dans les expériences sur la conduite de $0^m,0122$, des manœuvres faites pendant une journée entière n'ont donné aucun résultat satisfaisant; il a fallu renoncer ce jour-là aux expériences. On a laissé couler l'eau toute la nuit, et le lendemain les manomètres fonctionnaient convenablement.

Pour s'assurer que les manomètres étaient purgés d'air, on comparait les différences de hauteurs entre le premier et le deuxième manomètre, et entre le deuxième et le troisième. Ces deux différences auraient dû être toujours égales, si les diamètres moyens des deux parties de la conduite avaient été parfaitement égaux; mais comme cette condition ne pouvait jamais être remplie, on s'arrêtait lorsqu'on avait obtenu deux nombres qui différaient peu l'un de l'autre, et l'on avait recours à une deuxième vérification qui consistait à mettre l'eau au repos; s'il n'y avait plus d'air, les manomètres devaient se trouver exactement de niveau.

Lorsqu'il en était ainsi, on commençait les expériences. Presque toutes ont été faites en partant des faibles charges. Lorsqu'on avait

la charge que l'on voulait, on plaçait des épingles pour marquer les hauteurs des manomètres, et on laissait couler l'eau pendant un temps assez long pour lui permettre de prendre son régime normal. Lorsque les manomètres restaient fixes, la condition étant remplie, on procédait au jaugeage du débit de la conduite.

Une personne[1], et autant que possible la même, a été chargée de relever les hauteurs des manomètres. Pour les expériences avec de faibles charges, on s'astreignait à rester sur l'échelle pendant toute la durée de l'expérience, afin d'avoir les yeux constamment fixés sur les manomètres. Si l'on remarquait un changement assez notable dans les hauteurs, ou une oscillation d'une amplitude extraordinaire, on recommençait l'expérience.

De plus, la personne chargée d'observer les hauteurs visitait scrupuleusement la conduite, les manomètres et les autres appareils pour s'assurer que tout fonctionnait convenablement.

Les expériences dans les hautes charges ont donné beaucoup de peine, parce qu'il fallait avoir recours aux manomètres à mercure. Jamais on n'a pu faire deux expériences consécutives sans refaire un joint; souvent même on a été obligé de les réparer plusieurs fois dans le cours d'une même expérience.

Pour avoir une vérification des calculs que nécessitait l'usage des manomètres à mercure, on laissait ouverts les manomètres ordinaires qui pouvaient accuser des hauteurs, c'est-à-dire le deuxième quelquefois, mais toujours le premier. On avait ainsi des hauteurs d'eau que l'on comparait avec les hauteurs correspondantes données par les manomètres à mercure.

On apportait aussi une très-grande attention au jaugeage du débit des conduites. On s'est presque toujours servi de la même montre à secondes; si la manœuvre n'était pas faite avec assez de précision, soit au commencement, soit à la fin, si la plus légère perte était remarquée, on recommençait l'expérience.

Le mesurage des diamètres moyens des conduites a été également l'objet de précautions toutes particulières.

[1] M. Regnier.

Ces précautions sont indiquées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

RÉSULTAT DES EXPÉRIENCES.

Nous donnerons maintenant les résultats des expériences faites au moyen des vingt-deux tuyaux de conduite dont l'état, la nature et le diamètre ont été précédemment indiqués.

Nous croyons toutefois devoir faire précéder ces tableaux de la description des moyens adoptés pour la détermination des diamètres.

On se rappelle que vingt-deux tuyaux ont été soumis aux épreuves, savoir :

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES.		NATURE DES TUYAUX.	OBSERVATIONS.
	mèt.			
1	0,0122			
2	0,0266	3	Fer étiré.	
3	0,0395			
4	0,014			
5	0,027	3	Plomb.	
6	0,041			
7	0,0268			
8	0,0826	4	Tôle et bitume.	
9	0,196			
10	0,285			
11	0,04968	1	Verre.	
12	0,0350			
13	0,0364			
14	0,0795			
15	0,0801			
16	0,0819			
17	0,137	11	Fonte.	
18	0,188			
19	0,2432			
20	0,2447			
21	0,297			
22	0,50			
		22		

Les diamètres des conduites nos 1, 2 et 3 ont été évalués au moyen du volume d'eau qu'elles pouvaient contenir. Ce volume était tiré d'un réservoir d'une section bien déterminée placé dans les combles de la machine à feu de Chaillot, et sous lequel les tuyaux étaient verticalement disposés par fractions de longueur qui s'élevaient jusqu'à 10.

A chaque opération on tenait compte de l'abaissement observé dans le réservoir, et le produit de la somme de ces abaissements successifs par la section du réservoir donnait un cube qui, divisé par la longueur totale des conduites soumises à l'expérience, permettait d'obtenir la section moyenne et, par suite, le diamètre moyen du tuyau.

Les conduites nos 4, 5 et 6 en plomb refoulé avaient un diamètre parfaitement bien déterminé.

Les conduites nos 7 et 8 en tôle et bitume et n° 11 en verre ont été soumises au premier procédé décrit.

Lorsque le diamètre de certaines conduites était trop considérable pour que l'on pût recourir aisément à ce procédé, ou lorsqu'il s'agissait de tuyaux recouverts de dépôts, on mesurait les diamètres au moyen de la capacité totale des conduites, ces dernières étant en place.

On a opéré de cette manière pour la conduite en bitume n° 9, et pour les conduites en fonte nos 12, 13, 14, 15, 19 et 20.

Voici comment on exécutait ce mesurage :

1° On faisait démonter le tuyau extrême, c'est-à-dire le tuyau contigu au réservoir alimentaire placé en tête de la conduite, et vers lequel était dirigée la pente; l'eau s'écoulait donc tout entière.

Pendant cette première opération on tenait fermé le robinet-vanne placé à l'autre extrémité de la conduite, en aval du cylindre vertical situé vers les bassins de jauge : ce cylindre verticalement établi était préalablement rempli d'eau.

2° On tamponnait ensuite l'extrémité amont[1] de la conduite, en ayant soin d'adapter à ce tampon un tuyau recourbé avec robinet

[1] Côté du réservoir alimentaire.

à l'extrémité pour permettre à l'air de s'échapper pendant le remplissage qui s'opérait, au moyen du cylindre vertical, par l'ouverture du robinet-vanne.

Inutile de dire que l'on avait soin de noter exactement la hauteur de l'eau dans ce dernier cylindre.

Un robinet, toujours pour faciliter l'échappement de l'air, était placé au milieu de la conduite.

3° Le robinet-vanne de l'origine était ouvert; deux observateurs placés au milieu et à l'extrémité de la conduite, côté du tampon, fermaient les robinets à air aussitôt que l'eau paraissait.

On descendait alors également le robinet-vanne, et de l'abaissement de l'eau dans le cylindre vertical on déduisait la capacité de la conduite et par suite son diamètre moyen.

Les diamètres des conduites n^{os} 10, 16, 17, 18, 21, 22 ont été obtenus à l'aide de mesures directes.

C'est par cette succession de procédés que l'on est arrivé avec la plus grande précision à la détermination des diamètres indiqués au commencement de ce chapitre.

Les tableaux suivants présentent le détail des opérations exécutées.

CONDUITE DE 0m,0122 (N° 1).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,000	0,149	0,149	10,686
2	0,149	0,314	0,155	10,550
3	0,314	0,464	0,150	10,505
4	0,464	0,630	0,166	10,917
5	0,630	0,789	0,159	10,635
6	0,789	0,954	0,165	11,024
7	0,954	1,120	0,166	10,730
8	1,120	1,264	0,144	10,657
9	1,264	1,440	0,176	11,066
10	1,440	1,603	0,163	10,708
	TOTAUX.....		1,603	107,472

La section du tuyau $= \frac{1,603 \times 0,00787}{107,472} = 0,000,117$,
laquelle correspond à un diamètre de 0m,0122.

CONDUITE DE 0m,0266 (N° 2).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

1	2,400	1,690	0,710	9,914
2	1,690	0,975	0,715	10,295
3	0,975	0,281	0,694	9,812
4	2,400	1,686	0,714	9,933
5	1,686	1,038	0,648	9,290
6	1,038	0,305	0,733	10,468
7	2,400	1,692	0,708	9,956
8	1,692	0,998	0,694	9,845
9	0,998	0,320	0,678	9,900
10	1,250	0,559	0,691	9,408
	TOTAUX.....		6,985	98,821

La section du tuyau $= \frac{6,985 \times 0,00787}{98,821} = 0,000,556$,
laquelle correspond à un diamètre de 0m,0266.

CONDUITE DE 0m,0395 (N° 3).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

1 et 3	1,270	0,565	0,705	5,037
2	0,810	0,220	0,590	3,835
4	2,020	1,413	0,607	3,822
5	1,443	0,840	0,603	3,866
6	1,438	0,832	0,606	3,827
7	0,840	0,260	0,580	3,790
8	2,057	1,438	0,619	3,699
9	0,851	0,267	0,584	3,887
10	1,413	0,810	0,603	3,755
11	1,416	0,797	0,619	3,799
12	0,832	0,230	0,602	3,824
13	2,027	1,429	0,598	3,873
14	2,048	1,443	0,605	3,862
15	1,980	0,390	0,590	3,865
16	1,420	0,810	0,610	3,850
17	1,429	0,851	0,578	3,944
18	1,390	0,817	0,573	3,790
19	2,025	1,410	0,615	3,827
20	0,817	0,207	0,610	3,831
21	2,170	1,551	0,619	3,857
22	2,008	1,416	0,592	3,892
23	0,797	0,250	0,547	3,668
24	1,551	0,933	0,618	3,808
25	0,810	0,210	0,600	3,707
26	2,022	1,420	0,602	3,706
27	0,933	0,340	0,593	3,869
28	1,410	0,838	0,572	3,878
29	0,838	0,220	0,618	3,823
	TOTAUX.....		16,858	107,991

La sect. du tuyau $= \frac{16,858 \times 0,00787}{107,991} = 0,001,2285$,
laquelle correspond à un diamètre de 0m,0395.

CONDUITES N°s 4, 5, 6 (0m,014; 0m,027; 0m,041).

Les tuyaux composant ces conduites étant en plomb refoulé, ne pouvaient donner lieu à aucune incertitude sur l'uniformité de leur diamètre. Ils n'ont donc été soumis à aucun procédé particulier de mesurage.

CONDUITE DE 0m,0268 (N° 7).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	2,460	2,251	0,209	2,790
2	2,251	2,060	0,191	2,783
3	2,060	1,861	0,199	2,764
4	1,861	1,671	0,190	2,787
5	1,671	1,460	0,211	2,787
6	1,460	1,270	0,190	2,776
7	1,270	1,055	0,215	2,796
8	1,055	1,865	0,190	2,796
9	0,865	0,668	0,197	2,788
10	0,668	0,472	0,196	2,785
11	2,460	2,243	0,217	2,792
12	2,243	2,051	0,192	2,795
13	2,051	1,818	0,233	2,795
14	1,818	1,600	0,218	2,770
15	1,600	1,407	0,193	2,791
16	1,407	1,175	0,232	2,790
17	1,175	0,987	0,188	2,790
18	0,987	0,787	0,200	2,785
19	0,787	0,603	0,184	2,788
20	0,603	0,415	0,188	2,790
21	2,460	2,263	0,197	2,789
22	2,263	2,055	0,208	2,797
23	2,055	1,873	0,182	2,771
24	1,873	1,671	0,202	2,788
25	1,671	1,470	0,201	2,796
26	1,470	1,271	0,199	2,790
27	1,271	1,075	0,196	2,776
28	1,075	0,880	0,195	2,799
29	0,880	0,686	0,194	2,799
30	0,686	0,470	0,216	2,798
31	2,082	1,892	0,190	2,765
32	1,892	1,702	0,190	2,779
33	1,702	1,498	0,204	2,785
34	1,498	1,300	0,198	2,799
35	1,300	1,114	0,186	2,775
36	1,114	0,902	0,212	2,795
37	0,902	0,706	0,196	2,787
	Totaux.....		7,399	103,126

La sect. du tuyau $= \frac{7,399 \times 0,00787}{103,126} = 0,00056465$,
laquelle correspond à un diamètre de 0m,0268.

CONDUITE DE 0m,0826 (N° 8).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,08451.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,200	0,382	0,182	2,893
2	0,382	0,563	0,181	2,888
3	0,563	0,746	0,183	2,894
4	0,747	0,933	0,187	2,893
5	0,933	1,113	0,180	2,903
6	1,113	1,296	0,183	2,890
7	1,296	1,479	0,183	2,891
8	1,479	1,665	0,186	2,904
9	1,665	1,852	0,187	2,907
10	1,852	2,045	0,193	2,893
11	0,197	0,388	0,191	2,903
12	0,388	0,568	0,180	2,896
13	0,568	0,747	0,179	2,886
14	0,747	0,928	0,181	2,906
15	0,928	1,110	0,182	2,893
16	1,110	1,293	0,183	2,902
17	1,293	1,476	0,183	2,894
18	1,476	1,665	0,189	2,893
19	1,665	1,844	0,179	2,896
20	1,844	2,030	0,186	2,887
21	0,241	0,420	0,179	2,890
22	0,420	0,601	0,181	2,907
23	0,601	0,788	0,187	2,896
24	0,788	0,969	0,181	2,890
25	0,969	1,157	0,188	2,898
26	1,157	1,345	0,188	2,899
27	1,345	1,523	0,178	2,901
28	1,523	1,698	0,175	2,890
29	1,698	1,880	0,182	2,902
30	1,880	2,065	0,185	2,898
31	0,275	0,457	0,182	2,902
32	0,457	0,644	0,187	2,902
33	0,644	0,824	0,180	2,900
34	0,824	1,011	0,187	2,895
35	1,011	1,200	0,189	2,896
36	1,200	1,385	0,185	2,893
37	1,385	1,570	0,185	2,910
	Totaux.....		6,797	107,181

La section du tuyau $= \frac{6,797 \times 0,08451}{107,181} = 0,0053593$,
laquelle correspond à un diamètre de 0m,0826.

CONDUITE DE 0m,196 (N° 9).

Pour déterminer le diamètre moyen de cette conduite, on a cherché quelle était sa capacité totale, en la remplissant à l'aide du cylindre en fonte auquel son extrémité d'amont était ajustée, et dont elle était séparée par un robinet-vanne.

On est ainsi arrivé au résultat suivant :

Longueur de la conduite remplie d'eau..... 107m,692
Abaissement du niveau de l'eau dans le cylindre, à partir de la levée du robinet-vanne jusqu'à la fin du remplissage..... 1 ,587
Le diamètre du cylindre étant de..... 1m,615
Et sa section de..... 2 ,0485

La section du tuyau était de $\frac{2{,}0485 \times 1{,}587}{107{,}692} = 0{,}0319$, laquelle correspond à un diamètre de 0m,196.

NUMÉROS D'ORDRE.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. Au commencement du remplissage.	NIVEAU DE L'EAU dans LE BASSIN DE JAUGE. A la fin du remplissage.	DIFFÉRENCE.	LONGUEUR des tuyaux.	CAPACITÉ des TUYAUX.	DIAMÈTRE OBTENU AU MOYEN DE LA CONTENANCE.	DIAMÈTRES. AMONT.	DIAMÈTRES. AVAL.	DIAMÈTRES. MOYEN.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	1,922	1,662	0,260	1,163	0,002,046,20	0,0473	0,0460	0,0470	0,04650
2 et 3	1,662	1,092	0,570	2,300	0,004,485,90	0,0498	0,0520	0,0485	0,05025
4 et 5	1,092	0,460	0,632	2,322	0,004,973,84	0,0522	0,0525	0,0530	0,05275
6 et 7	1,964	1,460	0,504	2,323	0,003,966,48	0,0466	0,0475	0,0465	0,04700
8 et 9	1,460	0,833	0,627	2,310	0,004,934,49	0,0521	0,0450	0,0490	0,04700
10	0,833	0,544	0,289	1,160	0,002,274,43	0,0500	0,0495	0,0450	0,04725
11 et 12	1,934	1,286	0,648	2,335	0,005,099,76	0,0527	0,0480	0,0520	0,04850
13 et 14	1,998	1,459	0,539	2,330	0,004,241,93	0,0482	0,0440	0,0470	0,04550
15 et 16	1,459	0,896	0,563	2,323	0,004,430,81	0,0493	0,0500	0,0530	0,05150
17 et 18	0,896	0,270	0,626	2,320	0,004,926,62	0,0520	0,0530	0,0480	0,05050
19 et 20	1,974	1,438	0,536	2,313	0,004,218,32	0,0482	0,0485	0,0500	0,04925
21 et 22	1,438	0,855	0,583	2,390	0,004,588,21	0,0494	0,0485	0,0490	0,04875
23 et 24	0,855	0,285	0,570	2,322	0,004,485,90	0,0496	0,0480	0,0525	0,05025
25 et 26	2,000	1,401	0,599	2,320	0,004,714,13	0,0509	0,0530	0,0490	0,05100
27 et 28	1,401	0,853	0,548	2,318	0,004,312,76	0,0487	0,0470	0,0480	0,04750
29 et 30	0,853	0,290	0,563	2,320	0,004,430,81	0,0493	0,0530	0,0520	0,05250
31 et 32	1,865	1,301	0,564	2,310	0,004,438,68	0,0495	0,0490	0,0475	0,04825
33 et 34	1,301	0,746	0,555	2,320	0,004,367,85	0,0490	0,0480	0,0475	0,04775
35 et 36	0,746	0,223	0,523	2,325	0,004,116,01	0,0475	0,0475	0,0505	0,04900
37 et 38	1,921	1,350	0,571	2,321	0,004,493,77	0,0497	0,0500	0,0520	0,05100
39 et 40	1,350	0,789	0,561	2,312	0,004,415,07	0,0493	0,0525	0,0460	0,04925
41 et 42	0,789	0,139	0,650	2,425	0,005,115,50	0,0518	0,0530	0,0495	0,05125
		Totaux.....	12,081	48,882	0,095,077,47	1,0931	1,0825	1,0825	1,08250
					Divisant par 48,882 on a 0,0498	Divisant par 22on a 0,04968	Divisant par 22 on a 0,0492		

CONDUITE EN VERRE DE 0m,04968 (N° 11).

SUPERFICIE DU BASSIN DE JAUGE = 0m,00787.

La sect. du tuyau = $\frac{12{,}081 \times 0{,}00787}{48{,}882} = 0{,}00194504$, laquelle correspond à un diamètre de 0m,0498.

Cette conduite présentait dans ses éléments des irrégularités telles qu'il m'a paru convenable, pour les bien signaler, de présenter le volume de chaque groupe binaire de tuyaux, ainsi que le diamètre moyen de chacun de ces groupes.

J'ai cru de plus qu'il était nécessaire de présenter les résultats que donnaient les mesures directes pour faire apprécier la conicité des tuyaux.

Le tableau qui précède indique les résultats cherchés.

CONDUITE DE $0^m,0359$ (N° 12).
——————— $0^m,0364$ (N° 13). N° 12 nettoyé.
——————— $0^m,0795$ (N° 14).
——————— $0^m,0801$ (N° 15). N° 14 nettoyé.
——————— $0^m,2432$ (N° 19).
——————— $0^m,2447$ (N° 20). N° 19 nettoyé.

On a employé pour déterminer le diamètre moyen de ces six conduites le procédé auquel on a eu recours pour obtenir la section de la conduite en tôle et bitume (N° 9).

Les éléments des calculs ont été réunis dans le tableau synoptique ci-après :

NUMÉROS DES TUYAUX.	LONGUEUR REMPLIE.	CYLINDRE DE JAUGE. ABAISSEMENT de l'eau dans ce cylindre.	CYLINDRE DE JAUGE. DIAMÈTRE.	CYLINDRE DE JAUGE. SECTION.	SECTION DES TUYAUX.	DIAMÈTRES cherchés.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.
12	108,862	1,38	0,319	0,0799	$\frac{0,0799 \times 1,38}{108,862} = 0,001,013$	0,0359
13	108,862	1,42	0,319	0,0799	$\frac{0,0799 \times 1,42}{108,862} = 0,001,042$	0,0364
14	109,450	0,265	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 0,265}{109,450} = 0,004,96$	0,0795
15	109,450	0,269	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 0,269}{109,450} = 0,005,035$	0,0801
19	108,186	2,454	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 2,454}{108,186} = 0,046,466$	0,2432
20	108,186	2,484	1,615	2,0485	$\frac{2,0485 \times 2,484}{108,186} = 0,047$	0,2447

Les diamètres moyens des conduites N° 10 ($0^m,285$),
——————— N° 16 ($0^m,0819$),
——————— N° 17 ($0^m,137$),
——————— N° 18 ($0^m,188$),
——————— N° 21 ($0^m,297$),
——————— N° 22 ($0^m,50$),

ont été obtenus au moyen de mesures directes : on déterminait, à l'aide d'un compas à pointes recourbées, deux diamètres rectangulaires à chaque extrémité des tuyaux.

On est arrivé ainsi aux résultats suivants :

CONDUITE N° 10.

NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRES. À UN BOUT. Maximum.	À UN BOUT. Minimum.	À L'AUTRE BOUT. Maximum.	À L'AUTRE BOUT. Minimum.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,278	0,275	0,277	0,277
2	0,294	0,293	0,280	0,279
3	0,294	0,293	0,279	0,276
4	0,291	0,290	0,280	0,280
5	0,293	0,289	0,280	0,279
6	0,294	0,292	0,283	0,276
7	0,292	0,290	0,283	0,277
8	0,293	0,291	0,280	0,279
9	0,295	0,291	0,279	0,277
10	0,293	0,293	0,281	0,277
11	0,292	0,291	0,278	0,274
12	0,291	0,289	0,279	0,277
13	0,291	0,288	0,278	0,273
14	0,291	0,289	0,279	0,277
15	0,292	0,289	0,278	0,277
16	0,293	0,289	0,280	0,276
17	0,290	0,289	0,277	0,272
18	0,292	0,288	0,279	0,273
19	0,291	0,290	0,280	0,280
20	0,292	0,291	0,281	0,278
21	0,292	0,290	0,282	0,279
22	0,292	0,287	0,282	0,280
23	0,290	0,287	0,282	0,279
24	0,296	0,293	0,280	0,277
25	0,294	0,291	0,283	0,278
26	0,294	0,292	0,282	0,277
27	0,292	0,292	0,279	0,279
28	0,292	0,292	0,276	0,272
29	0,292	0,290	0,283	0,280
30	0,292	0,292	0,281	0,278
31	0,292	0,292	0,282	0,278
32	0,296	0,294	0,285	0,280
33	0,295	0,292	0,280	0,280
34	0,295	0,292	0,282	0,276
35	0,290	0,286	0,282	0,280
36	0,296	0,294	0,281	0,280
37	0,292	0,291	0,279	0,276
38	0,292	0,289	0,279	0,275
39	0,294	0,292	0,278	0,276
40	0,293	0,290	0,282	0,280
41	0,292	0,291	0,292	0,287
	11,985	11,899	11,503	11,381

TOTAL GÉNÉRAL.. 46,768,

lequel divisé par 164 donne pour diamètre moyen 0m,285.

CONDUITE N° 16.

NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRES. À UN BOUT.	À L'AUTRE BOUT.
	mèt.	mèt.
1	0,081	0,081
2	0,082	0,082
3	0,082	0,081
4	0,084	0,081
5	0,081	0,081
6	0,082	0,081
7	0,083	0,081
8	0,084	0,081
9	0,084	0,080
10	0,084	0,079
11	0,085	0,082
12	0,085	0,080
13	0,085	0,080
14	0,082	0,080
15	0,084	0,079
16	0,084	0,080
17	0,081	0,080
18	0,083	0,080
19	0,085	0,081
20	0,084	0,079
21	0,082	0,081
22	0,081	0,082
23	0,082	0,080
24	0,085	0,081
25	0,084	0,080
26	0,084	0,079
27	0,082	0,082
28	0,084	0,080
29	0,084	0,079
30	0,085	0,080
31	0,085	0,079
32	0,085	0,080
33	0,084	0,081
34	0,084	0,081
35	0,085	0,080
36	0,084	0,079
37	0,084	0,080
38	0,084	0,080
39	0,082	0,078
40	0,084	0,080
41	0,085	0,080
42	0,084	0,080
43	0,084	0,079
44	0,084	0,081
	3,676	3,531

TOTAL GÉNÉRAL.. 7,207,

lequel divisé par 88 donne pour le diamètre moyen 0m,0819.

CONDUITE N° 17.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES. À UN BOUT. Maximum.	À UN BOUT. Minimum.	À L'AUTRE BOUT. Maximum.	À L'AUTRE BOUT. Minimum.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,134	0,133	0,135	0,134
2	0,137	0,136	0,140	0,138
3	0,136	0,136	0,140	0,138
4	0,138	0,137	0,138	0,137
5	0,136	0,135	0,138	0,136
6	0,137	0,137	0,138	0,138
7	0,140	0,139	0,139	0,138
8	0,138	0,138	0,139	0,139
9	0,137	0,137	0,140	0,138
10	0,139	0,138	0,140	0,139
11	0,135	0,135	0,141	0,138
12	0,138	0,136	0,139	0,137
13	0,138	0,138	0,137	0,137
14	0,137	0,137	0,139	0,138
15	0,136	0,135	0,137	0,136
16	0,136	0,136	0,138	0,138
17	0,136	0,135	0,137	0,136
18	0,137	0,137	0,139	0,138
19	0,136	0,134	0,137	0,136
20	0,138	0,137	0,138	0,138
21	0,137	0,135	0,136	0,136
22	0,138	0,137	0,138	0,137
23	0,138	0,137	0,138	0,137
24	0,137	0,137	0,138	0,138
25	0,137	0,136	0,138	0,137
26	0,137	0,136	0,138	0,138
27	0,137	0,137	0,137	0,136
28	0,137	0,137	0,137	0,137
29	0,135	0,134	0,138	0,138
30	0,138	0,137	0,138	0,136
31	0,134	0,134	0,134	0,136
32	0,136	0,136	0,139	0,138
33	0,136	0,136	0,138	0,138
34	0,137	0,137	0,138	0,137
35	0,137	0,137	0,138	0,138
36	0,137	0,137	0,137	0,136
37	0,137	0,136	0,137	0,136
38	0,138	0,137	0,138	0,137
39	0,137	0,136	0,139	0,138
40	0,137	0,136	0,138	0,137
41	0,137	0,137	0,137	0,137
42	0,137	0,136	0,138	0,137
43	0,138	0,138	0,138	0,138
44	0,137	0,136	0,139	0,138
45	0,136	0,135	0,140	0,138
46	0,137	0,135	0,139	0,138
47	0,139	0,138	0,138	0,138
48	0,136	0,135	0,138	0,137
49	0,138	0,137	0,139	0,138
	6,701	6,678	6,767	6,727

TOTAL GÉNÉRAL.. 26,873,

lequel divisé par 196 donne pour le diamètre moyen 0m,137.

CONDUITE N° 18.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES. À UN BOUT. Maximum.	À UN BOUT. Minimum.	À L'AUTRE BOUT. Maximum.	À L'AUTRE BOUT. Minimum.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,188	0,187	0,189	0,189
2	0,188	0,188	0,185	0,185
3	0,190	0,189	0,187	0,187
4	0,191	0,190	0,188	0,187
5	0,190	0,189	0,187	0,186
6	0,190	0,190	0,186	0,186
7	0,187	0,186	0,189	0,189
8	0,191	0,190	0,185	0,185
9	0,189	0,189	0,185	0,184
10	0,187	0,187	0,189	0,189
11	0,186	0,186	0,189	0,188
12	0,183	0,183	0,187	0,187
13	0,187	0,187	0,186	0,185
14	0,188	0,187	0,187	0,186
15	0,187	0,187	0,189	0,187
16	0,187	0,186	0,188	0,188
17	0,188	0,188	0,187	0,186
18	0,189	0,188	0,189	0,189
19	0,186	0,185	0,188	0,188
20	0,188	0,188	0,187	0,186
21	0,187	0,185	0,187	0,187
22	0,190	0,190	0,187	0,187
23	0,191	0,191	0,188	0,187
24	0,189	0,187	0,187	0,187
25	0,188	0,188	0,190	0,190
26	0,187	0,187	0,188	0,187
27	0,188	0,187	0,190	0,189
28	0,187	0,187	0,189	0,189
29	0,188	0,187	0,190	0,190
30	0,189	0,188	0,188	0,187
31	0,186	0,185	0,188	0,188
32	0,185	0,185	0,185	0,184
33	0,189	0,187	0,189	0,189
34	0,186	0,186	0,185	0,185
35	0,188	0,187	0,188	0,188
36	0,186	0,185	0,190	0,190
37	0,189	0,189	0,190	0,190
38	0,190	0,188	0,190	0,190
39	0,191	0,190	0,189	0,187
40	0,187	0,186	0,187	0,187
41	0,188	0,186	0,185	0,185
42	0,187	0,186	0,190	0,190
43	0,187	0,187	0,185	0,185
44	0,189	0,188	0,188	0,185
	8,272	8,242	8,260	8,240

TOTAL GÉNÉRAL.. 33,014,

lequel divisé par 176 donne pour le diamètre moyen 0,m188.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES			
	À UN BOUT.		À L'AUTRE BOUT.	
	Maximum.	Minimum.	Maximum.	Minimum.
	CONDUITE N° 21.			
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,306	0,305	0,304	0,303
2	0,300	0,299	0,296	0,295
3	0,301	0,299	0,295	0,290
4	0,299	0,298	0,295	0,294
5	0,300	0,298	0,300	0,296
6	0,304	0,301	0,301	0,300
7	0,296	0,295	0,295	0,293
8	0,297	0,295	0,297	0,292
9	0,299	0,299	0,300	0,300
10	0,300	0,300	0,298	0,298
11	0,295	0,295	0,296	0,295
12	0,300	0,296	0,296	0,295
13	0,299	0,298	0,298	0,298
14	0,297	0,292	0,292	0,292
15	0,296	0,293	0,295	0,291
16	0,301	0,300	0,302	0,300
17	0,297	0,295	0,294	0,294
18	0,294	0,293	0,296	0,295
19	0,296	0,291	0,296	0,295
20	0,298	0,298	0,297	0,297
21	0,298	0,295	0,295	0,295
22	0,298	0,296	0,299	0,294
23	0,297	0,297	0,299	0,296
24	0,297	0,296	0,296	0,296
25	0,301	0,301	0,298	0,296
26	0,297	0,296	0,295	0,292
27	0,295	0,295	0,294	0,294
28	0,297	0,297	0,293	0,293
29	0,300	0,300	0,301	0,301
30	0,299	0,298	0,295	0,295
31	0,300	0,300	0,304	0,300
32	0,299	0,290	0,304	0,298
33	0,297	0,295	0,294	0,294
34	0,299	0,297	0,297	0,296
35	0,306	0,306	0,306	0,303
36	0,297	0,295	0,298	0,295
37	0,297	0,295	0,294	0,294
38	0,297	0,296	0,294	0,293
39	0,296	0,295	0,294	0,293
40	0,304	0,301	0,302	0,299
41	0,299	0,297	0,298	0,297
	12,245	12,178	12,193	12,130

TOTAL GÉNÉRAL.. 48,746, lequel divisé par 164 donne pour le diamètre moyen 0m,297.

NUMÉROS D'ORDRE.	DIAMÈTRES			
	À UN BOUT.		À L'AUTRE BOUT.	
	Maximum.	Minimum.	Maximum.	Minimum.
	CONDUITE N° 22.			
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1	0,500	0,500	0,500	0,500
2	0,501	0,500	0,500	0,500
3	0,501	0,500	0,501	0,500
4	0,502	0,501	0,501	0,500
5	0,501	0,500	0,500	0,500
6	0,501	0,500	0,501	0,500
7	0,501	0,500	0,501	0,500
8	0,501	0,500	0,502	0,501
9	0,501	0,500	0,501	0,500
10	0,503	0,501	0,501	0,501
11	0,501	0,500	0,500	0,499
12	0,501	0,501	0,501	0,500
13	0,501	0,500	0,500	0,499
14	0,502	0,500	0,500	0,500
15	0,501	0,501	0,501	0,500
16	0,502	0,501	0,502	0,502
17	0,501	0,501	0,501	0,500
18	0,501	0,500	0,501	0,501
19	0,501	0,501	0,501	0,500
20	0,500	0,500	0,502	0,501
21	0,500	0,500	0,503	0,502
22	0,501	0,501	0,505	0,502
23	0,502	0,501	0,501	0,501
24	0,503	0,500	0,502	0,501
25	0,499	0,499	0,502	0,501
26	0,498	0,497	0,501	0,500
27	0,501	0,501	0,502	0,501
28	0,501	0,501	0,500	0,500
29	0,501	0,500	0,502	0,501
30	0,502	0,499	0,502	0,500
31	0,502	0,500	0,501	0,500
32	0,502	0,501	0,502	0,502
33	0,500	0,500	0,502	0,501
34	0,502	0,500	0,502	0,499
35	0,501	0,500	0,502	0,501
36	0,500	0,499	0,501	0,499
37	0,501	0,499	0,502	0,497
38	0,502	0,501	0,504	0,502
39	0,500	0,500	0,500	0,500
40	0,501	0,497	0,502	0,499
41	0,501	0,501	0,503	0,502
42	0,499	0,499	0,500	0,500
43	0,500	0,500	0,500	0,498
44	0,501	0,501	0,501	0,497
45	0,500	0,499	0,500	0,500
46	0,503	0,502	0,500	0,500
	23,046	23,005	23,059	23,010

TOTAL GÉNÉRAL.. 92,120, lequel divisé par 184 donne pour le diamètre moyen 0m,50.

J'arrive maintenant aux expériences faites pour l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylind. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	
		h. m. s	h. m. s	m. s	met.	met	met	met.	met.	met.	met.	met.	met.	m
Longueur : 114m,18.													**CONDUITE DE 0m,01221**	
Nota. Les éléments dont les longueurs des conduit														
1	10 juin 1850..	12 19 0	1 49 0	30 0	1,503	0,001	1,546	0,002	1,588	0,003	1,592	0,002	1,599	0
2	11 juin 1850..	6 0 0	6 18 0	18 0	1,514	0,001	1,606	0,002	1,698	0,003	1,707	0,002	1,711	0
3	10 juin 1850..	2 25 0	2 40 0	15 0	1,52	0,001	1,674	0,002	1,824	0,003	1,842	0,002	1,848	0
4	*Idem*.....	3 7 0	3 23 0	16 0	1,535	0,001	1,811	0,002	2,065	0,003	2,095	0,002	2,10	0
5	*Idem*.....	3 54 0	4 9 0	15 0	1,546	0,001	1,924	0,002	2,30	0,003	2,338	0,002	2,344	0
6	11 juin 1850..	12 15 0	12 25 0	10 0	1,601	0,001	2,476	0,002	3,260	0,003	3,33	0,003	3,336	0
7	*Idem*.....	12 56 0	1 5 0	9 0	1,655	0,001	3,020	0,003	4,235	0,003	4,355	0,003	4,349	0
8	*Idem*.....	1 30 0	1 37 0	7 0	1,710	0,001	3,503	0,003	5,182	0,002	5,336	0,003	5,345	0
9	*Idem*.....	2 13 0	2 19 22	6 22	1,758	0,001	4,011	0,003	6,157	0,003	6,357	0,003	6,367	0
10	*Idem*.....	3 4 15	3 9 30	5 15	1,805	0,001	5,012	0,001	8,069	0,001	8,358	0,002	8,368	0
11	*Idem*.....	4 27 0	4 31 30	4 30	2,005	0,001	6,333	0,001	10,559	0,001	10,977	0,002	"	
12	15 juin 1850..	8 56 0	9 26 0	30 0	2,421	0,001	11,321	0,001	20,283	0,001	21,115	0,001	21,139	0
13	*Idem*.....	9 57 0	10 17 0	20 0	3,291	0,001	20,437	0,001	37,717	0,001	39,308	0,001	39,410	0
	Longueur : 113m,455.												**CONDUITE DE 0m,0266**	
14	5 avril 1850..	2 28 0	2 35 0	7 0	1,512	0,003	1,53	0,003	1,545	0,003	1,545	"	1,546	
15	*Idem*.....	3 19 0	3 49 0	30 0	1,528	0,002	1,607	0,002	1,680	0,002	1,6855	0,002	1,687	
16	*Idem*.....	4 17 0	4 38 0	21 0	1,565	0,002	1,8165	0,002	2,052	0,002	2,072	0,002	2,08	
17	*Idem*.....	4 54 0 5 50 0	5 06 0 6 02 0	21 0	1,619	0,003	2,139	0,004	2,634	0,005	2,68	0,005	2,693	
18	6 avril 1850...	12 28 0	12 38 0	10 0	1,708	0,001	2,690	0,002	3,645	0,006	3,732	0,006	3,759	
19	11 avril 1850..	2 57 0	3 4 0	7 0	1,815	0,001	3,398	0,001	4,941	0,002	5,081	0,002	5,130	
20	*Idem*.....	3 57 0	4 3 0	6 0	1,897	0,001	4,108	0,002	6,245	0,004	6,445	0,001	6,512	
21	12 avril 1850..	4 30 0	4 35 0	5 0	2,056	0,001	5,240	0,001	8,372	0,001	8,671	0,001	8,764	
22	*Idem*.....	1 35 0	1 39 0	4 0	2,394	0,001	7,443	0,001	12,416	0,001	12,867	0,001	13,083	
23	20 avril 1850..	5 0 0	5 4 0	4 0	25,407	0,003	30,733	0,002	35,978	0,001	36,397	0,001	36,628	
24	11 avril 1850..	4 30 0	4 33 0	3 0	3,081	0,001	11,955	0,001	20,907	0,001	21,675	0,001	21,986	
25	17 avril 1850..	3 10 0	3 12 30	2 30	3,742	0,001	16,532	0,001	29,343	0,002	30,498	0,002	30,901	
26	15 avril 1850..	2 38 0	2 40 20	2 20	4,386	0,002	19,616	0,02	35,338	0,02	36,844	0,002	37,378	

Entre le 1er	PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES. Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE. Au commencement.	A la fin.	Différence.	NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.	

DIMÈTRE (EN FER ÉTIRÉ). — SECTION : 0m,000,117.

msent sont donnés à la suite des tableaux des expériences.

ue												
0,6	0,042	0,085	0,004	0,007	0,20	1,237	1,037	7	0,00787	8,162	0,0344	19
0,8	0,092	0,184	0,009	0,004	0,50	1,653	1,153	7	*Id.*	9,074	0,0718	22
0,1	0,15	0,304	0,018	0,006	0,20	1,768	1,568	7	*Id.*	12,340	0,117	22
0,5	0,257	0,533	0,027	0,005	0,20	2,300	2,10	7	*Id.*	16,527	0,147	22,5
0,5	0,376	0,754	0,038	0,006	0,20	2,455	2,255	7	*Id.*	17,747	0,169	23
0,5	0,784	1,659	0,070	0,006	0,20	2,248	2,048	7	*Id.*	16,118	0,230	27
1,5	1,215	2,580	0,120	0,006	0,20	2,508	2,308	7	*Id.*	18,164	0,287	26,5
1,3	1,679	3,472	0,154	0,009	0,20	2,345	2,145	7	*Id.*	16,881	0,343	24,5
2,3	2,146	4,399	0,200	0,010	0,20	2,43	2,23	7	*Id.*	17,550	0,392	23,5
3,7	3,057	6,264	0,289	0,010	0,20	2,441	2,241	7	*Id.*	17,637	0,478	24,5
4,3	4,226	8,554	0,418	"	0,15	2,45	2,30	7	*Id.*	36,178	0,573	22
8,9	8,962	17,862	0,832	0,024	0,18	2,289	2,109	6	0,08451	178,232	0,846	"
7,5	17,280	34,426	1,591	0,102	0,18	2,165	1,985	6	0,08451	167,752	1,195	"

DIMÈTRE (EN FER ÉTIRÉ). — SECTION : 0m,000,556.

0,6	0,015	0,033	0,000	0,001	0,20	1,916	1,716	7	0,00787	13,505	0,0578	"
0,9	0,073	0,152	0,005	0,002	0,20	1,748	1,548	6	0,08451	130,831	0,131	"
0,95	0,2355	0,487	0,020	0,008	0,20	2,255	2,055	6	*Id.*	173,668	0,248	"
0,4	0,495	1,015	0,040	0,013	0,20 0,20	1,943 1,943	3,486	6	*Id.*	294,602	0,368	"
1,2	0,955	1,937	0,087	0,027	0,20	2,26	2,06	6	*Id.*	174,091	0,522	"
1,3	1,543	3,126	0,140	0,049	0,20	2,044	1,844	6	*Id.*	155,836	0,667	15,5
2,1	2,137	4,348	0,200	0,067	0,20	2,085	1,885	6	*Id.*	159,301	0,796	15
3,1	3,132	6,316	0,299	0,093	0,20	2,108	1,908	6	*Id.*	160,386	0,961	"
3,9	4,973	10,022	0,451	0,216	0,20	2,15	1,95	6	*Id.*	164,795	1,235	"
5,6	5,245	10,571	0,419	0,231	0,20	2,23	2,03	6	*Id.*	170,964	1,281	14
8,4	8,952	17,826	0,768	0,311	0,20	2,192	1,992	6	*Id.*	168,344	1,682	14
12,0	12,811	25,601	1,155	0,403	0,20 0,20	2,178 2,165	3,943	6	*Id.*	333,223	1,998	14
15,0	15,722	30,952	1,506	0,534	0,20	2,212	2,012	6	*Id.*	170,034	2,184	12,5

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylindre. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.
		h. m. s.	h. m. s.	m. s.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
LONGUEUR : 113m,455.														CONDUITE DE 0m,0266 D
J'ai entrepris sur cette conduite quelques expériences ayant pour but de reconnaître si l'int différences de charges existant entre le 1er et le 2e manomètre, le 2e et le 3e manomètre; po diamètre, et j'ai obtenu les résultats suivants :														
26 *bis.*	24 mai 1850...	2 35 0	2 48 0	10 0	1,685	»	2,59	0,001	3,443	0,001	3,536	0,001	39,703	0,(
26 *ter.*	*Idem*.....	4 13 0	4 26 0	13 0	1,60	»	2,10	0,001	2,577	0,001	2,63	0,001	27,351	0,(
26 *quat.*	13 juin 1850...	4 56 0	5 16 0	20 0	1,595	0,002	1,687	0,005	1,772	0,006	1,792	0,006	3,333	0.(
														EXPÉRIENCES COMPLÉMENTAIR
26a	5 avril 1850...	12 26 0	12 41 0	15 0	1,510	0,003	1,52	0,002	1,530	0,005	1,530	0,000	1,530	0,(
26b	*Idem*.....	2 13 0	2 26 0	13 0	1,5065	0,001	1,519	0,001	1,530	0,001	1,530	0,000	1,531	0,
26c	10 avril 1850..	1 53 0	2 6 25	13 25	1,507	0,001	1,522	0,001	1,532	0,001	1,532	0,000	1,533	0.
26d	13 juin 1850..	5 59 0	6 5 0	6 0	1,517	0,001	1,546	0,001	1,572	0,001	1,580	0,001	1,583	0.
LONGUEUR : 113m,36.														CONDUITE DE 0m,0395 I
27	2 mai 1850...	9 6 0	9 9 0	3 0	1,515	0,001	1,527	0,002	1,537	0,003	1,537	0,002	1,538	0.
28	*Idem*.....	9 22 0	9 42 0	20 0	1,52	0,001	1,564	0,002	1,598	0,002	1,601	0,002	1,603	0.
29	*Idem*.....	10 3 0	10 15 0	12 0	1,539	0,001	1,632	0,002	1,721	0,002	1,73	0,002	1,732	0
30	*Idem*.....	10 25 0	10 34 0	9 0	1,556	0,001	1,729	0,002	1,892	0,002	1,906	0,002	1,916	0.
31	*Idem*.....	10 48 0	10 54 0	6 0	1,59	0,001	1,921	0,010	2,240	0,020	2,269	0,020	2,285	0.
32	*Idem*.....	11 43 0	12 13 0	30 0	1,651	0,001	2,305	0,005	2,937	0,010	2,998	0,005	3,03	0
33	*Idem*.....	12 43 0	1 3 0	20 0	1,753	0,001	2,97	0,010	4,142	0,010	4,259	0,010	4,322	0
34	*Idem*.....	1 28 0	1 48 0	20 0	1,82	0,001	3,41	0,010	4,943	0,020	5,097	0,015	5,180	0
35	*Idem*.....	2 7 0	2 22 0	15 0	1,924	0,001	4,137	0,010	6,272	0,020	6,485	0,015	6,605	0
36	11 mai 1850...	3 37 0	2 48 0	11 0	2,634	0,000	8,911	0,002	14,949	0,004	15,550	0,004	15,934	0
37	*Idem*.....	4 39 0	4 48 0	9 0	3,088	0,000	12,068	0,002	20,641	0,001	21,542	0,001	22,054	0
38	*Idem*.....	5 4 0	5 12 0	8 0	3,541	0,000	14,968	0,002	25,949	0,002	27,096	0,002	27,753	0
LONGUEUR : 52m,44.														CONDUITE DE 0m,014
39	9 octobre 1851.	4 0 0	4 10 0	10 0	0,628	»	0,647	»	0,660	»	»		0,676	
40	*Idem*.....	4 27 0	4 35 0	8 0	0,632	»	0,716	»	0,800	»			0,815	
41	*Idem*.....	4 56 0	5 1 0	5 0	0,635	»	0,8515	0,002	1,066	»	»		1,097	
42	*Idem*.....	5 15 0	5 18 0	3 0	0,640	»	1,27	»	1,903	»			1,977	
43	10 octob. 1851.	1 44 0	1 54 0	10 0	0,647	0,001	2,175	0,001	3,720	0,001			3,935	0
44	*Idem*.....	1 35 0	1 45 0	10 0	0,651	0,001	3,494	0,001	6,370	0,001			6,765	0
45	*Idem*.....	2 30 0	2 39 0	9 0	0,653	0,001	4,69	0,001		0,001				

Entre le 1er	PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES. Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE. Au commencement.	A la fin.	Différence.	NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.

DIMÈTRE (EN FER ÉTIRÉ). [Suite.] — SECTION : 0m,000,556.

lution au centre de la conduite d'une forte vitesse étrangère serait susceptible de modifier les e, j'ai placé à la tête de la conduite un diaphragme en cuivre percé d'un orifice de 0m,0005 de

m.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.
0,5	0,853	1,758	0,000	0,000	0,20	2,168	1,968	6	0,08451	166,316	0,489	20
0,5	0,477	0,982	0,000	0,000	0,20	2,042	1,842	6	*Id.*	155,667	0,360	21
0,2	0,085	0,177	0,020	1,541	0,20	1,31	1,11	7	0,00787	8,736	0,140	22
POU	LES PETITES VITESSES.											
0,	0,01	0,02	0,000	0,000	0,20	2,445	2,245	7	0,00787	17,668	0,0353	»
0,25	0,011	0,0235	0,000	0,001	0,20	2,31	2,11	7	*Id.*	16,606	0,0383	19
0,5	0,010	0,025	0,000	0,001	0,20	2,50	2,30	7	*Id.*	18,101	0,0404	»
0,9	0,026	0,055	0,008	0,003	0,15	2,348	2,198	7	*Id.*	17,298	0,086	»

DIMÈTRE (EN FER ÉTIRÉ). — SECTION : 0m,001,225.

0,2	0,010	0,022	0,000	0,001	0,20	1,953	1,753	7	0,00787	13,796	0,0626	»
0,4	0,034	0,078	0,003	0,002	0,20	2,135	1,935	6	0,08451	163,527	0,1112	12,75
0,3	0,089	0,182	0,009	0,002	0,20	2,129	1,929	6	*Id.*	163,020	0,1848	13
0,3	0,163	0,336	0,014	0,010	0,20	2,248	2,048	6	*Id.*	173,076	0,2616	13
0,1	0,319	0,650	0,029	0,016	0,20	2,192	1,992	6	*Id.*	168,344	0,3817	13
0,4	0,632	1,286	0,061	0,032	0,208	1,912	1,704	5	0,723823	1233,394	0,5594	13
1,7	1,172	2,389	0,117	0,063	0,208	1,808	1,600	5	*Id.*	1158,117	0,7878	13
1,	1,533	3,123	0,154	0,083	0,217	2,075	1,858	5	*Id.*	1344,863	0,9149	13
2,3	2,135	4,348	0,213	0,120	0,218	1,886	1,668	5	*Id.*	1207,337	1,0951	13
6,7	6,038	12,315	0,619	0,384	0,225	2,355	2,130	5	*Id.*	1541,743	1,9205	14,5
8,0	8,573	17,553	1,101	0,512	0,23	2,337	2,107	5	*Id.*	1525,095	2,3055	14
11,3	10,081	22,408	1,147	0,657	0,23	2,34	2,11	5	*Id.*	1527,267	2,5971	13

DIMÈTRE (EN PLOMB). — SECTION : 0m,000,154.

0,9	0,013	0,032	»	»	0,227	0,692	0,465	7	0,00787	3,660	0,040	»
0,7	0,084	0,168	»	»	0,365	1,935	1,570	7	*Id*	12,356	0,165	»
0,65	0,2145	0,431	»	»	0,375	1,815	1,440	7	*Id.*	11,333	0,246	»
0,0	0,633	1,263	»	»	0,404	1,974	1,570	7	*Id.*	12,356	0,446	»
1,8	1,545	3,073	»	»	0,456	1,256	0,800	6	0,08451	67,000	0,732	»
2,3	2,876	5,719	»	»	0,353	1,499	1,146	6	*Id.*	96,837	1,048	»
4,7	4,037	8,074	»	»	0,570	1,840	1,27	6	*Id.*	107,315	1,290	»

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylindre. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.
		h. m. s	h. m. s.	m. s.	mèt	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt
Longueur : 52m,54.														**CONDUITE DE 0m,027 DE**
46	16 octob. 1851.	2 38 0	2 43 0	5 0	0,635	0,001	0,646	"	0,657	"	"	"	"	"
47	*Idem*.....	2 59 0	3 1 15	2 15	0,643	0,001	0,719	"	0,793	"	"	"	"	"
48	*Idem*.....	3 19 0	3 27 0	8 0	0,646	0,001	0,8475	"	1,053	"	"	"	"	"
49	*Idem*.....	3 43 0	3 50 0	7 0	0,650	0,001	1,220	"	1,784	"	"	"	"	"
50	*Idem*.....	4 4 0	4 7 30	3 30	0,652	0,003	2,017	"	3,370	"	"	"	"	"
51	*Idem*.....	4 28 0	4 32 0	4 0	0,650	0,005	3,29	"	5,900	"	"	"	"	"
52	*Idem*.....	4 43 0	4 54 0	11 0	0,647	0,006	4,305	"		"		"	"	"
Longueur : 52m,55.														**CONDUITE DE 0m,041 DE**
53	27 octob. 1851.	2 9 0	2 19 0	10 0	0,646	"	0,667	"	0,687	"	"	"	"	"
54	*Idem*.....	3 15 0	3 22 30	7 30	0,653	0,001	0,747	0,001	0,834	0,001	"	"	"	"
55	*Idem*.....	3 31 0	3 38 0	7 0	0,661	0,001	0,860	0,001	1,050	0,001	"	"	"	"
56	*Idem*.....	3 55 0	3 58 0	3 0	0,675	0,002	1,271	0,002	1,830	0,003	"	"		"
57	*Idem*.....	4 39 0	4 44 0	5 0	0,690	0,001	2,145	0,001	3,490	0,004	"	"	"	"
58	*Idem*.....	4 57 0	5 2 0	5 0	0,698	0,004	3,587	0,005	6,235	0,010	"	"	"	"
59	*Idem*.....	5 10 0	5 16 0	6 0	0,702	0,004	4,672	0,004	"	"	"	"	"	"
Longueur : 113m,34.														**CONDUITE DE 0m,0268 D**
60	30 avril 1850..	7 20 0	7 35 0	15 0	1,507	0,001	1,522	0,001	1,529	0,001	1,530	0,001	1,533	0,0
61	*Idem*.....	8 28 0	8 33 0	5 0	1,519	0,001	1,548	0,002	1,586	0,002	1,588	0,002	1,590	0,0
62	*Idem*.....	9 27 0	9 42 0	15 0	1,532	0,001	1,65 1,648	0,002	1,758 1,755	0,002	1,763 1,759	0,002	1,769 1,765	0,0
63	*Idem*..	10 5 0	10 20 0	15 0	1,569 1,568	0,001	1,873 1,874	0,002	2,177 2,178	0,002	2,204	0,002	2,21	0,0
64	*Idem*..... ..	10 38 0	10 48 0	10 0	1,617	0,001	2,187 2,177	0,003	2,757 2,743	0,004	2,806 2,790	0,003	2,822 2,806	0,0
65	*Idem*....	12 21 0	12 29 0	8 0	1,712	0,001	2,817 2,825	0,003	3,927 3,940	0,003	4,017 4,035	0,003	4,054 4,072	0,0
66	*Idem*.....	1 7 0	1 14 0	7 0	1,785	0,001	3,296	0,005	4,820	0,010	4,942	0,005	4,995	0,0
67	*Idem*...	1 43 0	1 48 0	5 0	1,918	0,001	4,175 4,178	0,005	6,458	0,005	6,64 6,645	0,005	6,72 6,725	0,0
68	19 mai 1850...	12 14 0	12 39 0	25 0	2,497	0,001	8,380	0,001	14,343	0,002	14,839	0,002	15,073	0,0
69	*Idem*.....	12 55 0	1 20 0	25 0	2,977	0,001	11,940	0,001	20,962	0,002	21,758	0,002	22,091	0,0
70	*Idem*.	2 8 0	2 25 0	17 0	3,559	0,001	15,681	0,001	27,978	0,003	28,982	0,003	29,604	0,0
71	*Idem*. . ..	2 39 0	2 54 0	15 0	4,104	0,001	19,342	0,001	34,818	0,001	36,055	0,001	36,729	0,0

PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES.				HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE.			NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	Au commencement.	A la fin.	Différence.						
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.	
IÈTRE (EN PLOMB).										Section : 0m,000,572,55.		
0,011	0,022	"	"	0,257	1,730	1,473	7	0,00787	11,593	0,065	"	
0,074	0,150	"	"	0,198	2,048	1,850	7	*Id.*	14,560	0,188	"	
0,2055	0,407	"	"	0,252	1,333	1,081	6	0,08451	91,345	0,332	"	
0,564	1,134	"	"	0,200	1,900	1,700	6	*Id.*	143,650	0,597	"	
1,353	2,718	"	"	0,150	1,811	1,661	6	*Id.*	140,355	1,021	"	
2,610	5,250	"	"	0,748	1,499	0,751	5	0,723823	543,591	1,438	"	
3,658	7,316	"	"	0,985	1,782	0,797	5	*Id.*	576,887	1,679	"	
IÈTRE (EN PLOMB).										Section : 0m,001,32.		
0,020	0,041	"	"	0,405	1,527	1,122	6	0,08451	94,809	0,120	"	
0,087	0,181	"	"	0,305	2,245	1,940	6	*Id.*	163,930	0,276	"	
0,190	0,389	"	"	0,673	2,277	1,604	6	*Id.*	135,538	0,428	"	
0,559	1,155	"	"	0,120	2,345	2,225	6	*Id.*	188,013	0,792	"	
1,345	2,800	"	"	0,808	1,528	0,720	5	0,723823	521,152	1,316	"	
2,648	5,537	"	"	0,599	1,652	1,053	5	*Id.*	762,186	1,925	"	
3,971	7,610	"	"	0,809	2,321	1,512	5	*Id.*	1094,420	2,305	"	
IÈTRE (EN TÔLE ET BITUME).										Section : 0m,000,564,65.		
0,007	0,022	0,001	0,003	0,20	2,137	1,937	7	0,00787	15,244	0,030	10,5	
0,038	0,067	0,002	0,002	0,20	2,184	1,984	7	"	15,614	0,092	11,5	
0,1075	0,2245	0,0065	0,006	1,338	2,268	0,930	6	0,08451	78,594	0,155	12,5	
0,304	0,609	0,0265	0,006	0,20	1,527	1,627	6	"	137,498	0,271	12,5	
0,568	1,133	0,048	0,016	0,20	1,74	1,54	6	"	130,145	0,384	13	
1,1125	2,2215	0,0925	0,037	0,20	2,02	1,82	6	"	153,808	0,567	15	
1,524	3,035	0,122	0,053	0,20	2,102	1,902	6	"	160,738	0,678	14,75	
2,2815	4,540	0,1845	0,080	0,20	1,91	1,71	6	"	144,512	0,853	15	
5,963	11,846	0,496	0,234	0,388	2,105	1,717	5	0,723823	1242,804	1,467	15,5	
9,022	17,935	0,796	0,333	0,272	2,447	2,175	5	"	1574,315	1,859	15	
12,297	24,419	1,004	0,622	0,450	2,203	1,753	5	"	1268,862	2,203	14,5	
15,476	30,714	1,237	0,674	0,31	2,07	1,76	5	"	1273,928	2,507	14	

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈT sur le cylind Charges accusées par l'eau ou par le mercure.
		h. m. s.	h. m. s.	m. s	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
	LONGUEUR : 111m,27.												CONDUITE DE 0m,0826
72	31 mai 1850...	9 55 0	10 43 0	48 0	1,41	0,000	1,423	0,008	1,437	0,010	1,438	0,010	1,44
73	*Idem*.....	11 4 0	11 29 0	25 0	1,424	0,001	1,457	0,004	1,49	0,004	1,493	0,005	1,498
74	3 juin 1850...	5 15 0	5 25 0	10 0	1,45	0,001	1,555	0,004	1,653	0,004	1,663	0,004	1,687
75	31 mai 1850...	1 27 0	1 33 0	6 0	1,518	0,001	1,834 1,830	0,003	2,150 2,144	0,004	2,176 2,168	0,004	2,228 2,22
76	*Idem*.....	1 52 0	1 56 0	4 0	1,60	0,001	2,207	0,008	2,82	0,005	2,865	0,005	2,975
77	*Idem*.....	3 7 0	3 43 0	36 0	1,99	0,001	3,115	0,010	4,275	0,010	4,335	0,010	4,580
78	*Idem*.....	4 5 0	4 38 0	33 0	2,083	0,003	3,610	0,010	5,19	0,012	5,32	0,012	5,61
79	*Idem*.....	4 53 0	5 21 0	28 0	2,200	0,005	4,200	0,010	6,28	0,020	6,43	0,002	6,83
80	3 juin 1850...	1 52 0	2 15 0	23 0	2,585	0,001	6,074	0,002	9,755	0,003	10,017	0,003	10,853
81	*Idem*.....	2 34 0	2 50 0	16 0	2,986	0,001	8,173	0,002	13,040	0,001	14,034	0,004	15,270
82	*Idem*.....	3 41 0	3 54 0	13 0	3,414	0,001	10,167	0,003	17,294	0,003	17,858	0,003	19,607
83	*Idem*.....	4 17 0	4 31 0	14 0	3,560	0,001	11,097	0,001	19,165	0,001	19,685	0,001	21,535
	LONGUEUR : 111m,347.												CONDUITE DE 0m,190
84	6 nov. 1850...	1 0 0	1 40 0	40 0	1,74	0,001	1,75	0,004	1,76	0,004	1,761	0,004	1,765
85	7 nov. 1850...	1 0 0	1 31 0	31 0	1,75	0,001	1,775	0,01	1,798	0,01	1,80	0,01	1,807
86	*Idem*.....	1 53 0	2 11 0	18 0	1,766	0,002	1,83	0,02	1,895	0,02	1,90	0,02	1,92
87	*Idem*.....	2 38 0	2 55 30	17 30	1,802 1,798	0,002	1,975 1,965	0,03	2,145 2,125	0,03	2,12	0,03	2,20 2,175
88	*Idem*.....	3 37 0	3 46 30	9 30	1,835	0,003	2,13	0,02	2,415	0,02	2,41	0,02	2,51
89	*Idem*.....	4 30 0	4 50 0	20 0	1,91	0,001	2,50	0,05	3,10	0,05	3,10	0,05	3,32
90	8 nov. 1850...	1 32 0	1 52 0	20 0	1,93	0,001	2,55	0,04	3,13	0,06	3,12	0,08	3,37
91	*Idem*.....	2 6 0	2 37 0	31 0	2,03	0,002	3,09	0,04	4,13	0,06	4,10	0,08	4,53
92	*Idem*.....	3 1 0	3 32 0	31 0	2,14	0,002	3,64	0,05	5,11	0,06	5,06	0,06	5,71
93	*Idem*.....	3 45 0	4 25 30	40 30	2,22	0,002	4,06	0,04	5,86	0,08	5,79	0,08	6,60
94	12 nov. 1850..	1 12 30	1 33 30	21 0	3,132	0,005	9,157	0,005	15,288	0,08	13,609	0,04	18,102

NOTA. Nous avons reconnu, après le démontage des tuyaux, que des portions détach
Il n'y a donc aucune conclusion à tirer des différences entre les manomètres 3 et 4, et 4

PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES.				HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE.			NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	Au commencement.	A la fin.	Différence.						

...IMÈTRE (EN TÔLE ET BITUME). — SECTION : 0m,005,359,3.

ne	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.
0,(	0,014	0,027	0,001	0,002	0,180	2,316	2,136	5	0,723823	1546,086	0,100	21,5
),(	0,033	0,066	0,003	0,005	0,458	2,415	1,957	5	*Id.*	2124,421	0,176	21,5
),3	0,098	0,203	0,010	0,024	0,480	2,066	1,586	5	*Id.*	1147,98	0,357	22
),5	0,317	0,629	0,025	0,052	0,268	2,040	1,772	5	*Id.*	1282,614	0,665	22
),(	0,613	1,220	0,045	0,110	0,230	1,918	1,688	5	*Id.*	1221,813	0,950	22
1,1	1,160	2,285	0,060	0,245	0,58	1,202	0,622	1	25,191	15669,050	1,354	21
1,5	1,58	3,107	0,130	0,290	0,32	1,001	0,681	1	25,130	17113,53	1,613	21
2,0	2,07	4,070	0,150	0,400	0,50	1,170	0,670	1	25,178	16869,26	1,874	21
3,6	3,681	7,170	0,262	0,836	0,52	1,275	0,755	1	25,193	19020,715	2,572	21
4,1	5,467	10,654	0,394	1,236	0,70	1,355	0,655	1	25,226	16523,03	3,211	21
5,7	7,127	13,880	0,564	1,749	0,68	1,28[illegible]	0,608	1	25,215	15330,72	3,668	22
6,2	8,068	15,605	0,520	1,870	0,60	1,297	0,697	1	25,206	17568,582	3,897	22

...IMÈTRE (EN TÔLE ET BITUME). — SECTION : 0m,030,19.

0,(	0,01	0,02	0,001	0,004	0,35	0,868	0,518	1	25,1141	13009,10	0,180	"
0,0	0,023	0,048	0,002	0,007	0,60	1,22	0,62	1	25,1964	15621,77	0,278	"
0,(	0,065	0,129	0,005	0,02	0,72	1,323	0,603	1	25,2248	15210,55	0,466	"
0,1	0,16	0,33	0,005	0,055	0,50	1,48	0,98	1	25,2177	24713,35	0,780	"
0,2	0,285	0,580	0,005	0,10	0,75	1,483	0,733	1	25,2512	18509,13	1,076	"
0,3	0,60	1,19	0,000	0,22	"	0,549	0,549	4	107,4013	60037,33	1,657	"
0,5	0,58	1,20	0,01	0,25	"	0,556	0,556	4	107,4065	60792,08	1,679	"
0,(	1,04	2,10	0,03	0,43	"	1,16	1,16	4	107,9029	126839,86	2,259	"
0,7	1,47	2,97	0,05	0,65	"	1,41	1,41	4	108,0536	154030,41	2,743	"
0,8	1,80	3,64	0,07	0,81	"	2,043	2,043	4	108,5401	223918,23	3,052	"
0,(	6,131	12,156	1,679	4,493	"	2,095	2,095	4	108,5793	228613,72	6,010	"

e luit intérieur bitumineux avaient dû altérer notablement les indications du manomètre n° 4. ...me nous aurons occasion de le dire plus tard (VIe chapitre).

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylin. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.
		h. m. s.	h. m. s.	m. s.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
	LONGUEUR : 111m,394.												CONDUITE DE 0m,285
95	13 juillet 1850.	5 32 0	5 45 0	13 0	1,768	0,001	1,808	0,01	1,838	0,01	1,838	0,01	1,848
96	10 juillet 1850.	6 23 0	6 27 40	4 40	1,80	0,002	1,935	0,02	2,055	0,03	2,055	0,03	2,115
97	13 juillet 1850.	6 15 0	6 36 0	21 0	1,842	0,005	2,065	0,04	2,275	0,05	2,28	0,05	2,39
98	10 juillet 1850.	6 50 0	7 05 0	15 0	1,855	0,010	2,205	0,03	2,540	0,04	2,540	0,04	2,73
99	*Idem*.....	7 18 0	7 30 0	12 0	1,90	0,010	2,50	0,03	3,09	0,08	3,09	0,08	3,45
100	11 juillet 1850.	5 5 0	5 15 0	10 0	1,966	0,020	2,965	0,03	4,01	0,06	"	"	4,64
101	*Idem*.....	6 15 0	6 27 0	12 0	2,006 2,000	0,02	3,30 3,36	0,04	4,84 4,78	0,06	4,84 4,78	0,06	5,74 5,68
	LONGUEUR : 44m,86.												CONDUITE DE 0m,04968
102	24 mai 1851...	1 55 0	2 4 0	9 0	0,661	0,001	0,683	0,001	0,704	0,001			0,710
103	*Idem*.....	3 24 0	3 29 0	5 0	0,675	0,001	0,755	0,001	0,830	0,001			0,845
104	*Idem*.....	3 57 0 4 5 0	4 0 0 4 8 0	6 0	0,697 0,697	0,002	0,877	0,002	1,043	0,002			1,100
105	*Idem*.....	4 30 0	4 40 0	10 0	0,755	0,005	1,300	0,005	1,795	0,005			1,955
106	*Idem*.....	4 58 0	5 4 30	6 30	0,870	0,010	2,222	0,020	3,455	0,030			3,800 3,900
107	*Idem*.....	5 44 0	5 48 30	4 30	1,045	0,015	3,665	0,030	6,065	0,030			6,90
	LONGUEUR : 114m,28.												CONDUITE DE 0m,03591
108	16 nov. 1850..	1 39 0	1 45 0	6 0	1,511	0,001	1,523	0,001	1,536	0,002	1,536	0,001	1,531
109	*Idem*.....	2 0 0	2 36 0	36 0	1,52	0,001	1,561	0,001	1,591	0,001	1,594	0,001	1,60
110	*Idem*.....	2 57 0	3 12 0	15 0	1,535	0,001	1,637	0,001	1,718	0,001	1,723	0,001	1,727
111	*Idem*.....	3 27 0	3 37 0	10 0	1,585	0,001	1,955	0,001	2,255	0,001	2,272	0,001	2,278
112	*Idem*.....	3 47 0	3 53 0	6 0	1,67	0,001	2,53	0,003	3,195	0,002	3,24	0,002	3,25
113	*Idem*.....	4 5 0	4 10 0	5 0	1,82	0,001	3,655	0,002	5,06	0,002	5,145	0,002	5,168
114	*Idem*.....	4 27 0	4 31 0	4 0	1,925	0,002	4,23	0,001	6,08	0,001	6,195	0,001	6,22
	LONGUEUR : 114m,28.												CONDUITE DE 0m,0360
115	30 nov. 1850..	12 53 0	1 8 0	15 0	1,525	0,001	1,56	0,001	1,596	0,001	1,599	0,001	1,602
116	*Idem*.....	1 20 0	1 30 0	10 0	1,537	0,001	1,627	0,001	1,717	0,001	1,725	0,001	1,73
117	*Idem*.....	1 42 0	1 49 0	7 0	1,592	0,001	1,913	0,001	2,243	0,001	2,275	0,001	2,287
118	*Idem*.....	2 8 0	2 12 0	4 0	1,678	0,001	2,385	0,001	3,119	0,001	3,185	0,001	3,212
119	*Idem*.....	3 0 0	3 15 0	15 0	1,84	0,002	3,313	0,002	4,858	0,002	4,997	0,003	5,055
120	*Idem*.....	3 34 0	3 46 0	12 0	1,937	0,002	3,869	0,002	5,903	0,002	6,087	6,003	6,163
121	*Idem*.....	3 57 0	4 7 0	10 0	2,007	0,002	4,266	0,003	6,657	0,003	"	"	"

PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES.				HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE.			NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	Au commencement.	A la fin.	Différence.						
...1 MÈTRE (EN TÔLE ET BITUME).								Section : 0m,063,8.				
...ètre.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.	
1,0	0,03	0,07	"	0,01	0,43	1,21	0,78	1	25,170	19632,60	0,395	"	Même observation que pour la conduite qui précède (0m,196).
1,1	0,12	0,255	"	0,06	0,83	1,43	0,60	1	25,257	15154,20	0,848	21	
1,2	0,21	0,433	"	0,115	"	0,87	0,87	4	107,6513	94786,97	1,179	"	
1,3	0,335	0,685	"	0,19	"	0,79	0,79	4	107,59	85803,03	1,494	21	
1,6	0,59	1,19	"	0,36	"	0,862	0,862	4	107,645	93435,86	2,034	21	
1,9	1,045	2,044	"	0,63	"	0,954	0,954	4	107,7147	103298,397	2,698	"	
2,3	1,435	2,808	"	0,90	"	1,358	1,358	4	108,0138	147330,82	3,207	"	
...1 MÈTRE (EN VERRE).								Section : 0m,001,945.				
1,0	0,021	0,043	"	0,006	0,20	2,105	1,905	6	0,08451	160,973	0,153	"	
1,0	0,075	0,155	"	0,015	0,13	2,285	2,155	6	*Id.*	182,098	0,312	"	
1,1	0,166	0,346	"	0,057	0,13 / 0,14	2,143 / 2,150	4,023	6	*Id.*	339,944	0,485	"	
1,5	0,495	1,040	"	0,160	0,79	2,230	1,440	5	0,723823	1042,305	0,893	"	
1,2	1,333	2,585	"	0,400	0,85	2,404	1,549	5	*Id.*	1121,202	1,478	"	
1,1	2,400	5,02	"	0,835	0,71	2,240	1,530	5	*Id.*	1107,449	2,104	"	
...1 MÈTRE (EN FONTE).								Section : 0m,001,013.				
1,0	0,013	0,025	0,090	0,005	0,20	2,375	2,175	7	0,00787	18,691	0,051	7	
1,0	0,030	0,071	0,003	0,006	0,20	2,305	2,105	6	0,08451	177,894	0,081	7	
1,1	0,081	0,183	0,005	0,004	0,20	1,604	1,404	6	*Id.*	118,652	0,130	7	
1,3	0,300	0,67	0,017	0,006	0,20	2,016	1,816	6	*Id.*	153,470	0,253	7	
1,8	0,665	1,525	0,045	0,010	0,20	1,842	1,642	6	*Id.*	138,765	0,381	7	
1,8	1,405	3,240	0,085	0,023	0,20	2,18	1,98	6	*Id.*	167,330	0,551	7	
2,3	1,85	4,155	0,115	0,025	0,20	2,02	1,82	6	*Id.*	153,808	0,633	7	
...1 MÈTRE (EN FONTE).								Section : 0m,001,042.				
1,0	0,036	0,071	0,003	0,003	0,10	1,356	1,256	6	0,08451	106,145	0,113	4	
1,0	0,090	0,180	0,008	0,005	0,10	1,495	1,395	6	*Id.*	117,891	0,188	4	
1,3	0,330	0,651	0,032	0,012	0,10	2,118	2,008	6	*Id.*	169,696	0,387	5	
1,7	0,734	1,441	0,066	0,027	0,10	1,88	1,780	6	*Id.*	150,428	0,601	5	
1,1	1,545	3,018	0,139	0,058	0,19	1,346	1,156	5	0,723823	836,739	0,892	5	
0,2	2,034	3,966	0,184	0,076	0,363	1,435	1,072	5	*Id.*	775,938	1,034	6	
2,0	2,391	4,650	"	"	0,162	1,135	0,973	5	*Id.*	704,280	1,126	6	

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylind. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	
	LONGUEUR : 111m,65.													CONDUITE DE 0m,0795 I
		h. m. s.	h. m. s.	m. s.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	met.	m
122	18 nov. 1850..	2 7 0	2 22 0	15 0	1,40	0,001	1,439	0,002	1,465	0,002	1,465	0,003	1,471	0.
123	*Idem*.....	2 53 0	3 4 0	11 0	1,418	0,001	1,557	0,005	1,668	0,005	1,675	0,005	1,68	0.
124	*Idem*.....	3 10 0	3 19 0	9 0	1,49	0,002	1,86	0,050	2,215	0,060	2,23	0,060	2,265	0
125	*Idem*.....	3 26 0	3 34 0	8 0	1,625	0,002	2,435	0,02	3,235	0,030	3,265	0,020	3,325	0.
126	*Idem*.....	3 41 0	3 46 30	5 30	1,79	0,03	3,355	0,02	4,89	0,02	4,945	0,020	5,050	0.
127	*Idem*.....	4 0 0	4 4 45	4 45	1,985	0,02	4,255	0,01	6,52	0,02	6,615	0,020	6,76	0
	LONGUEUR : 111m,65.													CONDUITE DE 0m,0801 I
128	3 décemb. 1850.	2 7 0	2 22 0	15 0	1,418	0,002	1,46	0,008	1,502	0,015	1,505	0,010	1,51	0
129	*Idem*.....	2 33 0	2 43 0	10 0	1,459	0,002	1,605	0,010	1,753	0,015	1,763	0,015	1,78	0
129 *bis.*	29 nov. 1850..	1 46 0	1 54 0	8 0	1,517	"	1,87	"	2,24	"	2,295	"	2,257	
130	3 décemb. 1850.	2 47 0	2 55 0	8 0	1,513	0,002	1,875	0,015	2,25	0,02	2,27	0,02	2,31	0
131	*Idem*.....	3 1 0	3 7 0	6 0	1,603	0,003	2,365	0,002	3,16	0,02	3,205	0,03	3,28	0
132	*Idem*.....	3 13 0	3 17 0	4 0	1,742	0,004	3,17	0,003	4,68	0,04	4,76	0,04	4,91	0
133	*Idem*.....	3 25 0 3 31 0	3 28 15 3 34 15	6 30	1,877	0,005	4,05	0,002	6,35	0,02	6,46	0,02	6,70	0
	LONGUEUR : 111m,586.													CONDUITE DE 0m,0819
134	15 mai 1850...	7 49 0	7 55 0	6 0	1,413	0,001	1,423	0,002	1,433	0,003	1,434	0,003	1,435	(
135	*Idem*.....	9 3 0	9 28 48	25 48	1,432	0,001	1,477	0,003	1,515	0,010	1,52	0,010	1,525	(
136	*Idem*.....	9 59 0	10 13 0	14 0	1,461	0,001	1,578	0,008	1,693	0,020	1,70	0,020	1,714	(
137	15 mai 1850...	10 33 0	10 42 0	9 0	1,503	0,001	1,776	0,025	2,034	0,030	2,055	0,040	2,090	(
138	*Idem*.....	11 44 0	11 50 0	6 0	1,56	0,001	2,08	0,020	2,58	0,030	2,62	0,030	2,69	(
139	*Idem*.....	12 6 0	12 10 15	4 15	1,695	0,001	2,84	0,020	3,95	0,040	4,055	0,040	4,185	(
140	*Idem*.....	1 28 0	1 58 0	30 0	2,032	0,002	3,66	0,020	5,24	0,030	5,0355	0,040	5,575	(
141	*Idem*.....	2 26 0	2 54 50	28 50	2,108 2,109	0,004 0,004	4,145 4,155	0,020	6,145 6,165	0,040	6,29 6,31	0,040	6,57 6,59	(
142	21 mai 1850...	5 52 0	6 18 0	26 0	2,537	0,000	7,258	0,001	12,084	0,001	12,372	0,001	13,033	(
143	23 mai 1850...	1 24 0	1 48 0	25 0	2,597	0,000	7,631	0,002	12,501	0,001	12,947	0,003	13,583	(
144	15 mai 1850...	3 46 0	4 9 0	23 0	2,751	0,001	8,857	0,004	14,729	0,004	15,147	0,005	15,995	(
145	23 mai 1850...	4 6 0	4 21 0	15 0	3,127	0,000	11,630	0,002	19,934	0,001	20,599	0,001	21,675	
146	15 mai 1850...	4 36 0	4 56 0	20 0	3,15	0,001	11,796	0,001	20,222	0,001	20,843	0,001	21,969	

Entre le 1er.	PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES. Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE. Au commencement.	A la fin.	Différence.	NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.

DIMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,004,96.

mè.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.
0,0	0,026	0,065	"	0,006	0,28	1,04	0,76	5	0,723823	550,105	0,123	"
0,1	0,111	0,250	0,007	0,005	0,285	1,422	1,137	5	*Id.*	822,987	0,251	"
0,3	0,355	0,725	0,015	0,035	0,245	1,898	1,653	5	*Id.*	1196,479	0,446	"
0,7	0,800	1,610	0,030	0,060	0,25	2,48	2,23	5	*Id.*	1614,125	0,678	"
1,2	1,535	3,100	0,055	0,105	0,215	2,32	2,105	5	*Id.*	1523,647	0,931	"
2,5	2,265	4,535	0,095	0,145	0,17	2,40	2,23	5	*Id.*	1614,125	1,142	

DIMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,005,035.

0,0	0,042	0,084	0,003	0,005	0,23	1,437	1,207	5	0,723823	873,654	0,193	"
0,1	0,148	0,294	0,010	0,015	0,176	1,799	1,623	5	*Id.*	1174,765	0,385	"
0,3	0,370	0,723	"	"	0,288	2,34	2,052	5	*Id.*	1485,285	0,614	"
0,5	0,375	0,737	0,020	0,040	0,184	2,26	2,076	5	*Id.*	1502,657	0,624	"
0,7	0,795	1,557	0,045	0,075	0,105	2,27	2,165	5	*Id.*	1567,077	0,864	"
1,3	1,51	2,938	0,08	0,15	0,164	2,248	2,084	5	*Id.*	1508,447	1,248	"
2,1	2,30	4,473	0,11	0,24	0,197 0,167	2,27 2,235	4,141	5	*Id.*	2997,351	1,526	"

DIMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,005,268.

0,0	0,01	0,02	0,001	0,001	0,15	2,123	1,973	6	0,08451	166,738	0,088	16
0,0	0,038	0,083	0,005	0,005	0,172	2,103	1,931	5	0,723823	1397,702	0,171	16
0,7	0,115	0,232	0,007	0,014	0,214	2,400	2,186	5	*Id.*	1582,277	0,358	16
0,3	0,258	0,531	0,021	0,035	0,24	2,444	2,204	5	*Id.*	1595,306	0,561	15 1/3
0,9	0,50	1,02	0,04	0,070	0,278	2,350	2,072	5	*Id.*	1499,761	0,791	15 1/3
1,5	1,110	2,255	0,105	0,130	0,23	2,430	2,20	5	*Id.*	1592,411	1,185	15 1/3
1,8	1,580	3,208	0,115	0,22	0,43	0,965	0,535	1	25,14	13449,90	1,418	15
2,15	1,99	4,0415	0,150	0,28	0,27	0,84	0,57	1	25,102	14308,14	1,571	15
4,1	4,826	9,547	0,288	0,661	0,53	1,33	0,80	1	25,199	20159,20	2,453	17 5
5,4	4,870	9,904	0,446	0,636	0,53	1,31	0,78	1	25,199	19655,22	2,487	18
5,6	5,872	11,978	0,418	0,848	0,35	1,136	0,786	1	25,158	19774,188	2,720	14
8,3	8,304	16,897	0,665	1,076	0,64	1,249	0,609	1	25,206	"	3,238	18 5
8,6	8,426	17,072	0,641	1,106	0,40	1,22	0,82	1	25,169	20638,58	3,265	14

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES.	DURÉE DES EXPÉRIENCES. Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES. 1er MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	2e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	3e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	4e MANOMÈTRE. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	5e MANOMÈTRE sur le cylindre. Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.
		h. m. s.	h. m. s.	m. s.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mè
Longueur : 111m,477.														**CONDUITE DE 0m,137 D**
147	17 mai 1850...	8 16 0	8 28 0	12 0	1,446	0,001	1,458	0,001	1,470	0,03	1,471	0,010	1,474	0,0
148	*Idem*.....	8 53 0	8 59 0	6 0	1,478	0,002	1,527	0,001	1,565	0,012	1,566	0,015	1,575	0,0
149	*Idem*.....	9 49 0	9 52 0	3 0	1,508	0,002	1,62	0,003	1,717	0,015	1,724	0,015	1,744	0,0
150	*Idem*.....	10 32 0	11 2 0	30 0	1,797	0,001	2,048	0,015	2,272	0,010	2,285	0,015	2,338	0,0
151	*Idem*.....	1 12 0	1 29 0	17 0	1,895	0,004	2,565	0,010	3,155	0,010	3,202	0,015	3,335	0,0
152	*Idem*.....	2 12 0	2 26 0	14 0	2,02	0,004	3,20	0,010	4,245	0,015	4,325	0,010	4,565	0,0
153	*Idem*.....	3 1 0	3 12 0	11 0	2,137	0,006	3,895	0,010	5,455	0,010	5,585	0,020	5,93	0,0
154	*Idem*.....	3 40 0	3 50 0	10 0	2,20	0,008	4,265	0,015	6,105	0,002	6,26	0,002	6,665	0,0
155	18 mai 1850...	2 43 0	3 12 0	29 0	2,832	0,001	7,994	0,006	12,684	0,010	13,027	0,006	14,051	0,0
156	*Idem*.....	3 42 0	4 17 0	35 0	3,568	0,002	12,355	0,003	20,324	0,002	20,810	0,002	22,021	0,0
Longueur : 111m,373.														**CONDUITE DE 0m,188 D**
157	28 août 1850..	1 49 0	2 21 0	32 0	1,738	0,001	1,752	0,010	1,765	0,010	1,770	0,010	1,775	0,0
158	*Idem*.....	2 46 0	3 4 0	18 0	1,765	0,002	1,85	0,02	1,940	0,020	1,95	0,020	1,96	0,0
159	*Idem*.....	4 26 0	4 40 0	14 0	1,792	0,002	1,98	0,02	2,160	0,02	2,177	0,02	2,225	0,0
160	*Idem*.....	5 9 0	5 18 0	9 0	1,840	0,002	2,26	0,01	2,645	0,01	2,665	0,01	2,780	0,0
161	*Idem*.....	6 7 0	6 47 0	40 0	1,890	0,003	2,59	0,03	3,23	0,02	3,30	0,03	3,455	0,0
162	29 août 1850..	1 45 0	2 39 0	54 0	1,97	0,005	3,13	0,04	4,22	0,05	4,32	0,06	4,60	0,0
163	*Idem*.....	4 39 0	5 7 0	28 0	2,10	0,001	4,055	0,04	5,91	0,05	6,10	0,06	6,56	0,0
164	*Idem*.....	6 46 0	7 9 0	23 0	2,628	0,001	8,332	0,003	13,608	0,003	14,283	0,003	15,621	0,0
165	*Idem*.....	5 25 0	5 50 0	25 0	2,856	0,001	10,379	0,004	17,447	0,004	18,177	0,004	19,951	0,0
165 *bis.*	31 août 1850 (A)	8 18 0	8 48 0	30 0	1,767	0,001	21,973	"	"	"	"	"	"	
Longueur : 111m,358.														**CONDUITE DE 0m,2432 D**
166	24 sept. 1850..	2 24 0	2 46 0	22 0	1,761	0,001	1,810	0,015	1,855	0,015	1,860	0,015	1,870	0,0
167	24 sept. 1850..	3 20 0	3 33 0	13 0	1,781	0,001	1,885	0,01	1,983	0,01	1,992	0,01	2,010	0,0
168	*Idem*.....	4 37 0	5 7 0	30 0	1,817	0,001	2,055	0,02	2,290	0,02	2,310	0,02	2,35	0,0
169	*Idem*.....	5 23 0	5 56 0	33 0	1,885	0,010	2,470	0,04	3,035	0,04	3,095	0,05	3,180	0,0
170	27 sept. 1850..	8 35 0	9 3 0	28 0	1,98	0,010	3,140	0,04	4,27	0,05	4,390	0,05	4,560	0,0
171	*Idem*.....	9 26 0	10 5 0	39 0	2,05	0,020	3,670	0,04	5,25	0,05	5,420	0,05	5,650	0,0
172	*Idem*.....	10 42 0	11 19 0	37 0	2,115	0,010	4,200	0,05	6,22	0,06	6,440	0,06	6,740	0,0
173	28 sept. 1850..	4 32 30	4 52 30	20 0	2,740	0,002	9,894	0,002	16,721	0,002	17,502	0,002	18,725	0,0

(A) Cette expérience a été faite avec un diaphragme en cuivre d'une ouverture de 3 centimètr
courbe du tuyau de 0m,188 : elle a été faite, comme on le verra plus tard, dans un autre but q

Entre le 1er	PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES. Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE. Au commencement.	A la fin.	Différence.	NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.	

DIAMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,014,776.

0,0	0,012	0,024	0,001	0,003	0,24	2,43	2,19	5	0,723823	1585,172	0,149	15
0,0	0,038	0,087	0,001	0,009	0,16	2,351	2,191	5	*Id.*	1585,896	0,298	15 1/3
0,1	0,097	0,209	0,007	0,020	0,190	1,985	1,795	5	*Id.*	1299,262	0,488	15 1/3
0,2	0,224	0,475	0,013	0,053	0,54	1,345	0,805	1	25,206	20290,830	0,763	15
0,6	0,590	1,260	0,047	0,133	0,54	1,225	0,765	1	25,196	19275,940	1,279	15 1/3
1,1	1,045	2,225	0,080	0,240	0,51	1,354	0,844	1	25,201	21269,644	1,714	15
1,7	1,560	3,318	0,130	0,345	0,50	1,312	0,812	1	25,195	20458,340	2,098	15 1/2
2,0	1,840	3,905	0,155	0,405	0,60	1,401	0,801	1	25,224	20220,444	2,281	16
3,1	4,690	9,852	0,353	1,014	"	0,855	0,855	4	107,640	93592,98	3,640	15
5,7	7,969	16,756	0,486	1,811		1,331	1,331	4	107,9986	145636,112	4,693	15 1/4

DIAMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,027,76.

0,0	0,013	0,027	0,005	0,005	0,50	0,921	0,421	1	25,1431	10585,245	0,205	"
0,0	0,090	0,175	0,010	0,010	0,60	1,191	0,591	1	25,1927	14888,886	0,497	"
0,1	0,180	0,368	0,017	0,048	0,55	1,252	0,702	1	25,194	17686,188	0,758	
0,4	0,385	0,805	0,020	0,115	0,70	1,37	0,67	1	25,2295	16903,765	1,128	"
0,7	0,640	1,340	0,070	0,155	"	0,901	0,901	4	107,6747	99168,34	1,488	"
1,1	1,090	2,25	0,100	0,280	"	1,58	1,58	4	108,1813	173847,35	1,933	"
1,9	1,855	3,81	0,190	0,460	"	1,07	1,07	4	107,8047	116860,29	2,506	"
3,7	5,276	10,980	0,675	1,338	"	1,52	1,52	4	108,136	165410,28	4,323	"
7,5	7,068	14,591	0,730	1,774	"	1,88	1,88	4	108,418	205181,06	4,928	"
"	"	"	"	"	0,50	1,187	0,687	1	25,1789	17297,904	0,346	"

placé à 11 mètres environ du manomètre n° 1. Cette expérience n'a point été rapportée sur la de la détermination de la relation existant entre les pentes et les vitesses.

DIAMÈTRE (EN FONTE). Section : 0m,046,466.

0,0	0,045	0,094	0,005	0,010	0,50	1,248	0,748	1	25,1867	18839,652	0,307	"
0,1	0,098	0,202	0,009	0,018	0,55	1,20	0,65	1	*Id.*	16371,68	0,452	"
0,2	0,235	0,473	0,020	0,040	"	0,536	0,536	4	107,3914	59172,66	0,707	"
0,5	0,565	1,150	0,060	0,085	"	0,928	0,928	4	107,695	101717,93	1,106	"
1,1	1,130	2,290	0,120	0,170	"	1,105	1,105	4	107,8312	120663,11	1,547	"
1,6	1,580	3,200	0,170	0,230	"	1,820	1,820	4	108,3719	199350,11	1,833	"
2,0	2,020	4,105	0,220	0,300	"	1,953	1,953	4	108,4745	213857,48	2,073	"
5,1	6,827	13,981	0,781	1,223	"	1,96	1,96	4	108,4798	213705,206	3,833	"

NUMÉROS D'ORDRE DES EXPÉRIENCES.	DATES	DURÉE DES EXPÉRIENCES.			CHARGES ACCUSÉES PAR LES MANOMÈTRES.									
					1er MANOMÈTRE.		2e MANOMÈTRE.		3e MANOMÈTRE.		4e MANOMÈTRE.		5e MANOMÈTRE sur le cylindre	
		Heure au commencement.	Heure à la fin.	Différence.	Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.	Charges accusées par l'eau ou par le mercure.	Oscillations.
		h. m. s.	h. m. s.	m. s.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	
LONGUEUR : 111m,358.														**CONDUITE DE 0m,244**
174	5 octobre 1850.	9 2 0	9 32 15	30 15	1,758	0,001	1,785	0,01	1,81	0,01	1,815	0,01	1,82	
175	*Idem*.....	10 0 0	10 14 0	14 0	1,79	0,002	1,875	0,03	1,955	0,03	1,965	0,03	1,985	
176	*Idem*.....	11 45 0	12 18 0	33 0	1,842	0,004	2,095	0,04	2,34	0,04	2,37	0,04	2,435	
177	*Idem*.....	12 43 0	12 58 0	15 0	1,915	0,01	2,505	0,05	3,07	0,05	3,125	0,05	3,27	
178	7 octobre 1850.	9 7 0	9 39 0	32 0	2,025	0,01	3,06	0,05	4,06	0,05	4,18	0,05	4,435	
179	*Idem*.....	12 52 0	1 28 0	36 0	2,095	0,02	3,48	0,08	4,83	0,10	4,99	0,12	5,31	
180	*Idem*.....	1 47 0	2 16 0	29 0	2,19	0,02	4,08	0,08	5,92	0,12	6,14	0,12	6,60	
181	*Idem*.....	3 11 0	3 27 0	16 0	2,862	0,001	8,700	0,003	14,205	0,01	14,906	0,01	16,334	
LONGUEUR : 111m,335.														**CONDUITE DE 0m,29**
182	6 juin 1850..	9 37 0	9 57 0	20 0	1,762	0,001	1,78	0,008	1,790	0,003	1,791	0,003	1,797	
183	*Idem*..	10 42 0	10 49 0	7 0	1,801	0,001	1,865	0,03	1,92	0,02	1,925	0,003	1,95	
184	*Idem*.....	11 21 0	12 9 0	45 0	1,836	0,001	1,98	0,04	2,105	0,04	2,125	0,04	2,18	
185	*Idem*.....	12 20 0	12 42 0	22 0	1,878	0,002	2,16	0,04	2,415	0,05	2,44	0,05	2,55	
186	*Idem*.....	12 49 0	1 5 0	16 0	1,95	0,006	2,52	0,06	3,055	0,07	3,12	0,08	3,34	
187	18 juin 1850..	2 54 0	3 6 0	12 0	2,055	0,02	3,19	0,04	4,36	0,06	4,55	0,06	4,97	
188	6 juin 1850...	1 55 0	2 1 45	6 45	2,14	0,02	3,80 3,75	0,03	5,39 5,30	0,04	5,61 5,49	0,04	6,20 6,08	
189	18 juin 1850..	2 24 0	2 36 0	12 0	2,20 2,179	0,02	4,223 4,325	0,05	6,27 6,322	0,06	6,62 6,553	0,08	" 7,191	
LONGUEUR : 111m,353.														**CONDUITE DE 0m,5**
190	2 août 1850...	4 13 0	4 28 0	15 0	1,915	0,004	1,94	0,03	1,96	0,02	1,965	0,02	1,975	
191	29 juillet 1850.	6 2 0	6 17 0	15 0	1,935	0,005	1,96	0,04	1,98	0,01	1,98	0,01	1,995	
192	5 août 1850...	4 30 0	5 7 0	37 0	1,96	0,005	1,99	0,02	2,02	0,02	2,02	0,02	2,035	
193	29 juillet 1850.	5 38 0	5 51 0	13 0	2,18	0,01	2,24	0,06	2,30	0,03	2,30	0,03	2,35	
194	2 août 1850...	4 47 0	5 7 0	20 0	2,22	0,02	2,285	0,04	2,345	0,03	2,35	0,01	2,40	
195	5 août 1850...	5 27 0	5 42 0	15 0	2,42	0,02	2,52	0,04	2,63	0,03	2,64	0,03	2,70	
196	2 août 1850...	5 49 0	6 2 0	13 0	2,49	0,02	2,61	0,06	2,72	0,02	2,73	0,01	2,80	
197	5 août 1850...	6 11 0	6 27 0	16 0	2,48	0,02	2,61	0,07	2,74	0,03	2,75	0,03	2,81	
198	29 juillet 1850.	4 47 0	5 0 0	13 0	2,50	0,02	2,64	0,10	2,75	0,04	2,75	0,04	2,84	

PERTES DE CHARGES DUES AUX RÉSISTANCES.				HAUTEUR DE L'EAU dans LES BASSINS DE JAUGE.			NUMÉROS DES BASSINS.	SECTION des BASSINS.	DÉBIT de LA CONDUITE.	VITESSE MOYENNE PAR SECONDE.	TEMPÉRATURE DE L'EAU.	OBSERVATIONS.
Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 1er et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e et le 5e manomètre.	Au commencement.	A la fin.	Différence.						

...IMÈTRE (EN FONTE).

SECTION : $0^m,047,034$.

...ce	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	litres.	mèt.	degr.
...),7	0,025	0,052	0,005	0,005	0,49	1,50	1,01	1	25,2188	25470,99	0,278	"
...),5	0,080	0,165	0,010	0,020	0,60	1,44	0,84	1	25,2263	21190,09	0,537	"
...),3	0,245	0,498	0,030	0,065	0,10	0,903	0,803	4	107,8215	38359,72	0,949	"
...),0	0,565	1,155	0,055	0,145	"	0,55	0,550	4	107,402	59071,10	1,420	"
...,5	1,000	2,035	0,120	0,255	"	1,572	1,572	4	108,1768	171784,76	1,904	"
...,5	1,350	2,735	0,160	0,320	"	2,045	2,045	4	108,5415	223921,11	2,206	"
...,0	1,840	3,730	0,220	0,460	"	1,925	1,925	4	108,4534	210345,37	2,572	"
...,8	5,505	11,343	0,701	1,428	0,10	1,960	1,86	4	108,6251	202911,69	4,497	"

...MÈTRE (EN FONTE).

SECTION : $0^m,069,3$.

...),8	0,010	0,028	0,001	0,006	0,52	1,325	0,805	1	25,207	20291,635	0,244	22
...),4	0,055	0,119	0,005	0,025	0,79	1,41	0,62	1	25,246	15652,52	0,538	22
...),4	0,125	0,269	0,020	0,055	"	1,402	1,402	4	108,047	154912,95	0,823	22
...),2	0,255	0,537	0,025	0,110	"	0,97	0,97	4	107,525	105680,187	1,155	22
...).	0,535	1,105	0,055	0,220	"	1,01	1,01	4	107,756	109695,61	1,652	22
...,5	1,170	2,305	0,190	0,42	"	1,10	1,10	4	107,8242	119253,565	2,390	20 5
...,5	1,570	3,205	0,205	0,59	1,643	2,353	0,71	4	110,070	78562,46	2,799	"
...23	2,047	4,07	0,35	"	"	1,453	1,453	4	108,0790	157687,261	3,160	20 5
...26	1,997	4,143	0,231	0,638								

...AMÈTRE (EN FONTE).

SECTION : $0^m,196,35$.

...025	0,02	0,045	0,005	0,010	"	0,6915	0,6915	4	107,5012	74343,303	0,4207	"
...025	0,02	0,045	"	0,015	"	0,7375	0,7375	4	107,5450	79314,437	0,4488	"
...03	0,03	0,06	"	0,015	"	1,9105	1,9105	4	108,427	207149,784	0,4752	"
...05	0,06	0,12	"	0,05	"	1,1265	1,1265	4	107,8425	121484,576	0,7932	"
...05	0,06	0,125	0,005	0,05	"	1,73	1,73	4	108,287	187336,51	0,7951	"
...09	0,11	0,21	0,01	0,05	"	1,6995	1,6995	4	108,261	204333,000	1,0412	"
...02	0,11	0,23	0,01	0,07	"	1,5765	1,5765	4	108,1738	170535,996	1,1135	"
...03	0,13	0,26	0,01	0,06	"	1,946	1,946	4	108,4631	211069,19	1,1197	"
...04	0,11	0,25	"	0,09	"	1,5965	1,5965	4	108,1889	172723,579	1,1278	"

Pour compléter tous les éléments nécessaires à l'intelligence des calculs auxquels ces expériences vont donner lieu, je ferai suivre leur exposé d'un tableau indicatif des distances comprises entre le réservoir et les différents manomètres.

TUYAUX.		N°s D'ORDRE.	Entre le cylindre d'arrivée et le 1er manomètre.	Entre le 1er et le 2e manomètre.	Entre le 2e et le 3e manomètre.	Entre le 3e et le 4e manomètre.	Entre le 4e manomètre et le cylindre réservoir.
DIAMÈTRE.	NATURE.						
met.			mèt.	met	met.	mèt.	met
0,0122		1	8,13	50,00	50,00	5,883	0,167
0,0266	Fer etire	2	8,35	50,00	50,00	4,805	0,30
0,0395		3	8,40	50,00	50,00	4,67	0,29
0,014		4	0,32	25,00	25,00	1,41	0,71
0,027	Plomb	5	0,34	25,00	25,00	1,50	0,70
0,041		6	0,35	25,00	25,00	1,50	0,70
0,0268		7	8,19	50,00	50,00	4,85	0,30
0,0826	Tôle et bitume.	8	6,27	50,00	50,00	4,72	0,28
0,196		9	6,54	50,00	50,00	4,477	0,33
0,285		10	6,374	50,00	50,00	4,705	0,315
0,04968	Verre.	11	"	21,57	23,29	"	"
0,0359		12	8,785	50,00	50,00	5,21	0,285
0,0364		13	8,785	50,00	50,00	5,21	0,285
0,0795		14	6,73	50,00	50,00	4,74	0,18
0,0801		15	6,73	50,00	50,00	4,74	0,18
0,0819		16	6,59	50,00	50,00	4,716	0,28
0,137	Fonte.	17	6,297	50,00	50,00	4,73	0,45
0,188		18	6,78	50,00	50,00	4,203	0,30
0,2432		19	6,912	50,00	50,00	4,17	0,276
0,2447		20	6,912	50,00	50,00	4,17	0,276
0,29705		21	6,27	50,00	50,00	4,765	0,30
0,50		22	6,353	50,00	50,00	4,70	0,30

Tels sont les résultats des 198 expériences ayant pour but :

1° De déterminer les relations existant entre les pentes, les vitesses moyennes et les diamètres des conduites;

2° De donner les pertes de charge nécessaires à la production des vitesses moyennes lors de l'introduction de l'eau dans les tuyaux.

Nous commencerons d'abord par rechercher les relations qui lient entre eux les pentes, les vitesses et les diamètres.

Pour atteindre ce but, nous allons présenter pour chaque conduite un tableau indiquant la série des charges données par mètre, et les vitesses par seconde correspondantes.

Pour les conduites en plomb 4, 5, 6, les pentes ou charges par mètre s'obtiendront en divisant par 50 les chiffres des colonnes 18.

Pour la conduite en verre 11, le diviseur deviendra 44,86.

Pour toutes les autres conduites, il sera 100,00.

Ces diviseurs, comme on doit se le rappeler, représentent la distance existant entre le 1er et le 3e manomètre; le 2e manomètre a toujours été placé au milieu des manomètres 1 et 3.

Dans la conduite en verre, seulement, la distance du 1er au 2e manomètre était de 21m,57
du 2e au 3e, de . . . . . 23 ,29
TOTAL. 44, 86

1° CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0122 (1). Pentes.	Vitesses.	Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0266 (2). Pentes.	Vitesses.	Nos D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0395 (3). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
1	0,00085	0,0344	14	0,00033	0,0578	27	0,00022	0,0626	(1) Voy. planche V.
2	0,00184	0,0718	15	0,00152	0,1310	28	0,00078	0,1112	(2) *Ibid.*
3	0,00304	0,1170	16	0,00487	0,2480	29	0,00182	0,1848	(3) *Ibid.*
4	0,00533	0,1470	17	0,01015	0,3680	30	0,00336	0,2616	
5	0,00754	0,1690	18	0,01937	0,5220	31	0,00650	0,3817	
6	0,01650	0,2300	19	0,03126	0,6670	32	0,01286	0,5594	
7	0,02580	0,2870	20	0,04348	0,7960	33	0,02389	0,7878	
8	0,03472	0,3430	21	0,06316	0,9610	34	0,03123	0,9149	
9	0,04399	0,3920	22	0,10022	1,2350	35	0,04348	1,0951	
10	0,06264	0,4780	23	0,10571	1,2810	36	0,12315	1,9205	
11	0,08554	0,5730	24	0,17826	1,6820	37	0,17553	2,3055	
12	0,17862	0,8460	25	0,25601	1,9980	38	0,22408	2,5971	
13	0,34426	1,1950	26	0,30952	2,1840				

2° CONDUITES EN PLOMB.

N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,014 (1). Pentes.	Vitesses.	N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,027 (2). Pentes.	Vitesses.	N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,041 (3). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	met.		met.	met.		mèt.	mèt.	
39	0,00064	0,040	46	0,00044	0,065	53	0,00082	0,120	(1) Voy. planche V.
40	0,00336	0,165	47	0,00300	0,188	54	0,00362	0,276	(2) *Ibid.*
41	0,00862	0,246	48	0,00814	0,322	55	0,00778	0,488	(3) *Ibid.*
42	0,02526	0,446	49	0,02268	0,597	56	0,02310	0,792	
43	0,06146	0,732	50	0,05436	1,021	57	0,05600	1,316	
44	0,11438	1,048	51	0,10500	1,438	58	0,11074	1,925	
45	0,16148	1,290	52	0,14632	1,679	59	0,15880	2,305	

3° CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0268 (1). Pentes.	Vitesses.	N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0826 (2). Pentes.	Vitesses.	N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,196 (3). Pentes.	Vitesses.	N°s D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,285 (4). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		met.	met.	
60	0,00022	0,030	72	0,00027	0,100	84	0,00020	0,180	95	0,00070	0,395	(1) Voy. pl. VI.
61	0,00067	0,092	73	0,00066	0,176	85	0,00048	0,278	96	0,00255	0,848	(2) *Ibid.*
62	0,00225	0,155	74	0,00203	0,357	86	0,00129	0,466	97	0,00433	1,179	(3) *Ibid.*
63	0,00609	0,271	75	0,00629	0,665	87	0,00330	0,780	98	0,00685	1,494	(4) *Ibid.*
64	0,01133	0,384	76	0,01220	0,950	88	0,00580	1,076	99	0,01190	2,034	
65	0,02115	0,567	77	0,02285	1,354	89	0,01190	1,657	100	0,02044	2,698	
66	0,03035	0,678	78	0,03107	1,613	90	0,01200	1,679	101	0,02807	3,207	
67	0,04540	0,853	79	0,04070	1,874	91	0,02100	2,259				
68	0,11846	1,467	80	0,07170	2,572	92	0,02970	2,743				
69	0,17985	1,859	81	0,10654	3,211	93	0,03640	3,052				
70	0,24419	2,203	82	0,13880	3,668	94	0,12156	6,010				
71	0,30714	2,507	83	0,15605	3,897							

4° CONDUITE EN VERRE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,04968 (1). PENTES.	VITESSES.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.	
102	0,00096	0,153	(1) Voyez la planche VI.
103	0,00345	0,312	
104	0,00771	0,485	
105	0,02318	0,893	
106	0,05762	1,478	
107	0,11191	2,108	

5° CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0359 (1). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0364 (2). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0795 (3). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0801 (4). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
108	0,00025	0,051	115	0,00071	0,113	122	0,00065	0,123	128	0,00084	0,193	(1) Voy. pl. VI.
109	0,00071	0,081	116	0,00180	0,188	123	0,00250	0,251	129	0,00294	0,385	(2) *Ibid.*
110	0,00183	0,130	117	0,00651	0,387	124	0,00725	0,446	129 *bis.*	0,00723	0,614	(3) *Ibid.*
111	0,00670	0,253	118	0,01441	0,601	125	0,01610	0,678	130	0,00737	0,624	(4) *Ibid.*
112	0,01525	0,381	119	0,03018	0,892	126	0,03100	0,931	131	0,01557	0,804	
113	0,03240	0,551	120	0,03966	1,034	127	0,04535	1,142	132	0,02938	1,248	
114	0,04153	0,633	121	0,04650	1,126				133	0,04473	1,526	

6^ CONDUITES EN FONTE NEUVE.

N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0819 (1). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,137 (2). Pentes.	Vitesses.	N^os D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,188 (3). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
134	0,00020	0,088	147	0,00024	0,149	157	0,00027	0,205	(1) Voy. pl. VI.
135	0,00083	0,171	148	0,00087	0,298	158	0,00175	0,497	(2) Voy. pl. VII.
136	0,00232	0,358	149	0,00209	0,488	159	0,00368	0,758	(3) *Ibid*
137	0,00531	0,561	150	0,00475	0,763	160	0,00805	1,128	
138	0,01020	0,791	151	0,01260	1,279	161	0,01340	1,488	
139	0,02255	1,185	152	0,02250	1,714	162	0,02250	1,933	
140	0,03208	1,418	153	0,03318	2,098	163	0,03810	2,506	
141	0,04042	1,571	154	0,03905	2,281	164	0,10980	4,323	
142	0,09547	2,453	155	0,09852	3,640	165	0,14591	4,928	
143	0,09904	2,487	156	0,16756	4,693				
144	0,11978	2,720							
145	0,16807	3,238							
146	0,17072	3,265							

7° CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,2432 (1). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,2447 (2). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	BIEN NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,297 (3). Pentes.	Vitesses.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	NEUVE. DIAMÈTRE DE 0m,50 (4). Pentes.	Vitesses.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.		mèt.	mèt.		mèt.	mèt		mèt.	mèt.	
166	0,00094	0,307	174	0,00052	0,278	182	0,00028	0,244	190	0,00045	0,4207	(1) Voy. pl. VII.
167	0,00202	0,452	175	0,00165	0,537	183	0,00119	0,538	191	0,00045	0,4488	(2) *Ibid.*
168	0,00473	0,707	176	0,00498	0,949	184	0,00269	0,823	192	0,00060	0,4752	(3) *Ibid.*
169	0,01150	1,106	177	0 01155	1,420	185	0,00537	1,155	193	0,00120	0,7932	(4) *Ibid.*
170	0,02290	1,547	178	0,02035	1,904	186	0,01105	1,652	194	0,00125	0,7951	
171	0,0320	1,833	179	0,02735	2,206	187	0,02305	2,390	195	0,00210	1,0412	
172	0,04105	2,073	180	0,03730	2,572	188	0,03205	2,799	196	0,00230	1,1135	
173	0,13981	3,833	181	0,11343	4,497	189	0,04070	3,160	197	0,00260	1,1197	
									198	0,00250	1,1278	

En présence des résultats si variés que ces tableaux présentent, non-seulement en ce qui concerne les pentes ou charges qui s'élèvent depuis $0^m,00022$ jusqu'à $0^m,34426$ par mètre, et les vitesses qui s'étendent entre $0^m,0344$ par seconde et $6^m,01$, mais encore en ce qui touche la nature des tuyaux et l'état de leurs surfaces, on devait se demander si la formule unique de Prony répondait à tous les cas, comme il le supposait lui-même.

Et d'abord, la simple inspection des résultats relatifs aux conduites de $0^m,0359$ et $0^m,0364$, de $0^m,0795$ et $0^m,0801$, de $0^m,2432$ et $0^m,2447$ démontre que, lorsque les tuyaux sont recouverts d'un léger enduit calcaire, la vitesse moyenne diminue très-notablement.

Les coefficients de la formule de Prony, loin d'être constants, devraient donc varier très-notablement avec l'état des surfaces. Les tableaux suivants, dans lesquels j'ai mis en rapport,

1° Les vitesses déduites de la formule de Prony avec celles données par l'expérience,

2° Les charges tirées de la même formule, et correspondant aux

vitesses expérimentales avec les pentes qui ont produit ces dernières,

Montreront les coïncidences et les écarts de la formule connue,

$$0{,}0000173314\,v + 0{,}000348259\,v^2 = \tfrac{1}{4}\,D\,j$$

CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

DIAMÈTRE DE 0m,0122.				DIAMÈTRE DE 0m,0266.				DIAMÈTRE DE 0m,0395.			
		FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.	
PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00085	0,0344	0,00026	0,065	0,00033	0,0578	0,00035	0,06	0,00022	0,0626	0,00023	0,06
0,00184	0,0718	0,00095	0,105	0,00152	0,1310	0,00122	0,15	0,00078	0,1112	0,00062	0,125
0,00304	0,1170	0,00233	0,14	0,00487	0,2480	0,00392	0,28	0,00182	0,1848	0,00152	0,20
0,00533	0,1470	0,00305	0,19	0,01015	0,3680	0,00814	0,415	0,00336	0,2616	0,00284	0,285
0,00754	0,1690	0,00426	0,23	0,01937	0,5220	0,01552	0,58	0,00650	0,3817	0,00576	0,37
0,01659	0,2300	0,00734	0,355	0,03126	0,6670	0,02525	0,75	0,01286	0,5594	0,01204	0,58
0,02580	0,2870	0,01125	0,45	0,04348	0,7960	0,03561	0,885	0,02389	0,7878	0,02339	0,80
0,03472	0,3430	0,01515	0,53	0,06316	0,9610	0,05077	1,07	0,03123	0,9149	0,03109	0,915
0,04399	0,3920	0,01957	0,595	0,10022	1,2350	0,08310	1,36	0,04348	1,0951	0,04524	1,085
0,06264	0,4780	0,02905	0,715	0,10571	1,2810	0,08914	1,395	0,12315	1,9205	0,13338	1,84
0,08554	0,5730	0,04033	0,84	0,17826	1,6820	0,15218	1,82	0,17553	2,3055	0,19142	2,205
0,17862	0,8460	0,08633	1,225	0,25601	1,9980	0,21469	2,185	0,22408	2,5971	0,24294	2,50
0,34426	1,1950	0,16984	1,71	0,30952	2,1840	0,25456	2,405				

CONDUITES EN PLOMB.

DIAMÈTRE DE 0m,014.				DIAMÈTRE DE 0m,027.				DIAMÈTRE DE 0m,011.			
		FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY.				FORMULE DE PRONY	
PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00064	0,040	0,00037	0,06	0,00044	0,065	0,00039	0,07	0,00082	0,120	0,00069	0,13
0,00336	0,165	0,00351	0,16	0,00300	0,188	0,00236	0,22	0,00362	0,276	0,00314	0,30
0,00862	0,246	0,00720	0,27	0,00814	0,322	0,00610	0,37	0,00778	0,488	0,00899	0,45
0,02526	0,446	0,02191	0,48	0,02268	0,597	0,02011	0,64	0,02310	0,792	0,02254	0,80
0,06146	0,732	0,05663	0,76	0,05436	1,021	0,05630	1,00	0,05600	1,316	0,06098	1,26
0,11438	1,048	0,11491	1,05	0,10500	1,438	0,11067	1,40	0,11074	1,925	0,12906	1,78
0,16148	1,290	0,17197	1,25	0,14632	1,679	0,14993	1,66	0,15880	2,305	0,18439	2,135

CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

DIAMÈTRE DE 0m,268.				DIAMÈTRE DE 0m,0826.				DIAMÈTRE DE 0m,196.				DIAMÈTRE DE 0m,285.			
PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00022	0,030	0,00012	0,045	0,00027	0,100	0,00025	0,10	0,00020	0,180	0,00029	0,14	0,00070	0,395	0,00086	0,35
0,00067	0,092	0,00066	0,09	0,00066	0,176	0,00070	0,175	0,00048	0,278	0,00065	0,235	0,00255	0,848	0,00374	0,70
0,00225	0,155	0,00164	0,185	0,00203	0,357	0,00249	0,32	0,00129	0,466	0,00171	0,40	0,00433	1,179	0,00709	0,92
0,00609	0,271	0,00449	0,32	0,00629	0,665	0,00801	0,585	0,00330	0,780	0,00460	0,66	0,00685	1,494	0,01121	1,16
0,01133	0,384	0,00849	0,44	0,01220	0,950	0,01602	0,84	0,00580	1,076	0,00860	0,88	0,01190	2,084	0,02064	1,535
0,02115	0,567	0,01836	0,61	0,02285	1,354	0,03187	1,14	0,01190	1,657	0,02017	1,27	0,02044	2,698	0,03629	2,02
0,03035	0,678	0,02567	0,74	0,03107	1,613	0,04507	1,355	0,01200	1,679	0,02065	1,275	0,02807	3,207	0,05127	2,37
0,04540	0,853	0,03975	0,91	0,04070	1,874	0,06054	1,53	0,02100	2,259	0,03710	1,69				
0,11846	1,467	0,11612	1,49	0,07170	2,572	0,11355	2,04	0,02970	2,743	0,05433	2,02				
0,17985	1,859	0,18463	1,84	0,10654	3,211	0,1762	2,49	0,03640	3,052	0,07264	2,24				
0,24419	2,203	0,25727	2,14	0,13880	3,668	0,2301	2,845	0,12156	6,010	0,25865					
0,30714	2,507	0,33397	2,405	0,15605	3,897	0,2596									

CONDUITE EN VERRE.

DIAMÈTRE DE 0m,04968.				OBSERVATIONS.
PENTES par mètre.	VITESSES expérimentales.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	
mèt.	mèt.	mèt.	mèt	
0,00096	0,153	0,00084	0,16	
0,00345	0,312	0,00312	0,325	
0,00771	0,485	0,00727	0,50	
0,02318	0,893	0,02351	0,885	
0,05762	1,478	0,06349	1,41	
0,11191	2,108	0,12778	1,97	

CONDUITES EN FONTE.

CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.				CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.			
DIAMÈTRE DE 0m,359.				DIAMÈTRE DE 0m,0364.				DIAMÈTRE DE 0m,0795.				DIAMÈTRE DE 0m,0801.			
PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY.		PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY.		PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY.		PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY.	
		Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.			Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.			Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.			Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00025	0,051	0,00019	0,06	0,00071	0,113	0,00067	0,115	0,00065	0,123	0,00036	0,17	0,00084	0,193	0,00079	0,195
0,00071	0,081	0,00040	0,115	0,00180	0,188	0,00174	0,195	0,00250	0,251	0,00131	0,35	0,00294	0,385	0,00291	0,385
0,00183	0,130	0,00090	0,195	0,00651	0,387	0,00656	0,39	0,00725	0,446	0,00385	0,62	0,00723	0,614	0,00700	0,62
0,00670	0,253	0,00291	0,39	0,01441	0,601	0,01492	0,59	0,01610	0,678	0,00869	0,93	0,00737	0,624	0,00722	0,625
0,01525	0,381	0,00634	0,60	0,03018	0,892	0,03201	0,865	0,0310	0,931	0,01597	1,305	0,01557	0,864	0,01361	0,92
0,03240	0,551	0,01280	0,89	0,03966	1,034	0,04256	0,995	0,04535	1,142	0,02377	1,585	0,02938	1,248	0,02826	1,275
0,04155	0,633	0,01661	1,01	0,04650	1,126	0,05058	1,08					0,04473	1,526	0,04177	1,58

CONDUITES EN FONTE NEUVE.

DIAMÈTRE DE 0m,0819.				DIAMÈTRE DE 0m,137.				DIAMÈTRE DE 0m,188.			
PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY.		PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY.		PENTES par mètre.	VITESSES expéri-mentales.	FORMULE DE PRONY.	
		Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.			Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.			Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00020	0,088	0,00021	0,085	0,00240	0,149	0,00030	0,46	0,00027	0,205	0,00039	0,17
0,00083	0,171	0,00063	0,195	0,00870	0,298	0,001066	0,90	0,00175	0,497	0,00204	0,46
0,00232	0,358	0,00251	0,345	0,00209	0,483	0,00259	0,43	0,00368	0,758	0,00456	0,68
0,00531	0,561	0,00581	0,535	0,00475	0,763	0,00626	0,66	0,00805	1,128	0,00988	1,02
0,01020	0,791	0,01128	0,75	0,01260	1,279	0,01731	1,09	0,01340	1,488	0,01700	1,32
0,02255	1,185	0,02489	1,125	0,0225	1,714	0,0306	1,465	0,02250	1,933	0,02831	1,72
0,03208	1,418	0,03550	1,35	0,03318	2,098	0,04590	1,78	0,03810	2,506	0,04742	2,24
0,04042	1,571	0,04325	1,515	0,03905	2,281	0,05401	1,935	0,10980	4,323	0,1393	
0,09547	2,453	0,10417	2,345	0,09852	3,640	0,13750		0,14591	4,928	0,1817	
0,09904	2,487	0,10757	2,385	0,16756	4,693	0,2276					
0,11978	2,720	0,12814	2,63								
0,16807	3,238	0,1810									
0,17072	3,265	0,1842									

CONDUITES EN FONTE.

CHARGÉE DE DÉPÔTS.				LA MÊME NETTOYÉE.				BIEN NETTOYÉE.				NEUVE.			
DIAMÈTRE DE 0m,2432.				DIAMÈTRE DE 0m,2447.				DIAMÈTRE DE 0m,297.				DIAMÈTRE DE 0m,50.			
PENTE par mètre	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.	PENTE par mètre.	VITESSES EXPÉRIMENTALES.	FORMULE DE PRONY. Pente correspondant à la vitesse expérimentale.	FORMULE DE PRONY. Vitesse correspondant à la pente expérimentale.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mè .	met
0,00094	0,307	0,00064	0,38	0,00052	0,278	0,00053	0,28	0,00028	0,244	0,00033	0,22	0,00045	0,4207	0,00055	0,38
0,00202	0,452	0,00129	0,57	0,00165	0,537	0,00181	0,515	0,00119	0,538	0,00149	0,48	0,00045	0,4488	0,00063	0,38
0,00473	0,707	0,00309	0,88	0,00498	0,949	0,00541	0,91	0,00269	0,823	0,00334	0,73	0,00060	0,4752	0,00069	0,44
0,01150	1,106	0,00731	1,39	0,01155	1,420	0,01188	1,40	0,00537	1,155	0,00653	1,045	0,00120	0,7932	0,00185	0,63
0,02290	1,547	0,01420	1,975	0,02035	1,904	0,02109	18,6	0,01105	1,652	0,01315	1,51	0,00125	0,7951	0,00187	0,645
0,03200	1,833	0,01970	2,345	0,02735	2,206	0,02831	2,17	0,02305	2,390	0,02735	2,195	0,00210	1,0412	0,00316	0,84
0,04105	2,073	0,02513	2,655	0,03730	2,572	0,03833	2,535	0,03205	2,799	0,03743	2,59	0,00230	1,1135	0,00359	0,88
0,13981	3,833	0,0862		0,11343	4,497	0,1168		0,04070	3,160	0,04772	2,92	0,00250	1,1278	0,00371	0,92

Si nous comparons les résultats mis en présence dans les tableaux précédents, nous arriverons à conclure :

Que l'état des surfaces exerce une influence notable sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

Si en effet nous examinons d'abord le tableau relatif à l'écoulement de l'eau dans les conduites enduites de bitume, nous remarquerons que les tuyaux des diamètres $0^m,0826$, $0^m,196$, $0^m,285$ donnent des vitesses expérimentales bien supérieures aux vitesses accusées par la formule de Prony.

Le rapport entre ces vitesses s'élève jusqu'à $\frac{32}{23}$.

La conduite en verre donnerait des résultats dans le même sens; si la différence est moins grande, cela doit tenir à l'irrégularité du diamètre de ce tuyau.

Si nous prenons au contraire la conduite de $0^m,2432$, dont le diamètre après nettoiement est devenu égal à . . . . . $0^m,2447$

Nous trouverons que, pour la pente de $0^{m},04105$ par mètre, la formule de Prony donne pour la vitesse . . . . . $2^{m},655$
tandis que l'expérience indique . . . . . 2 ,073

Si nous passons de là à la conduite nettoyée de $0^{m},2447$, nous verrons que, pour la pente de $0^{m},03723$ par mètre, la formule de Prony donne pour la vitesse . . . . . $2^{m},535$
et l'expérience . . . . . 2 ,573

Les tuyaux de { $0^{m},0359$ recouverts de dépôts, / $0,0364$ nettoyés, / $0,0795$ recouverts de dépôts, / $0,0801$ nettoyés,

offrent les mêmes résultats.

La première conclusion paraît donc à l'abri de toute contestation.

Arrivons à l'influence que peuvent exercer les diamètres lorsque les surfaces présentent à peu près le même degré de poli.

Si nous examinons les tableaux relatifs aux débits comparatifs des tuyaux ayant

$0^{m},0122$ / $0,0266$ } de diamètre

et de

$0^{m},137$ / $0,188$ / $0,297$ / $0,50$ } de diamètre,

nous verrons que, tandis que pour les premiers les résultats de l'expérience sont notablement au-dessous de ceux de la formule, pour les seconds, au contraire, les résultats de l'expérience les dépassent très-largement.

On peut donc admettre que les volumes croissent avec les diamètres dans une proportion plus grande que celle assignée par

la formule; nous chercherons à déterminer la loi de cet accroissement.

Nous ferons encore une observation générale, c'est que les conduites en plomb de $0^m,014$, $0^m,027$, $0^m,041$ donnent des résultats à peu près identiques avec la formule de Prony, tandis que les grosses conduites en fonte neuve de $0^m,137$, $0^m,188$, $0^m,50$ présentent, pour les mêmes pentes, des vitesses notablement plus considérables.

Cela s'explique facilement :

C'est en effet sur des tuyaux d'un grand degré de poli et d'un diamètre analogue à mes conduites en plomb que MM. Dubuat et Bossut ont agi; on devait donc retrouver leurs résultats. C'est au contraire sur des tuyaux de grands diamètres, mais déjà recouverts de dépôts, puisqu'ils faisaient partie d'une distribution existante, que Couplet a opéré. Les résistances dans ces tuyaux devaient donc être supérieures, comme on le verra en effet plus tard, à celles trouvées dans ceux de diamètre analogue que j'ai soumis à l'expérience.

Quant à l'accord jugé remarquable par Prony entre ses formules et la quarante-troisième expérience de son tableau, expérience relative au tuyau de $0^m,487259$, il ne provient que de la compensation qui s'est établie entre les résultats donnés par des tuyaux de petit diamètre, mais bien polis, et des tuyaux d'un grand diamètre, mais ayant déjà longtemps servi.

En déterminant en effet le coefficient de la résistance dans la formule $Ri = av^2$,

1° Pour les expériences faites par Dubuat sur un tuyau de $0^m,027\,0699$ de diamètre et $19^m,9506$ de longueur[1], et pour lequel

[1] Les chiffres de la page suivante sont extraits des *Recherches physico-mathématiques* de Prony : des charges totales exprimées dans la première colonne devraient être soustraites les portions de ces charges employées à la production des vitesses; cette déduction est nécessaire lorsqu'il s'agit de tuyaux de petite longueur. J'ai conservé toutefois les chiffres de Prony parce que leur rectification ne les modifierait point assez pour altérer les conclusions auxquelles je vais parvenir.

Aux charges de	Et aux pentes de	Correspondent les vitesses
$0^m,004,060,5$	$0^m,000,203,528$	$0^m,042,956,5$
0 ,013,535	0 ,009,678,426	0 ,098,087
0 ,160,525	0 ,008,046,37	0 ,360,522
0 ,210,604	0 ,010,556,1	0 ,408,696
0 ,242,547	0 ,012,157,5	0 ,441,739
0 ,333,502	0 ,016,716,3	0 ,540,870
0 ,370,858	0 ,018,588,9	0 ,565,217
0 ,395,221	0 ,019,809,9	0 ,591,304
0 ,641,558	0 ,032,157,4	0 ,775,652

on trouve, par la méthode des moindres carrés, $\frac{1}{\sqrt{a}} = 34,328$.

2° Pour les expériences faites par Couplet :

1° Sur un tuyau de $0^m,13535$ de diamètre, anciennement posé, de $2280^m,37$ de longueur, et pour lequel,

Aux charges de	Et aux pentes de	Correspondent les vitesses
$0^m,151,132$	$0^m,000,066,274,3$	$0^m,054,416,6$
0 ,306,784	0 ,000,134,531	0 ,084,787
0 ,453,422	0 ,000,198,836	0 ,111,685
0 ,570,716	0 ,000,250,275	0 ,130,096
0 ,649,678	0 ,000,284,901	0 ,141,115
0 ,676,749	0 ,000,296,772	0 ,144,068

on trouve également..... $\frac{1}{\sqrt{a}} = 30,2072$;

2° Sur un tuyau d'un diamètre (43e expérience du tableau de Prony) de $0^m,487259$, d'une longueur de $1169^m,42$ et dans lequel à la charge de $3^m,9279$ correspondait la vitesse

1^m,06003, on trouve..... $\frac{1}{\sqrt{a}} = 37{,}058$ [1].

On voit donc que, par suite des conditions diverses dans lesquelles était placé le tuyau de Dubuat, de 0^m,027 de diamètre, et celui de Couplet, de 0^m,487, il s'est établi une compensation presque parfaite, puisque la résistance a pour coefficient dans l'un et l'autre :

1° 34,328
2° 37,058

On verra plus tard que ces mêmes tuyaux placés dans des conditions identiques auraient donné pour la résistance :

le 1er, le coefficient 34,20
le 2e, le coefficient 44,10

preuve nouvelle de l'influence du diamètre, car le tuyau de plomb était, sans aucun doute, d'un beaucoup plus grand poli que le tuyau en fonte.

Inutile au reste de faire observer que les tableaux précédents justifient complétement l'assertion que, dans les gros diamètres,

[1] Les coefficients 34,328, 30,2072, 37,058 donnent pour les vitesses correspondantes aux vitesses expérimentales les nombres suivants, savoir :

TUYAUX.					
0^m,027		0^m,13535		0^m,4872	
EXPÉRIENCES.	CALCULS.	EXPÉRIENCES.	CALCULS.	EXPÉRIENCES.	CALCULS.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,042,956,5	0,056,976,2	0,054,416,6	0,063,899,5	1,060,03	1,060,03
0,098,087	0,104,024	0,084,787	0,091,145,6		
0,360,522	0,358,246	0,111,683	0,110,808,4		
0,408,696	0,410,329	0,130,096	0,124,318		
0,441,739	0,440,356	0,141,115	0,132,639		
0,540,870	0,516,359	0,144,068	0,135,374		
0,565,217	0,544,513				
0,591,304	0,562,112				
0,775,652	0,716,180				
Dubuat.		Couplet.			

le débit indiqué par les formules de Prony est inférieur à celui que l'expérience indique.

Avant de rechercher la loi qui lie dans chaque tuyau les pentes aux vitesses, nous ferons encore une observation : c'est qu'il paraîtrait, lorsqu'il s'agit de vitesses très-faibles obtenues dans des tuyaux de petit diamètre, que ces vitesses croîtraient proportionnellement aux pentes[1].

On remarque, par exemple, que dans le tuyau en fer étiré de $0^m,0122$,

aux vitesses $\left\{\begin{array}{l} 0^m,0344 \\ 0\ ,0718 \\ 0\ ,1170 \end{array}\right\}$ correspondent les vitesses $\left\{\begin{array}{l} 0^m,00085 \\ 0\ ,00184 \\ 0\ ,00304 \end{array}\right.$

d'où pour les rapports des pentes aux vitesses :

$$0,024,709$$
$$0,025,627$$
$$0,025,983$$

On voit également que pour le tuyau en tôle et bitume de $0^m,0268$,

aux vitesses $\left\{\begin{array}{l} 0^m,030 \\ 0,\ 092 \end{array}\right\}$ correspondent les pentes $\left\{\begin{array}{l} 0^m,000,22 \\ 0\ ,000,67 \end{array}\right.$

d'où, pour les rapports des pentes aux vitesses :

$$0,007,333$$
$$0,007,283$$

égalités de rapport qui constituent l'équation d'une droite passant par l'origine des coordonnées.

Mais, à partir des vitesses de $0^m,10$ à $0^m,12$ par seconde, cette loi, qui se remarque aux abords de l'origine des coordonnées, paraît s'arrêter.

De plus, elle semble disparaître entièrement dans les conduites recouvertes de dépôts.

[1] Les vitesses sont encore proportionnelles aux charges dans l'écoulement de l'eau à travers le sable, ainsi que je l'ai expérimentalement démontré. (Voyez *les Fontaines publiques de Dijon*, page 590.)

Ainsi dans le tuyau en fonte de $0^m,0359$, avant son nettoiement,

aux vitesses $\left\{\begin{matrix}0^m,051\\0\ ,081\end{matrix}\right\}$ correspondent les pentes $\left\{\begin{matrix}0^m,000,25\\0\ ,000,71\end{matrix}\right.$

ce qui donne pour les rapports cherchés :

$$0,004,902$$
$$0,008,765$$

Les points ici seraient donc à peu près situés sur une parabole rapportée à son sommet.

Il convient maintenant de chercher à préciser l'influence exercée par l'état des surfaces et par les diamètres des conduites.

Ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, il faut pour cela diviser les expériences par nature de conduite et par diamètre de tuyau, au lieu de les réunir, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent, à raison du petit nombre d'éléments dont on disposait, et d'en déduire des moyennes sous lesquelles disparaissent les lois cherchées.

Le grand nombre d'expériences que je présente dans ce mémoire permet de réaliser ce travail, car à chaque tuyau correspond une quantité de données telles, qu'il est possible d'en faire sortir avec exactitude la loi d'écoulement qui lui est propre.

Voyons d'abord si pour chaque tuyau se vérifie la relation connue $\frac{Ri}{2} = av + bv^2$, qui devient, division faite des deux membres par $\frac{R}{2}$,

$$i = Av + Bv^2$$

Il suffit pour le reconnaître, ainsi que l'a fait observer Prony, de diviser les deux membres de cette équation par v, et considérant $\frac{i}{v}$ comme une variable z, de voir si les données de la question offrent, ainsi que cela doit être dans le cas où l'hypothèse initiale serait fondée, une ligne droite pour la relation

$$z = A + Bv$$

il pourrait se faire d'ailleurs que la constante A fût égale à zéro, ou négligeable dans certaines circonstances.

On le reconnaîtrait à raison de la proportionnalité de z à v.

Dans ce cas, il est évident que la parabole correspondante qui représenterait la loi cherchée serait

$$i = Bv^2$$

Si, au contraire, la proportionnalité n'atteignait que le rapport de la différence des z à celle des v correspondants, alors la parabole deviendrait

$$i = Av + Bv^2$$

et les résistances dans ce cas croîtraient moins rapidement que dans le premier, c'est-à-dire que le carré de la vitesse.

Enfin, si les coefficients en a et b de la formule $Ri = av + bv^2$ avaient été constants pour tous les diamètres et pour tous les tuyaux, ainsi qu'on l'avait supposé, on aurait obtenu un nombre toujours le même en divisant les différences des z consécutifs par celles des v correspondants et multipliant le quotient par R.

Les planches VII, VIII, IX, déduites des tableaux suivants, permettent d'apprécier toutes ces hypothèses.

CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0122 (1).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0266 (2).				NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0395 (3).			
	PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.		PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
1	0,00085	0,0344	0,024709	0,000150	14	0,00033	0,0578	0,005709	0,0000759	27	0,00022	0,0626	0,003514	0,0000694
2	0,00184	0,0718	0,025627	0,000156	15	0,00152	0,1310	0,011603	0,000154	28	0,00078	0,1112	0,007014	0,000138
3	0,00304	0,1170	0,025983	0,000158	16	0,00487	0,2480	0,019637	0,000261	29	0,00182	0,1848	0,009848	0,000194
4	0,00533	0,1470	0,036258	0,000221	17	0,01015	0,3680	0,027581	0,000367	30	0,00336	0,2616	0,012844	0,000254
5	0,00754	0,1690	0,044615	0,000272	18	0,01937	0,5220	0,037107	0,000493	31	0,00650	0,3817	0,017029	0,000336
6	0,01659	0,2300	0,072130	0,000440	19	0,03126	0,6670	0,046866	0,000623	32	0,01286	0,5594	0,022988	0,000454
7	0,02580	0,2870	0,089895	0,000548	20	0,04348	0,7960	0,054623	0,000726	33	0,02389	0,7878	0,030324	0,000599
8	0,03472	0,3430	0,101224	0,000617	21	0,06316	0,9610	0,065723	0,000874	34	0,03123	0,9149	0,34200	0,000675
9	0,04399	0,3920	0,112219	0,000684	22	0,10022	1,2350	0,081149	0,001079	35	0,04348	1,0951	0,039704	0,000784
10	0,06264	0,4780	0,131046	0,000799	23	0,10571	1,2810	0,082521	0,001097	36	0,12315	1,9205	0,064123	0,001270
11	0,08554	0,5730	0,149284	0,000911	24	0,17826	1,6820	0,105981	0,001442	37	0,17553	2,3055	0,076135	0,001540
12	0,17862	0,8460	0,211135	0,001290	25	0,25601	1,9980	0,128133	0,001704	38	0,22408	2,5971	0,086281	0,001700
13	0,34426	1,1950	0,288083	0,001757	26	0,30952	2,1840	0,141722	0,001885					

(1, 2, 3) Voyez la planche VII.

CONDUITES EN PLOMB.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,014 (1). PENTES i	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,027 (2). PENTES i	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,041 (3). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
39	0,00064	0,040	0,016000	0,000112	46	0,00044	0,065	0,006769	0,0000914	53	0,00082	0,120	0,006833	0,000140
40	0,00336	0,165	0,020363	0,000142	47	0,00300	0,188	0,015957	0,000215	54	0,00362	0,276	0,013114	0,000269
41	0,00862	0,246	0,035040	0,000245	48	0,00814	0,322	0,025279	0,000341	55	0,00778	0,488	0,015942	0,000327
42	0,02526	0,446	0,056636	0,000396	49	0,02268	0,597	0,037990	0,000512	56	0,02310	0,792	0,029166	0,000598
43	0,06146	0,732	0,083961	0,000588	50	0,05436	1,021	0,053242	0,000719	57	0,05600	1,316	0,042553	0,000872
44	0,11438	1,048	0,109141	0,000764	51	0,10500	1,438	0,073018	0,000986	58	0,11074	1,925	0,057527	0,001179
45	0,16148	1,290	0,125178	0,000876	52	0,14632	1,679	0,087147	0,001175	59	0,15880	2,305	0,068893	0,001412

(1, 2, 3) Voyez la planche VIII.

CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMETRE DE 0m,0268 (1). PENTES i.	VITESSES v	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0826 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	OBSERVATIONS.
	mèt.	met.				mèt.	mèt.			
60	0,00022	0,030	0,007333	0,000098	72	0,00027	0,100	0,0027	0,0001115	(1) Voyez pl. VIII.
61	0,00067	0,092	0,007283	0,0000796	73	0,00066	0,176	0,00375	0,000155	(2) *Ibid.*
62	0,00225	0,155	0,014516	0,000194	74	0,00203	0,357	0,005406	0,000223	
63	0,00609	0,271	0,022472	0,000301	75	0,00629	0,665	0,009459	0,000391	
64	0,01133	0,384	0,029505	0,000395	76	0,01220	0,950	0,012842	0,000530	
65	0,02115	0,567	0,037301	0,000500	77	0,02285	1,354	0,016875	0,000698	
66	0,03035	0,678	0,044764	0,000600	78	0,03107	1,613	0,019262	0,000796	
67	0,04540	0,853	0,053224	0,000713	79	0,01070	1,874	0,021718	0,000897	
68	0,11846	1,467	0,080750	0,001082	80	0,07170	2,572	0,027877	0,001151	
69	0,17985	1,859	0,096745	0,001300	81	0,10654	3,211	0,033180	0,001370	
70	0,24419	2,203	0,110844	0,001482	82	0,13880	3,668	0,037840	0,001563	
71	0,30714	2,507	0,122513	0,001642	83	0,15605	3,897	0,040043	0,001654	

CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,196 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,285 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
84	0,00020	0,180	0,001111	0,000109	95	0,00070	0,395	0,001772	0,000253	(1) Voyez pl. VIII.
85	0,00048	0,278	0,001727	0,000169	96	0,00255	0,848	0,003007	0,000428	(2) *Ibid.*
86	0,00129	0,466	0,002768	0,000271	97	0,00433	1,179	0,003673	0,000523	
87	0,00330	0,780	0,004231	0,000415	98	0,00685	1,494	0,004585	0,000633	
88	0,00580	1,076	0,005390	0,000528	99	0,01190	2,034	0,005851	0,000834	
89	0,01190	1,657	0,007182	0,000704	100	0,02044	2,698	0,007576	0,001080	
90	0,01200	1,679	0,007147	0,000700	101	0,02807	3,207	0,008753	0,001250	
91	0,02100	2,259	0,009296	0,000911						
92	0,02970	2,743	0,010827	0,001061						
93	0,03640	3,052	0,011926	0,001169						
94	0,12156	6,010	0,020226	0,001982						

CONDUITE EN VERRE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,04968 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS
	mèt.	mèt.			
102	0,00096	0,153	0,006274	0,000156	(1) Voyez la planche VIII.
103	0,00345	0,312	0,011060	0,000275	
104	0,00771	0,485	0,015900	0,000395	
105	0,02318	0,893	0,025960	0,000645	
106	0,05762	1,478	0,038985	0,000968	
107	0,11191	2,108	0,053088	0,001320	

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0359 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0364 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
108	0,00025	0,051	0,004902	0,00088	115	0,00071	0,113	0,006283	0,000114	(1) Voyez pl. VIII.
109	0,00071	0,081	0,008765	0,000157	116	0,00180	0,188	0,009574	0,000174	(2) *Ibid.*
110	0,00183	0,130	0,014077	0,000253	117	0,00651	0,387	0,016822	0,000305	
111	0,00670	0,253	0,026482	0,000475	118	0,01441	0,601	0,023977	0,000436	
112	0,01525	0,381	0,040026	0,000718	119	0,08018	0,892	0,033834	0,000616	
113	0,03240	0,551	0,058802	0,001056	120	0,03966	1,034	0,038356	0,000698	
114	0,04155	0,633	0,065639	0,001178	121	0,04650	1,126	0,041296	0,000751	

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,0795 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,0801 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
122	0,00065	0,123	0,005284	0,000210	128	0,00084	0,193	0,004652	0,000176	(1) Voir pl. VIII.
123	0,00250	0,251	0,009960	0,000395	129	0,00294	0,385	0,007636	0,000308	(2) *Ibid.*
124	0,00725	0,446	0,016256	0,000645	129 *bis.*	0,00723	0,614	0,011775	0,000475	
125	0,01610	0,678	0,023746	0,000944	130	0,00737	0,624	0,011811	0,000476	
126	0,03100	0,931	0,033298	0,001320	131	0,01557	0,864	0,018025	0,000727	
127	0,04535	1,142	0,039711	0,001576	132	0,02938	1,248	0,023541	0,000950	
					133	0,04473	1,526	0,029312	0,001183	

CONDUITES EN FONTE NEUVE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,0819 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,137 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	DIAMÈTRE DE 0m,188 (3). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.				mèt.	mèt.		
134	0,00020	0,088	0,002273	0,000092	147	0,000240	0,149	0,001611	0,00011	157	0,00027	0,205	0,001348	0,000127
135	0,00083	0,171	0,004854	0,000196	148	0,000870	0,298	0,002919	0,000199	158	0,00175	0,497	0,003521	0,000331
136	0,00232	0,358	0,006480	0,000262	149	0,00209	0,483	0,004327	0,000296	159	0,00368	0,758	0,004855	0,000456
137	0,00531	0,561	0,009465	0,000383	150	0,00475	0,763	0,006225	0,000430	160	0,00805	1,128	0,007136	0,000671
138	0,01020	0,791	0,012895	0,000522	151	0,01260	1,279	0,009851	0,000675	161	0,01340	1,488	0,009005	0,000846
139	0,02255	1,185	0,018987	0,000768	152	0,02250	1,714	0,013127	0,000920	162	0,02250	1,933	0,011640	0,001094
140	0,03208	1,418	0,022623	0,000915	153	0,03318	2,098	0,015815	0,001083	163	0,03810	2,506	0,015238	0,001432
141	0,04042	1,571	0,025728	0,00104	154	0,03905	2,281	0,017119	0,001172	164	0,10980	4,323	0,025399	0,002390
142	0,09547	2,453	0,038819	0,00157	155	0,09852	3,640	0,027065	0,001854	165	0,14591	4,928	0,029608	0,002783
143	0,09904	2,487	0,039823	0,00161	156	0,16756	4,693	0,035704	0,002445					
144	0,11978	2,720	0,044036	0,00178										
145	0,16807	3,238	0,051905	0,002100										
146	0,17072	3,265	0,052188	0,002115										

(1, 2, 3) Voyez la planche IX.

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	CHARGÉE DE DÉPÔTS. DIAMÈTRE DE 0m,2432 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	LA MÊME NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,2447 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$.	$\frac{Ri}{v}$.	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
166	0,00094	0,307	0,003062	0,000372	174	0,00052	0,278	0,001828	0,000224	(1) Voyez pl. IX.
167	0,00202	0,452	0,004469	0,000543	175	0,00165	0,537	0,003073	0,000376	(2) *Ibid.*
168	0,00473	0,707	0,006690	0,000813	176	0,00498	0,949	0,005248	0,000642	
169	0,01150	1,106	0,010402	0,001265	177	0,01155	1,420	0,008115	0,000992	
170	0,02290	1,547	0,015112	0,001838	178	0,02035	1,904	0,010688	0,001307	
171	0,03200	1,833	0,017457	0,002123	179	0,02735	2,206	0,012397	0,001516	
172	0,04105	2,073	0,019802	0,002409	180	0,03730	2,572	0,014502	0,001774	
173	0,13981	3,833	0,036475	0,004435	181	0,11343	4,497	0,025223	0,003085	

CONDUITES EN FONTE.

NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	ANCIENNE BIEN NETTOYÉE. DIAMÈTRE DE 0m,297 (1). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	NUMÉROS D'ORDRE des expériences.	NEUVE. DIAMÈTRE DE 0m,50 (2). PENTES i.	VITESSES v.	$\frac{i}{v}$	$\frac{Ri}{v}$	OBSERVATIONS.
	mèt.	mèt.				mèt.	mèt.			
182	0,0028	0,244	0,001147	0,000170	190	0,00045	0,4207	0,001045	0,000261	(1) Voyez pl. IX.
183	0,00119	0,538	0,002212	0,000328	191	0,00045	0,4480	0,001003	0,000251	(2) *Ibid.*
184	0,00269	0,823	0,003268	0,000485	192	0,00060	0,4752	0,001263	0,000316	
185	0,00537	1,155	0,004649	0,000690	193	0,00120	0,7932	0,001513	0,000378	
186	0,01105	1,652	0,006689	0,000993	194	0,00125	0,7951	0,001572	0,000392	
187	0,02305	2,390	0,009425	0,001400	195	0,00210	1,0412	0,002017	0,000504	
188	0,03205	2,799	0,011450	0,001701	196	0,00230	1,1135	0,002065	0,000516	
189	0,04070	3,160	0,012880	0,001913	198	0,00250	1,1278	0,002217	0,000554	

On voit :

1° Que pour chaque tuyau les rapports des différences des z à celles des v sont à peu près constants, puisqu'on obtient des lignes droites en prenant les z pour ordonnées et les v pour abscisses.

D'où la conséquence que, pour chaque tuyau, la forme de la fonction

$$i = Av + Bv^2$$

peut être adoptée.

Il n'y a d'exception qu'à l'origine des coordonnées des tuyaux de petit diamètre, où la loi qui lie les pentes aux vitesses est donnée par une ligne droite.

2° Qu'en passant d'un tuyau à l'autre, les valeurs de a et de b dans l'expression

$$\frac{Ri}{v} = av + bv^2$$

ne sont point constantes, et qu'elles varient soit avec les surfaces, lorsque ces dernières offrent des degrés de poli inégaux, soit avec les rayons, lorsque les surfaces, au contraire, sont à peu près identiques.

3° On reconnaît encore, en jetant les yeux sur les colonnes 1 et 2 des tableaux relatifs aux tuyaux recouverts de dépôts,

$0^m,0359$, $0^m,0795$, $0^m,2432$, que les rapports des $\frac{\frac{i}{v}}{v} = \frac{i}{v^2}$ sont sensiblement constants.

D'où résulte cette conséquence, que plus le degré de poli diminue dans les tuyaux, plus le rapport $\frac{i}{v^2}$ est près de devenir constant, et que ce rapport même peut être considéré comme constant pour les tuyaux anciens ou recouverts de dépôts.

Ce qui montre expérimentalement, d'une part, que le terme en v^2 se rapporte principalement à cette partie de la résistance destinée à surmonter les aspérités disséminées sur les surfaces; et, d'autre part, permet d'arriver à une expression très-simple pour le mouvement de l'eau dans les tuyaux.

La constance du rapport $\frac{i}{v^2}$ pour un diamètre déterminé donne, en effet, la loi:

$$i = B_1 v^2$$

Or, comme dans les distributions d'eau les tuyaux, après un très-petit nombre d'années, sont recouverts de dépôts, il en résulte que l'on devra en pratique recourir à la formule ci-dessus.

Mais il nous reste à serrer encore de plus près les questions que nous avons soulevées.

Nous allons pour cela déterminer les valeurs des quantités a, b et b_1 dans les formules $\frac{Ri}{2} = av + bv^2$, et $\frac{Ri}{2} = b_1 v^2$.

Et ces valeurs trouvées nous chercherons à présenter:

1° La loi de l'influence des diamètres dans la formule, ou les courbes formées par les constantes prises pour ordonnées, les diamètres étant les abscisses, dans les tuyaux à surfaces également polies.

2° Le coefficient de rectification qu'il importera dans la pratique d'appliquer aux formules dont je donnerai l'expression, ou aux tables que je calculerai, pour rendre ces formules ou ces tables, obtenues avec des tuyaux neufs, propres aux tuyaux de conduite recouverts de dépôts.

Car c'est évidemment sur cette hypothèse que les calculs d'une distribution d'eau doivent reposer.

Mais avant d'arriver au chapitre suivant, où je m'efforcerai de résoudre ces deux questions, je vais encore déduire des faits qui précèdent quelques conséquences théoriques et pratiques.

Et d'abord, je reviens à la démonstration de ce principe :

Que la résistance opposée par les parois est indépendante de la pression que leur fait supporter le liquide en mouvement.

Si l'on jette les yeux sur les résultats des expériences 12 et 13, on remarquera :

EXPÉRIENCE 12.

1° Qu'au manomètre 1 la charge était de.....	$2^{m},421$
Au 2e, de.....	11 ,321
Au 3e, de.....	20 ,283
La moyenne de la pression entre 1 et 2 est de.....	6 ,871
Entre 2 et 3, de.....	15 ,802
Et en ajoutant le poids de l'atmosphère, on a, pour la pression moyenne entre les manomètres 1 et 2....	17 ,201
Entre les manomètres 2 et 3.....	26 ,132

EXPÉRIENCE 13.

2° Qu'au manomètre 1, la pression était.....	$3^{m},291$
Au 2e.....	20 ,437
Au 3e.....	39 ,308
Moyenne de la pression entre 1 et 2, en y ajoutant le poids de l'atmosphère.....	22 ,194
Moyenne de la pression entre 2 et 3, en tenant également compte du poids de l'atmosphère.....	40 ,202

On voit donc :

1° Que dans l'expérience 12 les pressions de la 1re et de la 2e partie du tuyau sont entre elles dans le rapport de..... $\frac{17}{26}$

2° Que dans l'expérience 13 ce rapport devient..... $\frac{22}{40}$

On trouverait des résultats analogues dans les expériences 24, 25, 26, etc. et, en général, dans toutes celles précédemment rapportées, mais j'ai dû me borner aux plus caractéristiques.

Or, si les résistances dépendaient de la pression, comme la même quantité d'eau coule dans chaque partie de tuyau, il est évident que les manomètres n'accuseraient point les mêmes différences de charges pour vaincre les frottements dans l'une et l'autre partie, tandis que les différences sont :

1° Pour l'expérience 12, entre le { 1er et le 2e manomètre 8m,90 ; 2e et le 3e..... 8 ,96

2° Pour l'expérience 13, entre le { 1er et le 2e..... 17 ,46 ; 2e et le 3e..... 17 ,28

On ne peut donc conserver aucun doute sur la vérité du principe posé.

J'ai fait pourtant encore deux expériences qui conduisent, par une autre voie, au même résultat.

Un robinet d'arrêt avait été placé à l'extrémité de la conduite de 0m,0266; en fermant en partie ce robinet pour augmenter la charge, j'ai obtenu les résultats suivants :

EXPÉRIENCE 23.

Au 1er piézomètre, charge..... 25m,407
Au 2e..... 30 ,733
Au 3e..... 35 ,978
Pente par mètre..... 0 ,10571

Le second manomètre peut être considéré comme représentant la charge moyenne, laquelle, augmentée du poids de l'atmosphère, donne..... 41m,063

Or, la vitesse correspondant à cette charge et à la pente par mètre précitée est..... 1 ,281

J'avais fait préalablement une autre expérience dans laquelle j'avais opéré avec la pente de 0m,10022, laquelle diffère très-peu de la précédente, mais en laissant le robinet ouvert, de manière à modifier la charge que supportait le tuyau, et j'avais obtenu :

EXPÉRIENCE 22.

Au 1er manomètre, charge..... $2^m,394$
Au 2e..... 7 ,443
Au 3e..... 12 ,416
Pente par mètre..... 0 ,10022
La charge moyenne, en tenant compte du poids de l'atmosphère, était..... 17 ,773
La vitesse obtenue a été..... 1 ,235
tandis que le rapport des pressions supportées par le tuyau était, en nombres ronds, dans les expériences 22-23..... $\frac{18}{41}$

Or, on pourra s'assurer plus tard que la formule d'interpolation relative au tuyau de 0,0266 donne les résultats suivants, savoir:

$1^m,231$ pour la vitesse correspondant à la pente de $0^m,10022$
1 ,265 —————————— 0 ,10571

c'est-à-dire que l'on retombe sur le même chiffre pour la vitesse correspondant à une pression moyenne de $17^m,77$, et sur une vitesse un peu plus petite que la vitesse expérimentale pour celle correspondant à la pression moyenne de $41^m,26$.

L'expérience est donc concluante.

J'ai quelquefois, du reste, obtenu des vitesses expérimentales plus grandes lorsque les charges étaient notablement supérieures.

Cela tient à ce que le tuyau se dilate très-sensiblement sous ces charges; j'ai pu mesurer directement cette dilatation.

Je mettais le tuyau en charge en greffant sur lui un tube vertical en verre terminé par un robinet à sa jonction avec le tuyau; puis, lorsque la charge était obtenue, je fermais un robinet établi entre le réservoir et l'origine du tuyau.

Ouvrant alors le robinet placé à la partie inférieure du tube en verre, la conduite, en vertu de son élasticité, reprenait son diamètre primitif, et cette élasticité était mesurée par la hauteur dont l'eau montait dans le tube en verre.

Ce moyen pourrait être facilement appliqué dans des expé-

riences relatives à la recherche de l'élasticité du plomb, de la tôle, de la fonte, du verre, etc. etc.

J'ai voulu m'assurer ensuite si une *impulsion vive*[1], au centre de la conduite, ne tendrait pas à modifier la loi de distribution des vitesses du fluide, et, par conséquent, si l'on ne remarquerait pas sous l'influence de cette impulsion des variations dans les différences des charges, entre le 3e et le 2e manomètre d'une part, et le 2e et le 1er d'autre part. Pour cela, j'ai placé entre le réservoir et le manomètre 4, immédiatement contre le cylindre, un diaphragme en mince paroi percé d'une ouverture de $0^m,005$ de diamètre; ce diaphragme en cuivre avait une épaisseur à peine égale à $0^m,002$.

Trois expériences ont été faites sur la conduite de $0^m,0266$, sous les nos 26 *bis*, 26 *ter*, 26 *quater;* la différence des charges à l'amont et à l'aval de l'orifice était :

$$\left.\begin{matrix}36^m,167\\24\ ,721\\1\ ,541\end{matrix}\right\}$$ d'où pour les vitesses, en vertu de la formule $v = 4{,}42\sqrt{h}$ $$\left\{\begin{matrix}26^m,61\\21\ ,98\\5\ ,49\end{matrix}\right.$$

Dans le tuyau les volumes expérimentaux étaient..... $$\left\{\begin{matrix}0^{lit},272\\0\ ,200\\0\ ,078\end{matrix}\right.$$

d'où pour les vitesses moyennes dans la conduite dont la section était de $0^m,000556$..... $$\left\{\begin{matrix}0^m,489\\0\ ,360\\0\ ,140\end{matrix}\right.$$

On voit donc que l'impulsion était excessivement forte puisqu'elle résultait des différences de vitesse

$$\begin{aligned} 26{,}61 - 0{,}489 &= 26{,}121 \\ 21{,}98 - 0{,}360 &= 21{,}620 \\ 5{,}49 - 0{,}140 &= 5{,}350 \end{aligned}$$

[1] J'ai plusieurs fois employé cette expression qui est peu convenable; je veux dire : « ... Si l'introduction au centre de la conduite d'une forte vitesse ne tendrait, etc.... »

Or, on remarquera, d'une part, que les différences existant entre les manomètres 1 et 2, 2 et 3, dans les expériences précédentes, sont tout à fait analogues à celles qui existaient avant l'emploi du diaphragme.

On remarquera de plus que l'impulsion donnée n'a aucunement fait varier la vitesse moyenne due à la pente accusée par les manomètres.

En effet, en déduisant ces vitesses moyennes de la formule applicable au tuyau de $0^m,0266$, qui est :

$$^1\ Ri = 0{,}000{,}048{,}486\ v + 0{,}000{,}840{,}03\ v^2$$

on trouve pour les vitesses correspondant aux différences piézométriques

les valeurs :	$0^m,500$	$0^m,366$	$0^m,136$ [2]
tandis que l'expérience accuse	$0^m,489$	$0^m,360$	$0^m,140$ [3].

On pourra conclure de ce qui précède, qu'une impulsion centrale, quelque vive qu'elle soit, ne modifie d'une manière appréciable ni le produit, ni la distribution des vitesses des filets fluides, et que, par l'effet de la cohésion de l'eau, cette impulsion s'amortit presque immédiatement.

Du reste, je donnerai de ce fait une seconde démonstration au

[1] Cette formule résulte, comme on le verra plus tard, du tableau des calculs des coefficients des 1re et 2e puissances de v.

[2] Ces vitesses s'obtiennent en substituant dans les formules

les pentes $0^m,01758$	résultant des différences piézométriques	$1^m,758$
$0,00982$		$0,982$
$0,00177$		$0,177$

[3] En comparant les volumes déduits de l'expérience de ceux résultant de la formule $v = 4{,}42\sqrt{h}$, on avait

$$\frac{0^l,272}{0{,}54},\quad \frac{0^l,20}{0{,}431},\quad \frac{0^l,078}{0{,}108},$$

et pour les coefficients de contraction

$$0{,}522,\quad 0{,}465,\quad 0{,}726.$$

moyen de l'instrument qui m'a servi à déterminer les vitesses relatives des filets fluides.

Je montrerai en même temps que, bien que la loi de distribution des vitesses ne soit pas altérée par une impulsion centrale donnée à l'amont, une augmentation de vitesse à l'aval, obtenue au moyen d'un raccordement conique du tuyau en expérience avec un tuyau de diamètre moindre, paraît modifier la loi de distribution des vitesses, en augmentant la vitesse centrale et la flèche de la courbe.

Je donnerai le résultat de cette double expérience dans le chapitre V.

Il s'est encore produit pendant mes expériences un fait qu'il convient peut-être de signaler :

Lorsque les eaux d'un tuyau coulaient sous une forte charge et que brusquement on prenait une charge moindre, condition qu'il était facile de remplir lorsqu'on faisait usage des appareils (pl. III, fig. 11 et 12), les manomètres, après une oscillation brusque, se fixaient bientôt à un niveau constant.

Mais si l'on cherchait le débit du tuyau, et si l'on répétait plusieurs fois l'expérience, on trouvait à chaque fois des volumes qui allaient un peu en décroissant, et ce n'était qu'après un long intervalle que les débits se réglaient et correspondaient aux charges manométriques[1].

La charge étant subitement diminuée, le réservoir ne pouvait plus de lui-même livrer à l'eau contenue dans le tuyau un volume égal à celui qui dans le premier moment tendait encore à s'écouler.

De là une sorte de succion que j'ai directement constatée.

C'était donc le liquide du tuyau qui, pendant tout le temps nécessaire pour arriver au nouvel état d'équilibre, semblait entraîner en partie l'eau du réservoir.

[1] Ce résultat semblerait impliquer que dans cette circonstance il y avait variation dans la distribution des vitesses des filets fluides : la vitesse à la paroi arrivant promptement à l'état normal, tandis que celle du centre décroissait moins rapidement.

Cette expérience montre pourquoi nous avions toujours le soin, en opérant, de commencer par les petites vitesses; en agissant autrement, on se serait exposé à avoir des volumes plus grands que ceux résultant des pentes observées.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS DES FORMULES.

On a vu que les relations existant entre les pentes et les vitesses de l'eau s'écoulant dans une conduite pouvaient être représentées par les équations

$$Ri = av + bv^2 \quad (1)^1$$

ou

$$Ri = b_1 v^2 \qquad (2)$$

La seconde équation s'appliquant plus exactement aux conduites déjà anciennes et recouvertes de dépôts.

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients a et b de la première équation, et le coefficient b_1 de la seconde, au moyen des expériences faites pour chaque tuyau.

Nous appliquerons, du reste, chacune des équations 1 et 2 à la représentation des phénomènes, car si dans les limites de la pratique la seconde était dans tous les cas suffisamment exacte, il serait beaucoup plus simple d'y avoir toujours recours.

Elle permet en effet de résoudre avec une grande simplicité toutes les questions relatives aux distributions d'eau.

A quelle méthode maintenant convient-il de recourir pour atténuer autant que possible les anomalies qui existeront entre les formules et les résultats de l'expérience?

De Prony, dans son *Recueil des cinq tables*, annonçait que dans

[1] Le premier membre de ces équations devrait être divisé par 2; ainsi les valeurs des coefficients a, b et b_1, résultant des calculs qui vont suivre, présenteront des valeurs doubles de celles que l'on aurait déduites de la formule de Prony $\frac{Ri}{2} = av + bv^2$ ou $\frac{Ri}{2} = b_1 v^2$: il faudra se rappeler cette observation en comparant la formule des tuyaux à celle des canaux découverts.

les publications futures qu'il se proposait de faire sur les eaux courantes, il appliquerait à la recherche des lois des phénomènes observés la belle méthode de la moindre somme des carrés des erreurs.

Je me suis inspiré de sa pensée, et c'est à ce procédé que j'ai cru devoir recourir.

Mais, au lieu de déterminer a et b ainsi que b_1 par la condition que la somme des carrés des erreurs fût la plus petite possible, je les ai assujettis à la condition de rendre minimum la somme des carrés des rapports existant entre les erreurs et les données expérimentales.

On comprend en effet qu'un écart de 4 à 5 centimètres sur une vitesse de 2 à 3 mètres est sans importance, mais qu'il devient très-considérable quand il s'applique à une vitesse de 15 à 20 centimètres.

On voit donc qu'il ne s'agit pas précisément de rendre d'une manière absolue la somme des carrés des erreurs la plus petite possible, mais qu'il faut chercher, ainsi que l'a fait remarquer M. Eytelwein, à calculer les constantes de manière à obtenir des minimum pour les rapports existant entre l'expression des écarts et les données de la question.

Seulement M. Eytelwein n'arrivait à ce résultat qu'en se servant de préférence, pour la formation des équations qui devaient lui servir à la détermination des coefficients, des expériences dans lesquelles la vitesse est très-faible.

Je n'ai pas besoin d'insister sur les inconvénients de cette manière d'agir.

Les expériences à pentes et vitesses faibles sont en général les moins exactes, et celles au contraire à pentes et vitesses considérables offrent le plus de garanties, et ce sont ces dernières qui sont sacrifiées aux premières par le procédé précité.

Il était, ce me semble, plus rationnel d'agir ainsi que je l'ai fait, c'est-à-dire de considérer le rapport de tous les écarts aux données expérimentales, au lieu d'avoir égard à ces écarts eux-mêmes.

J'ai du reste fait les calculs dans toutes les hypothèses.

Chacune des formules (1) et (2) donnera lieu à deux espèces de valeurs que l'on pourra comparer entre elles.

Déterminons maintenant les valeurs de a et b, ainsi que de b_1 dans les hypothèses précitées.

Et d'abord, prenons l'équation $Ri = av + bv^2$ que l'on ramènera à la forme linéaire en divisant les deux membres par v et faisant $\frac{i}{v} = z$;

d'où: $$Rz = a + bv$$

en y substituant à la place de v les valeurs déduites de l'expérience, on ne retrouvera pas exactement celles de z; l'expression générale de la différence sera:

$$\delta = \frac{a}{R} + \frac{b}{R} v - z$$

celle du rapport de la différence à la donnée expérimentale sera également:

$$\frac{\delta}{z} = \frac{a}{R}\frac{1}{z} + \frac{b}{R}\frac{v}{z} - 1$$

Or, le principe de la moindre somme du carré des erreurs consiste à rendre minimum, soit la somme de tous les δ^2 ou $\Sigma \delta^2$, soit celle de tous les $\left(\frac{\delta}{z}\right)^2$ ou $\Sigma \left(\frac{\delta}{z}\right)^2$.

Nous différencierons donc l'une et l'autre expression en considérant a et b comme variables indépendantes; nous égalerons à o le résultat de la différenciation, et nous aurons pour les valeurs de a et de b:

1° Dans l'hypothèse où l'on veut se borner à rendre la somme des carrés des erreurs la plus petite possible,

$$(1) \qquad a = R \frac{\dfrac{\Sigma i}{\Sigma v^2} - \dfrac{\Sigma \frac{i}{v}}{\Sigma v}}{\dfrac{\Sigma v}{\Sigma v^2} - \dfrac{n}{\Sigma v}}$$

$$(2) \qquad b = \mathrm{R}\,\frac{\dfrac{\Sigma\frac{i}{v}}{n} - \dfrac{\Sigma i}{\Sigma v}}{\dfrac{\Sigma v}{n} - \dfrac{\Sigma v^2}{\Sigma v}}$$

n est égal au nombre des expériences qui servent à la détermination des coefficients a et b.

2° Dans l'hypothèse où l'on veut obtenir un minimum pour les rapports des déviations aux données expérimentales, il viendra pour les valeurs de a et b :

$$(3) \qquad a = \mathrm{R}\,\frac{\Sigma\frac{v^2}{i}\cdot\Sigma\frac{v}{i} - \Sigma\frac{v}{i}\cdot\Sigma\frac{v^3}{i^2}}{\Sigma\frac{v^4}{i^2}\cdot\Sigma\frac{v^2}{i^2} - \Sigma\frac{v^3}{i^2}\cdot\Sigma\frac{v^3}{i^2}}$$

$$(4) \qquad b = \mathrm{R}\,\frac{\Sigma\frac{v}{i}\cdot\Sigma\frac{v^2}{i} - \Sigma\frac{v^2}{i}\cdot\Sigma\frac{v^3}{i^2}}{\Sigma\frac{v^2}{i^2}\cdot\Sigma\frac{v^3}{i^2} - \Sigma\frac{v^3}{i^2}\cdot\Sigma\frac{v^4}{i^2}}$$

Si maintenant nous passons, pour représenter les phénomènes observés, à une équation de la forme $\mathrm{R}i = b_1 v^2$, laquelle, ainsi que nous l'avons fait remarquer, convient plus particulièrement aux conduites déjà anciennes et recouvertes de dépôts, on aura, en la ramenant à la forme linéaire par le moyen ci-dessus indiqué,

$$\mathrm{R}z = b_1 v$$

Ainsi l'écart absolu sera donné par la relation,

$$\delta = \frac{b_1}{R} v - z$$

et l'écart proportionnel par

$$\frac{\delta}{z} = \frac{b_1}{R} \frac{v}{z} - 1$$

d'où, en opérant comme précédemment, et remplaçant z par sa valeur $\frac{i}{v}$,

$$(5) \qquad b_1 = R \frac{\Sigma i}{\Sigma v^2}$$

$$(6) \qquad b_1 = R \frac{\Sigma \frac{v^2}{i}}{\Sigma \frac{v^4}{i^2}}$$

La transformation des fonctions paraboliques

$$Ri = av + bv^2, \quad Ri = b_1 v^2,$$

en fonctions linéaires

$$Rz = a + bv, \quad Rz = b_1 v,$$

permet aussi de déterminer graphiquement, avec une grande précision, les constantes a, b et b_1 : aussi n'ai-je pas négligé de recourir à ce mode concurremment avec celui des moindres carrés : ce dernier procédé donne aveuglément la même valeur à des expériences qui peuvent inspirer des degrés inégaux de confiance; or, il est assez facile d'avoir égard à *la qualité* des expériences à l'aspect d'une construction graphique qui met en relief les anomalies : quoiqu'il en soit, ces méthodes diverses n'ont donné que d'insignifiantes différences, et les écarts qu'elles ont présentés

entre elles ont moins d'importance que les erreurs dues à l'imperfection des méthodes d'observation : le but à atteindre était que les faits expérimentaux fussent exactement représentés par les formules empiriques, et l'on reconnaîtra qu'au moyen de la substitution des coefficients auxquels je suis parvenu, cette condition a été remplie.

Si nous substituons maintenant dans les équations (1) et (2), (3) et (4), (5), (6) les données expérimentales, nous obtiendrons : les valeurs de a et de b d'une part, ou des coefficients de v et de v^2; d'autre part de b_1, ou des coefficients de v^2, dans les hypothèses précitées.

On pourra ainsi former les tableaux synoptiques suivants.

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.					
0,0122	1-2.	0,000,156,170	0,001,338,968	"	
	3-4.	0,000,142,255	0,001,361,42	"	
	5.	"	0,001,557,841	25,34	
	6.	"	0,001,673,692	24,44	
0,0266	1-2.	0,000,045,403	0,000,833,228	"	
	3-4.	0,000,048,486	0,000,840,034	"	
	5.	"	0,000,866,447	33,97	
	6.	"	0,000,918,256	33,00	
0,0395	1-2.	0,000,081,589	0,000,626,345	"	
	3-4.	0,000,037,832	0,000,697,532	"	
	5.	"	0,000,673,022	38,55	
	6.	"	0,000,784,505	35,70	
CONDUITES EN PLOMB.					
0,014	1-2.	0,000,129,815	0,000,589,18	"	
	3-4.	0,000,038,938	0,000,713,37	"	
	5.	"	0,000,731,056	36,99	
	6.	"	0,000,800,612	35,34	
0,027	1-2.	0,000,097,54	0,000,632	"	
	3-4.	0,000,053,950	0,000,701,359	"	
	5.	"	0,000,713,103	37,45	
	6.	"	0,000,821,254	34,90	
0,041	1-2.	0,000,145,14	0,000,546,296	"	
	3-4.	0,000,077,63	0,000,610,9	"	
	5.	"	0,000,634,906	39,69	
	6.	"	0,000,732,350	36,95	
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.					
0,0268	1-2.	0,000,231,348	0,000,566,963	"	
	3-4.	0,000,062,947	0,000,707,826	"	
	5.	"	0,000,700,866	37,77	
	6.	"	0,000,837,225	34,56	
0,0826	1-2.	0,000,175,433	0,000,377,845	"	
	3-4.	0,000,075,752	0,000,430,344	"	
	5.	"	0,000,442,192	47,56	
	6.	"	0,000,505,283	44,49	

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME. (Suite.)					
0,196.....	1-2.	0,000,255,27	0,000,284,249	"	
	3-4.	0,000,056,138	0,000,378,747	"	
	5.	"	0,000,363,297	52,47	
	6.	"	0,000,433,990	48,00	
0,285.....	1-2.	0,000,122,17	0,000,351,96	"	
	3-4.	0,000,114,189	0,000,356,100	"	
	5.	"	0,000,407,074	49,56	
	6.	"	0,000,439,529	47,70	
CONDUITE EN VERRE.					
0,04968.....	1-2.	0,000,128,322	0,000,550,994	"	
	3-4.	0,000,067,0	0,000,626,9	"	
	5.	"	0,000,655,268	39,07	
	6.	"	0,000,744,309	36,65	
CONDUITES EN FONTE.					
0,0359..... (Chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,001,574	0,001,881,995	"	
	3-4.	0,000,030,165	0,002,109,07		
	5.	"	0,001,880,706	23,06	
	6.	"	0,001,873,503	23,10	
0,0364..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,072,518	0,000,604,857	"	
	3-4.	0,000,045,972	0,000,642,634	"	
	5.	"	0,000,689,050	38,10	
	6.	"	0,000,750,605	36,50	
0,0795..... (Chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,049,548	0,001,352,693	"	
	3-4.	0,000,045,990	0,001,351,362	"	
	5.	"	0,001,406,042	26,67	
	6.	"	0,001,471,671	26,07	
0,0801..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,028,735	0,000,747,579	"	
	3-4.	0,000,028,194	0,000,740,836	"	
	5.	"	0,000,774,964	35,92	
	6.	"	0,000,792,017	35,53	
CONDUITES EN FONTE NEUVE.					
0,0819.....	1-2.	0,000,013,654	0,000,641,823	"	
	3-4.	0,000,044,881	0,000,634,45	"	
	5.	"	0,000,660,556	38,91	
	6.	"	0,000,694,765	37,94	

DIAMÈTRE des TUYAUX.	DÉSIGNATION DE LA FORMULE employée pour le calcul des coefficients.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	$\frac{1}{\sqrt{b_1}}$.	OBSERVATIONS.
		CONDUITES EN FONTE NEUVE. (Suite.)			
0,137.....	1-2.	0,000,037,458	0,000,505,379	"	
	3-4.	0,000,038,825	0,000,505,527	"	
	5.	"	0,000,518,828	43,90	
	6.	"	0,000,553,390	42,51	
0,188.....	1-2.	0,000,034,145	0,000,552,468	"	
	3-4.	0,000,012,276	0,000,572,07	"	
	5.	"	0,000,563,048	42,14	
	6.	"	0,000,584,393	41,37	
		CONDUITES EN FONTE.			
0,2432..... (Vieille chargée de dépôts.)	1-2.	0,000,002,864	0,001,156,730	"	
	3-4.	0,000,020,310	0,001,143,722	"	
	5.	"	0,001,158,572	29,38	
	6.	"	0,001,167,779	29,26	
0,2447..... (La même nettoyée.)	1-2.	0,000,011,161	0,000,683,699	"	
	3-4.	0,000,083,885	0,000,665,825	"	
	5.	"	0,000,688,012	38,12	
	6.	"	0,000,701,720	37,75	
0,297..... (Nettoyée.)	1-2.	0,000,004,959	0,000,601,89	"	
	3-4.	0,000,023,508	0,000,585,53	"	
	5.	"	0,000,604,121	40,68	
	6.	"	0,000,611,913	40,43	
0,50..... (Neuve.)	1-2.	0,000,081,4	0,000,402,9	"	
	3-4.	0,000,109,90	0,000,369,31	"	
	5.	"	0,000,493,171	45,03	
	6.	"	0,000,509,181	44,32	

Il convient maintenant, pour juger du degré d'approximation qui résulte des coefficients déterminés dans le tableau précédent, de rechercher, à l'aide des formules qu'ils permettent d'établir, les vitesses que donneraient les expressions par la substitution des pentes expérimentales.

Nous prendrons ensuite la différence entre les vitesses déduites de l'expérience et des formules; nous diviserons les résultats par

les vitesses expérimentales, et les quotients trouvés offriront les rapports des erreurs aux données expérimentales.

Nous obtiendrons ainsi les écarts exprimés en fractions décimales des données prises pour unité.

On arrivera aux erreurs moyennes en divisant pour chaque tuyau la somme des écarts donnés par chaque formule employée, par le nombre de ces écarts.

Les tableaux ci-dessous offrent les résultats des calculs :

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N° d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
					CONDUITES EN FER ÉTIRÉ.					
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	6	0,2300	0,223	0,225	0,255	0,246	+0,0304	+0,0217	−0,1087	−0,0696
	7	0,2870	0,289	0,292	0,318	0,307	−0,0070	−0,0174	−0,1080	−0,0697
	8	0,3430	0,344	0,346	0,369	0,356	−0,0029	−0,0087	−0,0758	−0,0379
0,0122....	9	0,3920	0,393	0,395	0,415	0,400	−0,0026	−0,0077	−0,0587	−0,0204
	10	0,4780	0,479	0,480	0,495	0,478	−0,0021	−0,0042	−0,0356	+0,0000
	11	0,5730	0,569	0,569	0,579	0,558	+0,0070	+0,0070	−0,0105	+0,0262
	12	0,8460	0,846	0,844	0,836	0,807	0,0000	+0,0024	+0,0118	+0,0461
	13	1,1950	1,195	1,191	1,161	1,120	0,0000	+0,0033	+0,0284	+0,0628
	15	0,1310	0,131	0,129	0,153	0,148	0,0000	+0,0153	−0,1679	−0,1298
	16	0,2480	0,253	0,250	0,273	0,266	−0,0202	−0,0081	−0,1008	−0,0726
	17	0,3680	0,376	0,372	0,395	0,383	−0,0217	−0,0109	−0,0734	−0,0408
	18	0,5220	0,530	0,526	0,545	0,530	−0,0153	−0,0077	−0,0441	−0,0141
	19	0,6670	0,680	0,675	0,693	0,673	−0,0195	−0,0120	−0,0390	−0,0089
0,0266....	20	0,7960	0,806	0,801	0,817	0,794	−0,0126	−0,0063	−0,0264	+0,0025
	21	0,9610	0,977	0,972	0,985	0,956	−0,0167	−0,0114	−0,0250	+0,0052
	22	1,2350	1,238	1,231	1,240	1,205	−0,0024	+0,0032	−0,0040	+0,0243
	23	1,2810	1,272	1,265	1,274	1,237	+0,0070	+0,0125	+0,0055	+0,0351
	24	1,6820	1,660	1,651	1,654	1,607	+0,0131	+0,0184	+0,0166	+0,0446
	25	1,9980	1,994	1,985	1,982	1,930	+0,0020	+0,0065	+0,0080	+0,0340
	26	2,1840	2,196	2,175	2,180	2,117	−0,0055	+0,0041	+0,0018	+0,0307
	27	0,0626	0,0406	0,0563	0,0803	0,0744	+0,3514	+0,1006	−0,2827	−0,1882
0,0395....	28	0,1112	0,1047	0,1239	0,1513	0,1401	+0,0585	−0,1142	−0,3607	−0,2598
	29	0,1848	0,1831	0,2015	0,2311	0,2141	+0,0092	−0,0904	−0,2505	−0,1585
	30	0,2616	0,2668	0,2825	0,3140	0,2908	−0,0198	−0,0798	−0,2003	−0,1116

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N° d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITES EN FER ÉTIRÉ. (Suite.)										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	31	0,3817	0,3923	0,4027	0,4367	0,4045	—0,0278	—0,0550	—0,1441	—0,0597
	32	0,5594	0,5750	0,5769	0,6143	0,5690	—0,0279	—0,0312	—0,0981	—0,0171
	33	0,7878	0,8052	0,7958	0,8373	0,7755	—0,0221	—0,0102	—0,0628	+0,0156
0,0395....	34	0,9149	0,9294	0,9137	0,9573	0,8867	—0,0158	+0,0013	—0,0463	+0,0308
	35	1,0951	1,1076	1,0828	1,1296	1,0462	—0,0114	+0,0112	—0,0315	+0,0447
	36	1,9205	1,9065	1,8404	1,9010	1,7608	+0,0073	+0,0417	+0,0101	+0,0832
	37	2,3055	2,2884	2,2024	2,2696	2,1021	+0,0074	+0,0447	+0,0155	+0,0882
	38	2,5971	2,5938	2,4918	2,5643	2,3751	+0,0013	+0,0405	+0,0126	+0,0855
CONDUITES EN PLOMB.										
	40	0,105	0,118	0,156	0,179	0,171	+0,2848	+0,0545	—0,0848	—0,0363
	41	0,246	0,228	0,265	0,287	0,275	+0,0732	—0,0772	—0,1667	—0,1179
	42	0,446	0,430	0,471	0,492	0,470	+0,0359	—0,0561	—0,1031	—0,0529
0,014.....	43	0,732	0,751	0,750	0,767	0,733	—0,0260	—0,0240	—0,0478	—0,0013
	44	1,048	1,061	1,033	1,047	1,000	—0,0124	+0,0143	+0,0009	+0,0458
	45	1,290	1,279	1,232	1,244	1,188	—0,0085	+0,0450	+0,0355	+0,0798
	46	0,065	0,047	0,061	0,091	0,085	+0,2769	+0,0615	—0,4000	—0,3077
	47	0,188	0,188	0,205	0,238	0,222	0,0000	—0,0904	—0,2660	—0,1808
	48	0,322	0,347	0,359	0,393	0,366	—0,0776	—0,1149	—0,2205	—0,1366
0,027.	49	0,597	0,623	0,623	0,655	0,611	—0,0436	—0,0436	—0,0972	—0,0235
	50	1,021	1,003	0,985	1,014	0,945	+0,0176	+0,0353	+0,0068	+0,0744
	51	1,438	1,423	1,384	1,410	1,314	+0,0104	+0,0375	+0,0194	+0,0862
	52	1,679	1,692	1,640	1,664	1,551	—0,0077	+0,0232	+0,0089	+0,0762
	53	0,120	0,087	0,114	0,163	0,152	+0,2750	+0,0500	—0,3583	—0,2667
	54	0,276	0,259	0,291	0,342	0,318	+0,0616	—0,0543	—0,2391	—0,1521
	55	0,488	0,424	0,451	0,501	0,467	+0,1311	+0,0758	—0,0266	+0,0430
0,041.....	56	0,792	0,808	0,819	0,864	0,804	—0,0202	—0,0341	—0,1000	—0,0151
	57	1,316	1,323	1,309	1,345	1,252	—0,0053	+0,0053	—0,0220	+0,0486
	58	1,925	1,910	1,865	1,891	1,761	+0,0078	+0,0312	+0,0176	+0,0851
	59	2,305	2,312	2,246	2,264	2,108	—0,0030	+0,0256	+0,0177	+0,0854
CONDUITES EN TÔLE ET BITUME.										
	60	0,030	0,012	0,034	0,065	0,059	+0,6000	—0,1333	—1,1666	—0,9667
	61	0,092	0,036	0,077	0,113	0,104	+0,6087	+0,0136	—0,2283	—0,1304
0,0268....	62	0,155	0,104	0,167	0,207	0,190	+0,3291	—0,0774	—0,3355	—0,2258
	63	0,271	0,227	0,298	0,341	0,312	+0,1624	—0,0996	—0,2583	—0,1512

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N^os^ d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
			CONDUITES EN TÔLE ET BITUME. (Suite.)							
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	64	0,384	0,352	0,421	0,465	0,426	+0,0833	−0,0963	−0,2110	−0,1094
	65	0,567	0,548	0,605	0,651	0,595	+0,0335	−0,0670	−0,1481	−0,0494
	66	0,678	0,667	0,715	0,762	0,697	+0,0162	−0,0546	−0,1239	−0,0280
0,0268....	67	0,853	0,852	0,884	0,932	0,852	+0,0011	−0,0363	−0,0926	+0,0012
	68	1,467	1,482	1,454	1,505	1,377	−0,0102	+0,0088	−0,0259	+0,0613
	69	1,859	1,868	1,801	1,854	1,697	−0,0048	+0,0312	+0,0027	+0,0872
	70	2,203	2,207	2,106	2,161	1,977	−0,0018	+0,0440	+0,0191	+0,1025
	71	2,507	2,498	2,367	2,423	2,217	+0,0035	+0,0558	+0,0335	+0,1156
	72	0,100	0,057	0,096	0,159	0,149	+0,430	+0,040	−0,590	−0,4900
	73	0,176	0,123	0,179	0,248	0,232	+0,301	−0,0170	−0,409	−0,3180
	74	0,357	0,293	0,362	0,435	0,407	+0,179	−0,0140	−0,218	−0,1400
	75	0,665	0,629	0,694	0,766	0,717	+0,0391	−0,0436	−0,152	−0,0782
	76	0,950	0,946	0,998	1,068	0,999	+0,0042	−0,0505	−0,124	−0,0516
0,0826....	77	1,354	1,365	1,395	1,461	1,367	−0,0081	−0,0303	−0,0789	−0,0096
	78	1,613	1,625	1,641	1,704	1,594	−0,0074	−0,0174	−0,0564	+0,0111
	79	1,874	1,890	1,890	1,950	1,824	−0,0085	−0,0085	−0,0405	+0,0266
	80	2,572	2,577	2,537	2,588	2,421	−0,0019	+0,0136	−0,0062	+0,0587
	81	3,211	3,196	3,111	3,155	2,951	+0,0046	+0,0311	+0,0174	+0,0809
	82	3,668	3,670	3,563	3,600	3,368	−0,0005	+0,0286	+0,0185	+0,0817
	83	3,897	3,904	3,783	3,818	3,571	−0,0018	+0,0292	+0,0203	+0,0837
	84	0,180	0,071	0,165	0,232	0,213	+0,606	+0,0833	−0,289	−0,1833
	85	0,278	0,157	0,286	0,360	0,329	+0,435	−0,0288	−0,295	−0,1835
	86	0,466	0,355	0,509	0,591	0,540	+0,196	−0,0935	−0,268	−0,1588
	87	0,780	0,708	0,853	0,943	0,863	+0,0923	−0,0936	−0,209	−0,1064
	88	1,076	1,035	1,153	1,251	1,144	+0,0381	−0,0530	−0,163	−0,0632
0,196.....	89	1,657	1,626	1,683	1,792	1,640	+0,0187	−0,0157	−0,0814	+0,0102
	90	1,679	1,634	1,690	1,799	1,646	+0,0268	−0,0065	−0,0714	+0,0196
	91	2,259	2,279	2,259	2,380	2,178	−0,0088	0,0000	−0,0535	+0,0359
	92	2,743	2,782	2,700	2,831	2,590	−0,0142	+0,0157	−0,0321	+0,0558
	93	3,052	3,122	2,997	3,134	2,867	−0,0229	+0,0180	−0,0269	+0,0606
	94	6,010	6,040	5,536	5,726	5,239	−0,0049	+0,0789	+0,0473	+0,1282
	95	0,395	0,386	0,393	0,495	0,476	+0,0228	+0,0050	−0,253	−0,2050
	96	0,848	0,857	0,863	0,945	0,909	−0,0106	−0,0177	−0,114	−0,0719
	97	1,179	1,162	1,166	1,231	1,185	+0,0144	+0,0110	−0,0441	−0,0051
0,285.....	98	1,494	1,501	1,503	1,549	1,490	−0,0046	−0,0060	−0,0368	+0,0027
	99	2,034	2,028	2,028	2,041	1,964	+0,0029	+0,0029	−0,0034	+0,0344
	100	2,698	2,708	2,704	2,675	2,574	−0,0037	−0,0022	+0,0085	+0,0459
	101	3,207	3,202	3,188	3,135	3,017	+0,0015	+0,0059	+0,0224	+0,0592

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N° d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITE EN VERRE.										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	102	0,153	0,122	0,149	0,191	0,179	+0,203	+0,0261	−0,248	−0,1699
	103	0,312	0,295	0,320	0,362	0,339	+0,0673	−0,0256	−0,160	−0,0865
0,04968...	104	0,485	0,485	0,502	0,541	0,507	0,0000	−0,0351	−0,115	−0,0454
	105	0,893	0,912	0,906	0,937	0,880	−0,0213	−0,0146	−0,0493	+0,0145
	106	1,478	1,500	1,459	1,478	1,387	−0,0149	+0,0129	0,0000	+0,0616
	107	2,108	2,133	2,053	2,060	1,933	−0,0119	+0,0261	+0,0227	+0,0830
CONDUITES EN FONTE.										
	108	0,051	0,048	0,054	"	"	+0,0588	−0,0588	"	"
	109	0,081	0,082	0,085	0,082	0,082	−0,0123	−0,0493	−0,0123	−0,0123
0,0359....	110	0,130	0,132	0,132	0,132	0,132	−0,0154	−0,0154	−0,0154	−0,0154
(Chargée	111	0,253	0,252	0,246	0,253	0,253	+0,0039	+0,0277	0,0000	0,0000
de dépôts.)	112	0,381	0,381	0,367	0,382	0,382	0,0000	+0,0367	−0,0026	−0,0026
	113	0,551	0,555	0,532	0,556	0,557	−0,0072	+0,0345	−0,0097	−0,0109
	114	0,633	0,629	0,602	0,630	0,631	+0,0063	+0,0490	+0,0047	+0,0032
	115	0,113	0,098	0,110	0,137	0,131	+0,1330	+0,0265	−0,212	−0,1593
	116	0,188	0,180	0,193	0,218	0,209	+0,0426	−0,0266	−0,160	−0,1117
0,0364....	117	0,387	0,387	0,395	0,415	0,397	0,0000	−0,0207	−0,0724	−0,0258
(La même	118	0,601	0,601	0,604	0,617	0,591	0,0000	−0,0049	−0,0262	+0,0166
nettoyée).	119	0,892	0,895	0,889	0,893	0,855	−0,0034	+0,0033	−0,0010	+0,0415
	120	1,034	1,031	1,025	1,024	0,981	0,0000	+0,0087	+0,0096	+0,0512
	121	1,126	1,124	1,112	1,108	1,062	+0,0018	+0,0127	+0,0164	+0,0568
	122	0,123	0,121	0,122	0,136	0,133	+0,016	+0,008	−0,105	−0,081
0,0795....	123	0,251	0,253	0,255	0,266	0,260	−0,008	−0,016	−0,059	−0,036
(Chargée	124	0,446	0,444	0,445	0,453	0,443	+0,004	+0,002	−0,016	+0,007
de dépôts.)	125	0,678	0,670	0,671	0,675	0,659	+0,012	+0,010	+0,004	+0,028
	126	0,931	0,936	0,938	0,936	0,915	−0,005	−0,007	−0,005	+0,017
	127	1,142	1,136	1,138	1,132	1,107	+0,005	+0,003	+0,009	+0,031
	128	0,193	0,200	0,195	0,208	0,206	−0,036	−0,010	−0,078	−0,072
	129	0,385	0,378	0,380	0,390	0,386	+0,018	+0,013	−0,013	−0,003
0,0801....	129 *bis.*	0,614	0,603	0,606	0,611	0,605	+0,018	+0,013	+0,005	+0,015
(La même	130	0,624	0,609	0,612	0,617	0,610	+0,024	+0,019	+0,011	+0,022
nettoyée.)	131	0,864	0,894	0,899	0,897	0,887	−0,035	−0,040	−0,038	−0,027
	132	1,248	1,236	1,241	1,232	1,219	+0,009	+0,005	+0,013	+0,023
	133	1,526	1,529	1,536	1,520	1,504	−0,002	−0,006	+0,004	+0,014

DIAMÈTRE des TUYAUX.	N°s d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
			CONDUITES EN FONTE NEUVE.							
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
	134	0,088	0,103	0,084	0,111	0,109	—0,182	+0,045	—0,261	—0,2380
	135	0,171	0,220	0,199	0,227	0,221	—0,286	—0,164	—0,327	—0,2920
	136	0,358	0,374	0,353	0,379	0,370	—0,045	+0,014	—0,059	—0,0335
	137	0,561	0,572	0,551	0,574	0,559	—0,019	+0,018	—0,023	+0,0035
	138	0,791	0,796	0,777	0,795	0,775	—0,006	+0,017	—0,005	+0,0202
	139	1,185	1,189	1,172	1,182	1,153	—0,003	+0,011	+0,003	+0,0270
0,0819....	140	1,418	1,420	1,404	1,410	1,375	—0,005	+0,006	+0,006	+0,0303
	141	1,571	1,595	1,580	1,583	1,544	—0,015	—0,006	—0,008	+0,0172
	142	2,453	2,458	2,447	2,433	2,372	—0,002	+0,002	+0,008	+0,0330
	143	2,487	2,503	2,493	2,478	2,416	—0,006	—0,002	+0,004	+0,0285
	144	2,720	2,754	2,745	2,725	2,657	—0,012	—0,009	—0,002	+0,0231
	145	3,238	3,264	3,258	3,228	3,147	—0,008	—0,006	+0,003	+0,0281
	146	3,265	3,290	3,284	3,253	3,172	—0,008	—0,006	+0,004	+0,0284
	147	0,149	0,147	0,146	0,178	0,172	+0,013	+0,020	—0,194	—0,154
	148	0,298	0,308	0,307	0,339	0,328	—0,033	—0,030	—0,137	—0,1000
	149	0,488	0,496	0,495	0,525	0,509	—0,016	—0,014	—0,076	—0,0430
	150	0,763	0,766	0,765	0,792	0,767	—0,004	—0,003	—0,033	—0,0052
0,137.....	151	1,279	1,270	1,269	1,290	1,249	+0,007	+0,008	—0,009	+0,0234
	152	1,714	1,710	1,708	1,724	1,669	+0,008	+0,003	—0,006	+0,0262
	153	2,098	2,084	2,082	2,093	2,027	+0,007	+0,008	+0,002	+0,0338
	154	2,281	2,277	2,275	2,284	2,211	+0,002	+0,003	—0,001	+0,0307
	155	3,640	3,614	3,612	3,603	3,489	+0,007	+0,007	+0,010	+0,0415
	156	4,693	4,729	4,727	4,704	4,554	—0,008	—0,007	—0,002	+0,0296
	157	0,205	0,186	0,200	0,212	0,208	+0,093	+0,024	—0,034	—0,015
	158	0,497	0,516	0,526	0,541	0,531	—0,038	—0,058	—0,090	—0,068
	159	0,758	0,761	0,767	0,784	0,769	—0,004	—0,012	—0,034	—0,014
	160	1,128	1,140	1,140	1,159	1,138	—0,010	—0,010	—0,027	—0,009
0,188.....	161	1,488	1,479	1,473	1,496	1,468	+0,006	+0,010	—0,005	+0,013
	162	1,933	1,926	1,912	1,938	1,902	+0,004	+0,011	—0,002	+0,016
	163	2,506	2,515	2,491	2,522	2,476	—0,003	+0,006	—0,006	+0,012
	164	4,323	4,292	4,237	4,282	4,203	+0,007	+0,020	+0,009	+0,028
	165	4,928	4,952	4,886	4,936	4,845	—0,005	+0,008	—0,002	+0,017
			CONDUITES EN FONTE.							
0,2432....	166	0,307	0,313	0,307	0,314	0,313	—0,019	0,000	—0,023	—0,019
(Chargés	167	0,452	0,460	0,455	0,460	0,459	—0,018	—0,007	—0,018	—0,015
de dépôts.)	168	0,707	0,704	0,700	0,705	0,702	+0,004	+0,010	+0,003	+0,007

DIAMÈTRE des TUYAUX.	Nos d'ordre.	VITESSES d'après l'expérience.	VITESSES D'APRÈS LES FORMULES.				RAPPORTS ENTRE LES DIFFÉRENCES DES VITESSES déduites de l'expérience et de la formule, et les vitesses expérimentales.			
			1-2.	3-4.	5.	6.	1-2.	3-4.	5.	6.
(1)	2	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
CONDUITES EN FONTE. (Suite.)										
		mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.				
0,2432.... (Chargée de dépôts.)	169	1,106	1,098	1,097	1,099	1,094	+0,007	+0,008	+0,006	+0,010
	170	1,547	1,550	1,552	1,550	1,544	−0,002	−0,003	−0,002	+0,002
	171	1,833	1,833	1,836	1,833	1,825	0,000	−0,002	0,000	+0,004
	172	2,073	2,076	2,080	2,076	2,068	−0,001	−0,003	−0,001	+0,002
	173	3,833	3,833	3,847	3,831	3,816	0,000	−0,004	+0,001	+0,004
0,2447... (La même nettoyée.)	174	0,278	0,297	0,283	0,304	0,301	−0,068	−0,018	−0,093	−0,083
	175	0,537	0,535	0,524	0,542	0,536	+0,004	+0,024	−0,009	+0,002
	176	0,949	0,936	0,930	0,941	0,932	+0,0137	+0,0200	+0,0084	+0,0178
	177	1,420	1,430	1,430	1,433	1,419	−0,0070	−0,0070	−0,0091	+0,0007
	178	1,904	1,900	1,907	1,902	1,884	+0,0021	−0,0015	+0,0010	+0,0105
	179	2,206	2,204	2,215	2,205	2,184	+0,0009	−0,0040	+0,0004	+0,0100
	180	2,572	2,576	2,591	2,575	2,550	−0,0015	−0,0073	−0,0012	+0,0086
	181	4,497	4,497	4,539	4,491	4,447	0,0000	−0,0093	+0,0013	+0,0111
0,297.... (Nettoyée.)	182	0,244	0,259	0,247	0,262	0,261	−0,0615	−0,0123	−0,0738	−0,0697
	183	0,538	0,538	0,530	0,541	0,537	0,0000	+0,0149	−0,0055	+0,0018
	184	0,823	0,811	0,806	0,813	0,808	+0,0146	+0,0207	+0,0122	+0,0182
	185	1,155	1,147	1,147	1,149	1,142	+0,0069	+0,0069	+0,0051	+0,0112
	186	1,652	1,647	1,654	1,648	1,638	+0,0030	−0,0012	+0,0024	+0,0084
	187	2,390	2,381	2,398	2,381	2,365	+0,0037	−0,0033	+0,0037	+0,0105
	188	2,799	2,808	2,831	2,807	2,789	−0,0032	−0,0114	−0,0028	+0,0035
	189	3,160	3,165	3,193	3,163	3,143	−0,0015	−0,0104	−0,0009	+0,0054
0,50... (Neuve.)	190-91	0,43475	0,4370	0,4228	0,4776	0,4701	−0,0051	+0,0274	−0,0984	−0,0812
	192	0,4752	0,5175	0,5057	0,5515	0,5428	−0,0890	−0,0641	−0,1605	−0,1423
	193	0,7932	0,7678	0,7647	0,7799	0,7676	+0,0320	+0,0359	+0,0167	+0,0323
	194	0,7951	0,7855	0,7830	0,7960	0,7834	+0,0120	+0,0152	−0,0011	+0,0147
	195	1,0412	1,0450	1,0528	1,0318	1,0154	−0,0036	−0,0111	+0,0090	+0,0248
	196	1,1135	1,0979	1,1078	1,0798	1,0627	+0,0140	+0,0051	+0,0303	+0,0456
	198	1,1278	1,1486	1,1606	1,1257	1,1079	−0,0184	−0,0290	+0,0017	+0,0176

Si nous jetons les yeux sur les colonnes (8), (9), (10) et (11) du tableau précédent, lesquelles colonnes donnent les rapports des différences existant entre les vitesses expérimentales et celles déduites des formules, et ces mêmes vitesses expérimentales, et que nous formions, par tuyau, les moyennes de ces rapports

tous pris avec le signe +, nous obtiendrons le tableau synoptique suivant :

DIAMÈTRE des TUYAUX.	NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	MOYENNES DES RAPPORTS ENTRE LES ÉCARTS et les vitesses expérimentales des formules.				OBSERVATIONS.
			1-2.	3-4.	5.	6.	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
mèt.							
0,0122	Fer étiré.....	1	0,0065	0,0090	0,0547	0,0416	Je n'ai pas compris dans ces moyennes les vitesses au-dessous de 0m10, parce que, comme je l'ai déjà dit, et comme on le verra plus tard, une loi nouvelle lie aux pentes les vitesses inférieures à 0m,10.
0,0266	*Idem*.....	2	0,0113	0,0097	0,0427	0,0369	
0,0395	*Idem*.....	3	0,0190	0,0473	0,1120	0,0867	
0,014	Plomb.....	4	0,0734	0,0453	0,0731	0,0557	
0,027	*Idem*.....	5	0,0262	0,0575	0,1031	0,0963	
0,041	*Idem*.....	6	0,0382	0,0395	0,1116	0,0994	
0,0268	Tôle et bitume.....	7	0,0646	0,0571	0,1251	0,0932	
0,0826	*Idem*.....	8	0,0506	0,0258	0,1443	0,1192	
0,196	*Idem*.....	9	0,0858	0,0443	0,1397	0,0914	
0,285	*Idem*.....	10	0,0086	0,0072	0,0689	0,0606	
0,04968	Verre.....	11	0,0530	0,0234	0,0992	0,0768	
0,0359	Fonte (chargée de dépôts).	12	0,0066	0,0326	0,0065	0,0064	
0,0364	Fonte (nettoyée).....	13	0,0258	0,0148	0,0711	0,0661	
0,0795	Fonte (chargée de dépôts).	14	0,0080	0,0077	0,0330	0,0330	
0,0801	Fonte (nettoyée).....	15	0,0200	0,0150	0,0230	0,0250	
0,0819	Fonte (neuve).....	16	0,0350	0,0220	0,0380	0,0470	
0,137	*Idem*.....	17	0,0105	0,0100	0,0470	0,0487	
0,188	*Idem*.....	18	0,0180	0,0170	0,0232	0,0210	
0,2432	Fonte (chargée de dépôts).	19	0,0060	0,0040	0,0067	0,0080	
0,2447	Fonte (nettoyée).....	20	0,0121	0,0114	0,0154	0,0180	
0,297	*Idem*.....	21	0,0118	0,0101	0,0133	0,0161	
0,50	Fonte (neuve).....	22	0,0249	0,0268	0,0454	0,0512	

L'examen des colonnes (4), (5), (6), (7) montre, comme on devait du reste s'y attendre, que l'équation où les coefficients de v et de v^2 ont été calculés au moyen des formules (3) et (4) donne en général les moindres valeurs pour les rapports moyens; il montre, en même temps, que les erreurs moyennes sont très-faibles, quel que soit le procédé de calcul auquel on a eu recours, et notamment que l'équation où v entre seulement à la seconde puissance, et dont le coefficient unique a été calculé par la formule (6), offre des résultats presque concordants avec ceux fournis par les

équations (3) et (4). Cette coïncidence existe surtout pour les tuyaux recouverts d'une couche de dépôts; d'où l'on peut déduire, comme conséquence au reste déjà présentée, que, dans la pratique où les tuyaux se recouvrent très-promptement de limon, de tubercules ou de dépôts calcaires, il est préférable, à raison de la facilité qui en résulte pour les calculs, de se servir de la formule monôme.

Nous avons maintenant à préciser l'influence des surfaces dans les tuyaux de même diamètre, et des rayons des tuyaux dans les conduites où les parois présentent à peu près un égal degré de poli.

Nous nous servirons pour cela des coefficients déduits de la formule (6), dont l'exactitude vient d'être constatée.

TABLEAU INDIQUANT L'INFLUENCE DU DEGRÉ DE POLI DES SURFACES.

	TÔLE ET BITUME. D = 0,196	FONTE NEUVE. D = 0.188	FONTE RECOUVERTE DE DÉPÔTS. D = 0,2432	OBSERVATIONS.
Coefficient de la résistance..	0,000,433,990	0,000,584,393	0,001,167,779	

On voit que dans les tuyaux enduits de bitume, en fonte neuve, en fonte recouverte de dépôts, le coefficient de la résistance varie à peu près comme les chiffres 1, $1\frac{1}{2}$, 3; la fonte recouverte de dépôts présente donc à l'écoulement une résistance à peu près double de celle de la fonte neuve.

J'aurais pu multiplier les exemples, mais il est facile au lecteur de recourir aux tableaux généraux.

TABLEAU INDIQUANT L'INFLUENCE DES RAYONS DES TUYAUX DE MÊME DEGRÉ DE POLI SUR LE COEFFICIENT DE LA RÉSISTANCE.

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE.	COEFFICIENT DE LA RÉSISTANCE.	OBSERVATIONS.
		mèt.		
Fer étiré.....	1	0,0122	0,001,673	
	2	0,0266	0,000,918	
	3	0,0395	0,000,785	
Fonte.....	16	0,0819	0,000,695	
	17	0,137	0,000,553	
	18	0,188	0,000,584	
	21	0,297	0,000,612	
	22	0,50	0,000,509	

On remarque dans cette série de coefficients, que celui qui correspond au tuyau de $0^m,137$ est au-dessous de la valeur que lui assigneraient ses voisins, tandis que celui du tuyau de $0^m,297$ est supérieur à cette valeur. Mais j'avais constaté que le tuyau de $0^m,137$ sortait de la fonderie, et présentait un remarquable degré de poli, tandis que le tuyau de $0^m,297$ avait déjà servi, et n'était qu'un tuyau nettoyé avec soin : sa surface était donc moins nette que celle des autres, et, du reste, il suffit de la cause la plus légère pour faire varier la résistance à l'écoulement.

Si l'on fait une expérience avec un tuyau non oxydé, et qu'on la renouvelle deux ou trois jours plus tard, lorsque des traces d'oxyde enduiront la paroi, le coefficient de résistance croîtra notablement, puis reviendra le même à la suite d'écoulements rapides, pendant lesquels l'eau rougie témoigne qu'elle a entraîné les causes de l'accroissement de la résistance.

C'est pour cela que nous avons toujours cherché à opérer sans discontinuité pour le même tuyau, ou à le placer, au moyen de lavages, dans les mêmes circonstances.

Dans le tuyau de $0^m,50$, qui débitait jusqu'à 219 litres par se-

conde, il était difficile de prendre toutes ces précautions; les bassins se vidaient si promptement que l'on devait toujours se préoccuper des nécessités du service de la fourniture d'eau de Paris, et l'on a été obligé, par conséquent, de recueillir et de coordonner des expériences faites à des époques différentes.

Ainsi, toutes celles faites le 29 juillet concordent bien entre elles; elles sont au nombre de trois et comprennent les pentes, par

$$100 \text{ mètres, de} \ldots \begin{cases} 0^{m},045, \\ 0\ ,120, \\ 0\ ,250. \end{cases}$$

Le 5 août je les ai recommencées, afin de multiplier les données expérimentales, la pente de $0^{m},045$ m'a donné un résultat plus faible que le précédent; une autre pente de $0^{m},06$ n'a pas porté la vitesse au point qu'elle aurait dû atteindre d'après les résultats du 29 juillet; enfin, dans les vitesses supérieures, on est retombé à peu près sur les mêmes résultats, parce que le nettoiement des parois avait été la conséquence de ces vitesses.

J'ai placé toutes ces expériences sur les tableaux, et j'ai calculé les coefficients du tuyau de $0^{m},50$ en n'en omettant aucune; cela ne pouvait avoir aucun inconvénient, surtout pour la recherche du coefficient de la résistance dans l'équation où l'on ne conserve que la seconde puissance de la vitesse.

Mais, dans l'équation en v et v^2, l'introduction des premières expériences du 2 août a agrandi beaucoup trop le coefficient de v en aplatissant la courbe.

En dernier résultat, cela n'altère pas sensiblement, comme on le verra, la valeur définitive de la vitesse, parce que, si le coefficient de la première puissance est augmenté, celui de la seconde est diminué.

Mais il deviendra indispensable d'avoir égard aux observations qui précèdent, lorsqu'il s'agira de déterminer la loi qui lie entre eux les coefficients de v et de v^2 dans les tuyaux de différents rayons.

On vient de voir quelle était l'influence de l'état de la surface sur la résistance, et que le coefficient relatif à la fonte, par exemple, doublait dans les tuyaux sur la surface desquels une couche de dépôt s'était formée.

Il faudra donc, lorsqu'il s'agira du calcul d'une distribution d'eau, partir de ce dernier coefficient; on comprend en outre que ce coefficient devra être maintenu, soit qu'on emploie des tuyaux en tôle et bitume, ou qu'on ait recours à des tuyaux en plomb, puisque c'est en définitive sur la paroi enduite de dépôts que les eaux finiront par couler.

Je passe maintenant à la recherche de la valeur des coefficients de v et de v^2, eu égard aux diamètres des conduites, et je commence par l'équation où v entre seulement à la seconde puissance.

Après avoir cherché la loi la plus simple, et celle qui semblait le mieux répondre aux données du précédent tableau, je suis arrivé à l'expression

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{R}$$

b_1 représentant le coefficient à substituer dans la formule pour un tuyau de rayon R, et α et β deux nombres constants : le terme $\frac{\beta}{R}$ diminue quand le rayon augmente; à partir du moment où il peut être supprimé sans inconvénient, le coefficient b_1 de la formule devient constant et égal à α.

Déterminons maintenant les coefficients α et β après avoir ramené l'équation ci-dessus à la forme linéaire en multipliant ses deux membres par R et faisant $b_1 R = z$: nous aurons donc à opérer sur l'équation

$$z = \alpha R + \beta$$

d'où

$$\frac{\delta}{z} = \alpha \frac{R}{z} + \frac{\beta}{z} - 1$$

et nous obtiendrons pour les valeurs de α et β:

$$\alpha = \frac{\Sigma\frac{1}{Ry} \times \Sigma\frac{1}{Ry^3} - \Sigma\frac{1}{y} \times \Sigma\frac{1}{R^2y^2}}{\Sigma\left(\frac{1}{Ry^2}\right)^2 - \Sigma\frac{1}{y^2} \times \Sigma\frac{1}{R^2y^2}}$$

$$\beta = \frac{\Sigma\frac{1}{Ry^2} \times \Sigma\frac{1}{y} - \Sigma\frac{1}{y^2} \times \Sigma\frac{1}{Ry}}{\Sigma\left(\frac{1}{Ry^2}\right)^2 - \Sigma\frac{1}{y^2} \times \Sigma\frac{1}{R^2y^2}}$$

R indiquant le rayon du tuyau, et y les résistances b_1 variables avec le rayon dans les conduites présentant à peu près le même degré de poli.

Substituant donc à la place de R et de y les huit données expérimentales du précédent tableau, on aura pour les valeurs de α et β,

$$\alpha = 0{,}000{,}502$$

$$\beta = 0{,}000{,}00636$$

d'où, en augmentant un peu ces valeurs de α et de β,

$$b_1 = 0{,}00051 + \frac{0{,}000{,}0065}{R}$$

b_1 représentant la valeur à substituer dans la formule

$$Ri = b_1 v^2$$

Le tableau suivant donne les valeurs de b_1 correspondant à celles déduites de l'expérience et de la formule pour les huit rayons :

$0^m{,}0061$	
0	,0133
0	,01975
0	,04095
0	,0685
0	,094
0	,1485
0	,25

DIAMÈTRES.	VALEURS DE b_1 DÉDUITES		OBSERVATIONS.
	DE L'EXPÉRIENCE.	DE L'INTERPOLATION.	
mèt.			
0,0122	0,001,673	0,001,568	Voir l'observation placée dans la colonne (6) du tableau suivant, en ce qui concerne l'expression qui donne les différentes valeurs de b_1.
0,0266	0,000,918	0,000,993	
0,0395	0,000,785	0,000,835	
0,0819	0,000,695	0,000,665	
0,137	0,000,553	0,000,601	
0,188	0,000,584	0,000,576	
0,297	0,000,612	0,000,551	
0,50	0,000,509	0,000,532	

Les deux écarts relatifs aux tuyaux de $0^m,137$ et de $0^m,297$ dépassent assez notablement les autres, ainsi que cela devait être, d'après les observations que *j'ai eu l'occasion* de faire sur ces tuyaux.

Le tableau suivant donne toutes les valeurs de b_1, $\frac{b_1}{R}$, $\sqrt{\frac{R}{b_1}}$ pour les diamètres depuis $0^m,01$ jusqu'à 1 mètre.

DIAMÈTRES. (1)	RAYONS. (2)	b_1. (3)	$\frac{b_1}{R}$. (4)	$\sqrt{\frac{R}{b_1}}$ (5)	OBSERVATIONS. (6)
mèt.	mèt.				
0,01	0,005	0,001,801	0,360,20	1,666	NOTA. Nous venons de poser pour calculer les valeurs de b_1, la formule $b_1 = 0,00051 + \frac{0,0000065}{R}$ où il n'entre que deux chiffres significatifs; mais, en fait, tous les calculs ont été effectués au moyen de la formule $b_1 = 0,000507 + \frac{0,00000647}{R}$ déduite de procédés graphiques, et presque identique à celle obtenue par la méthode des moindres carrés. Si l'on a compris, dans ce tableau, les diamètres 0,027, 0,054, 0,081, 0,108, 0,135, 0,162, 0,216, 0,325, c'est qu'ils sont employés dans la fourniture d'eau de Paris.
0,02	0,01	0,001,154	0,115,40	2,943	
0,027	0,0135	0,000,986	0,073,056	3,699	
0,03	0,015	0,000,938	0,062,555	3,998	
0,04	0,02	0,000,830	0,041,525	4,907	
0,05	0,025	0,000,765	0,030,632	5,713	
0,054	0,027	0,000,746	0,027,653	6,013	
0,06	0,03	0,000,722	0,024,089	6,443	
0,07	0,035	0,000,691	0,019,767	7,112	
0,08	0,04	0,000,668	0,016,718	7,733	
0,081	0,0405	0,000,666	0,016,463	7,793	
0,09	0,045	0,000,650	0,014,461	8,315	
0,10	0,05	0,000,636	0,012,728	8,863	
0,108	0,054	0,000,626	0,011,607	9,231	
0,11	0,055	0,000,624	0,011,357	9,383	
0,12	0,06	0,000,614	0,010,247	9,878	
0,13	0,065	0,000,606	0,009,331	10,352	
0,135	0,067	0,000,602	0,008,931	10,581	
0,14	0,07	0,000,599	0,008,563	10,806	
0,15	0,075	0,000,593	0,007,910	11,243	
0,16	0,08	0,000,587	0,007,348	11,665	

DIAMÈTRES. (1)	RAYONS. (2)	b_1. (3)	$\frac{b_1}{R}$. (4)	$\sqrt{\frac{R}{b_1}}$. (5)	OBSERVATIONS. (6)
mèt.	mèt.				
0,162	0,081	0,000,586	0,007,245	11,748	
0,17	0,085	0,000,583	0,006,860	12,073	
0,18	0,09	0,000,578	0,006,432	12,468	
0,19	0,095	0,000,575	0,006,053	12,705	
0,20	0,10	0,000,571	0,005,717	13,225	
0,21	0,105	0,000,568	0,005,415	13,588	
0,216	0,108	0,000,566	0,005,249	13,802	
0,22	0,11	0,000,565	0,005,143	13,943	
0,23	0,115	0,000,563	0,004,897	14,288	
0,24	0,12	0,000,560	0,004,674	14,626	
0,25	0,125	0,000,558	0,004,470	14,956	
0,26	0,13	0,000,556	0,004,282	15,280	
0,27	0,135	0,000,554	0,004,110	15,597	
0,28	0,14	0,000,553	0,003,951	15,908	
0,29	0,145	0,000,551	0,003,804	16,213	
0,30	0,15	0,000,550	0,003,667	16,512	
0,31	0,155	0,000,548	0,003,540	16,806	
0,32	0,16	0,000,547	0,003,421	17,095	
0,325	0,1625	0,000,546	0,003,365	17,238	
0,33	0,165	0,000,546	0,003,310	17,380	
0,34	0,17	0,000,545	0,003,206	17,660	
0,35	0,175	0,000,543	0,003,108	17,936	
0,36	0,18	0,000,542	0,003,016	18,207	
0,37	0,185	0,000,541	0,002,929	18,475	
0,38	0,19	0,000,541	0,002,847	18,739	
0,39	0,195	0,000,540	0,002,770	18,999	
0,40	0,20	0,000,539	0,002,696	19,256	
0,41	0,205	0,000,538	0,002,627	19,510	
0,42	0,21	0,000,537	0,002,561	19,760	
0,43	0,215	0,000,537	0,002,498	20,007	
0,44	0,22	0,000,536	0,002,438	20,251	
0,45	0,225	0,000,535	0,002,381	20,493	
0,46	0,23	0,000,535	0,002,326	20,731	
0,47	0,235	0,000,534	0,002,274	20,967	
0,48	0,24	0,000,533	0,002,224	21,200	
0,49	0,245	0,000,533	0,002,177	21,431	
0,50	0,25	0,000,532	0,002,131	21,659	
0,55	0,275	0,000,530	0,001,929	22,767	
0,60	0,30	0,000,528	0,001,761	23,823	
0,65	0,325	0,000,526	0,001,621	24,835	
0,70	0,35	0,000,525	0,001,501	25,807	
0,75	0,375	0,000,524	0,001,398	26,745	
0,80	0,40	0,000,523	0,001,307	27,650	
0,85	0,425	0,000,522	0,001,228	28,527	
0,90	0,45	0,000,521	0,001,158	29,378	
0,95	0,475	0,000,520	0,001,096	30,205	
1,00	0,50	0,000,519	0,001,039	31,010	

Il ne convient pas de faire usage, dans les distributions, de tuyaux au-dessous de $0^m,06$ de diamètre; ce calibre même ne doit être employé qu'à titre exceptionnel, en raison des dépôts qui tapissent promptement les parois; mon opinion serait qu'on doit s'arrêter à $0^m,08$. (Je ne parle pas des tuyaux en plomb de $0^m,027$ à $0^m,04$ de diamètre destinés à l'alimentation des bornes-fontaines et aux distributions intérieures.)

D'autre part, la limite à laquelle on s'est arrêté jusqu'à présent pour les diamètres supérieurs est de 1 mètre.

On voit donc que les coefficients de la résistance étant pour les tuyaux de $0^m,06$ de..... 0,000,72267
et pour ceux de 1 mètre de..... 0,000,51994
le rapport maximum entre les coefficients et les résistances est $\frac{72}{52}$.

Mais il se rapproche promptement de l'unité.

Ainsi, quand il s'agit de diamètres plus fréquemment employés, et variant entre $0^m,12$ et $0^m,30$, ce rapport devient $\frac{61}{55}$.

De plus, les vitesses étant entre elles seulement comme les racines carrées du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire comme 7,79 est à 7,41, il n'y a pas grand inconvénient à considérer comme constant, dans ces limites, le plus grand coefficient, si la simplification des calculs de la distribution d'eau l'exigeait.

On se rappelle que dans le premier chapitre de ce Mémoire j'ai donné l'équation calculée par de Prony, lorsqu'on n'emploie que la deuxième puissance de v^2 pour évaluer les résistances.

Cette équation est :

$$v = 26^m,79\sqrt{DJ}$$

elle correspond au diamètre de $0^m,10$ pour lequel le coefficient de la résistance est..... $0^m,000,6364$

Il est donc tout naturel que cette formule donne, au-dessous et au-dessus de ce diamètre, des produits, soit plus faibles, soit plus forts que ceux résultant des expériences.

On trouvera, à la suite de ce Mémoire, des tables calculées au moyen du tableau des valeurs de b_1, $\frac{b_1}{R}$, $\sqrt{\frac{R}{b_1}}$.

Ces tables comprennent tous les tuyaux énumérés dans ce tableau, et des vitesses variant d'*un* en *un* centimètre entre $0^m,10$ et $0^m,50$,

De *deux* en *deux* centimètres entre $0^m,50$ et 2 mètres,

Enfin de *cinq* en *cinq* centimètres entre 2 et 3 mètres.

Elles se terminent à la vitesse de 3 mètres. Mais comme mes expériences arrivent jusqu'à la vitesse de 6 mètres, on comprend que l'on peut avoir recours aux formules au moins jusqu'à cette dernière.

Je terminerai ce qui a rapport à ces tables par deux observations pratiques.

Première observation. — En vertu des faits précédemment démontrés, il convient, lorsqu'on cherche la pente correspondant à une vitesse déterminée, de doubler cette pente dans la pratique, ou, si la pente est donnée, de la diviser par deux, et de ne compter que la vitesse correspondant au quotient de cette division.

Ainsi, l'on aura égard au retard que les dépôts font éprouver à la vitesse.

Deuxième observation. — Mais, indépendamment de ce retard provenant des aspérités des parois, il existe une autre cause qui affaiblit le volume de l'écoulement : elle est due à l'épaisseur de la couche déposée.

Pour y remédier, il importe, suivant la nature des eaux à conduire, d'augmenter les diamètres trouvés d'une certaine quantité d'autant plus nécessaire à ajouter que les diamètres sont plus faibles.

Passons maintenant à la recherche des formules d'interpolation des coefficients des première et seconde puissances de v dans l'équation générale,

$$Ri = av + bv^2$$

et d'abord, composons le tableau des valeurs déduites de l'expérience :

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE.	COEFFICIENT DE v.	COEFFICIENT DE v^2.	OBSERVATIONS.
		mèt.			
Fer étiré.....	1	0,0122	0,000,142,255	0,001,361,42	
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,840,034	
	3	0,0395	0,000,037,832	0,000,697,532	
Fonte.....	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,634,45	
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,505,527	
	18	0,188	0,000,012,276	0,000,572,07	
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,585,53	
	22	0,50	0,000,100,482	0,000,387,113	

L'examen de ce tableau donne lieu à plusieurs remarques :

1° On comprend que le coefficient de v^2 du tuyau de $0^m,137$ doit être trop petit à raison du fait que nous avons déjà rapporté, savoir : que ce tuyau sortait des fonderies et présentait une surface parfaitement nette,

2° Que dans le tuyau de $0^m,50$ le coefficient de la première puissance de la vitesse présentait une valeur relative trop forte, comparativement au coefficient de la deuxième puissance de la vitesse, attendu que les expériences du 5 août, par les raisons que j'ai indiquées, ont donné pour les petites vitesses des valeurs trop faibles, ce qui a dû notamment accroître le coefficient de v, et diminuer en même temps celui de v^2. Il convient donc de rechercher de nouveau les coefficients a et b en n'employant que des expériences faites exactement dans les mêmes circonstances, afin d'obtenir un rapport aussi exact que possible entre les coefficients précités.

J'ai donc recommencé les calculs des formules (3) et (4) en n'y introduisant que les données suivantes :

i	v	DATES.
—	—	—
$0^m,000,45$	$0^m,4488$	29 juillet,
0 ,000,12	0 ,7932	29 juillet,
0 ,000,21	1 ,0412	5 août[1],
0 ,000,23	1 ,1135	2 août,
0 ,000,25	1 ,2278	29 juillet,
0 ,000,26	1 ,1197	5 août,

d'où

$$a = 0,000,049,780$$
$$b = 0,000,438,124.$$

3° Le tuyau de $0^m,297$ était, comme on l'a vu, un tuyau bien nettoyé, mais non pas un tuyau neuf : le coefficient de la deuxième puissance devait donc être un peu trop fort, et celui de la première puissance trop faible; on a constamment observé, en effet, que plus les aspérités croissent, plus diminuent en même temps les coefficients de v.

4° Enfin, comme on avait mené les expériences dans le tuyau de $0^m,188$ jusqu'à une vitesse moyenne de $4^m,928$, on comprend que les grandes vitesses devaient obtenir dans la formation de l'équation de la courbe une influence qui se traduisait naturellement par la diminution disproportionnée du coefficient de v.

Du reste, on remarquera que les formules (1) et (2) qui modifient dans un sens convenable le rapport des coefficients a et b, présentent pour les vitesses théoriques exactement le même degré d'approximation; on pourra donc adopter les coefficients :

$$a = 0,000,034,145$$
$$b = 0,000,552,448.$$

Le tableau des données destinées à calculer les lois existant

[1] J'ai conservé les résultats des 5 et 2 août, parce que les lavages opérés par les expériences précédentes avaient suffisamment enlevé toutes les rugosités de l'oxyde.

entre les coefficients de la première puissance de v d'une part, et de la seconde puissance d'autre part, deviendra donc :

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE.	COEFFICIENT DE v. (a)	COEFFICIENT DE v^2. (b)	OBSERVATIONS.
		mèt.			
Fer étiré.....	1	0,0122	0,000,142,255	0,001,361,42	
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,840,034	
	3	0,0395	0,000,037,382	0,000,697,532	
	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,634,45	
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,505,527	
Fonte.....	18	0,188	0,000,034,145	0,000,552,448	
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,585,53	
	22	0,500	0,000,049,780	0,000,438,124	

Il nous reste maintenant à interpoler ces résultats.

Pour les coefficients de v^2, nous aurons recours à la formule déjà employée :

$$b = \alpha + \frac{\beta}{R}$$

Pour les coefficients de v, nous emploierons la suivante :

$$a = \alpha' + \frac{\beta'}{R^2}$$

Cette différence des deux formules d'interpolation peut, comme on le verra plus tard, recevoir une interprétation satisfaisante.

Faisant donc dans les formules :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\Sigma\frac{1}{Ry}\times\Sigma\frac{1}{Ry^2} - \Sigma\frac{1}{y}\times\Sigma\frac{1}{R^2y^2}}{\left(\Sigma\frac{1}{Ry^2}\right)^2 - \Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{R^2y^2}} \\ \beta = \dfrac{\Sigma\frac{1}{Ry^2}\times\Sigma\frac{1}{y} - \Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{Ry}}{\left(\Sigma\frac{1}{Ry^2}\right)^2 - \Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{R^2y^2}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha' = \dfrac{\Sigma\frac{1}{R^2y}\times\Sigma\frac{1}{R^2y^2}-\Sigma\frac{1}{y}\times\Sigma\frac{1}{R^4y^2}}{\left(\Sigma\frac{1}{R^2y^2}\right)^2-\Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{R^4y^2}} \\ \beta' = \dfrac{\Sigma\frac{1}{R^2y^2}\times\Sigma\frac{1}{y}-\Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{R^2y^2}}{\left(\Sigma\frac{1}{R^2y^2}\right)^2-\Sigma\frac{1}{y^2}\times\Sigma\frac{1}{R^4y^2}} \end{array}\right.$$

les substitutions[1] déduites des données expérimentales, on obtiendra :

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l}\alpha = 0{,}000{,}442{,}939 \\ \beta = 0{,}000{,}006{,}201\end{array}\right.$$

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l}\alpha' = 0{,}000{,}031{,}635 \\ \beta' = 0{,}000{,}000{,}003{,}755{,}6\end{array}\right.$$

d'où l'on tirera

$$a = 0{,}000{,}031{,}635 + \frac{0{,}000{,}000{,}003{,}755{,}6}{R^2}$$

$$b = 0{,}000{,}442{,}939 + \frac{0{,}000{,}006{,}201}{R}.$$

Mettant maintenant à la place de R ses valeurs successives, on pourra construire le tableau suivant :

NATURE DES TUYAUX.	NUMÉROS d'ordre.	DIAMÈTRE DES TUYAUX.	VALEURS DE a		VALEURS DE b	
			expérimentales.	d'après la formule.	expérimentales.	d'après la formule.
		mèt.				
Fer étiré...	1	0,0122	0,000,142,255	0,000,132,562	0,001,361,42	0,001,459,419
	2	0,0266	0,000,048,486	0,000,052,866	0,000,840,034	0,000,909,146
	3	0,0395	0,000,037,832	0,000,041,263	0,000,697,532	0,000,756,691
Fonte.....	16	0,0819	0,000,044,881	0,000,033,874	0,000,634,45	0,000,594,537
	17	0,137	0,000,038,825	0,000,032,435	0,000,505,527	0,000,533,458
	18	0,188	0,000,034,145	0,000,032,060	0,000,552,448	0,000,508,903
	21	0,297	0,000,023,508	0,000,031,805	0,000,585,53	0,000,484,685
	22	0,500	0,000,049,780	0,000,031,695	0,000,438,124	0,000,467,741

[1] On se rappelle que y représente les valeurs successives des coefficients de v et de v^2.

Nous donnerons maintenant la série des valeurs de a et de b correspondant à tous les rayons compris dans nos tables.

DIAMÈTRES.	RAYONS.	a. (1)	b. (2)	a_1. (3)	OBSERVATIONS.
mèt.	mèt.				
0,01	0,005	0,000,181,854	0,001,683,039	0,000,178,824	Les valeurs a_1 de la colonne 3 se rapportent, comme on va le voir, aux vitesses au-dessous de $0^m,10$ et données par l'équation $Ri = a_1 v$ dans les tuyaux de petit diamètre.
0,02	0,01	0,000,069,189	0,001,062,989	0,000,103,735	
0,027	0,0135	0,000,052,240	0,000,902,239	0,000,084,268	
0,03	0,015	0,000,048,325	0,000,856,309	0,000,078,705	
0,04	0,02	0,000,041,023	0,000,752,969	0,000,066,191	
0,05	0,025	0,000,037,643	0,000,690,959	0,000,058,682	
0,054	0,027	0,000,036,786	0,000,672,589	0,000,056,457	
0,06	0,03	0,000,035,807	0,000,649,619	0,000,053,676	
0,07	0,035	0,000,034,700	0,000,620,099	0,000,050,100	
0,08	0,04	0,000,033,981	0,000,597,949	0,000,047,419	
0,081	0,0405	0,000,033,924	0,000,596,039	0,000,047,187	
0,09	0,045	0,000,033,489	0,000,580,729	0,000,045,333	
0,10	0,05	0,000,033,136	0,000,566,949	0,000,043,664	
0,108	0,054	0,000,032,922	0,000,557,759	0,000,042,552	
0,11	0,055	0,000,032,876	0,000,555,679	0,000,042,299	
0,12	0,06	0,000,032,677	0,000,546,279	0,000,041,161	
0,13	0,065	0,000,032,523	0,000,538,332	0,000,040,199	
0,135	0,0675	0,000,032,458	0,000,534,799	0,000,039,771	
0,14	0,07	0,000,032,401	0,000,531,518	0,000,039,373	
0,15	0,075	0,000,032,302	0,000,525,613	0,000,038,658	
0,16	0,08	0,000,032,221	0,000,520,446	0,000,038,033	
0,162	0,031	0,000,032,207	0,000,519,489	0,000,037,917	
0,17	0,085	0,000,032,154	0,000,515,887	0,000,036,980	
0,18	0,09	0,000,032,098	0,000,511,834	0,000,036,990	
0,19	0,095	0,000,032,050	0,000,508,208	0,000,036,551	
0,20	0,10	0,000,032,010	0,000,504,944	0,000,036,155	
0,21	0,105	0,000,031,975	0,000,501,992	0,000,035,798	
0,216	0,108	0,000,031,956	0,000,500,351	0,000,035,599	
0,22	0,11	0,000,031,945	0,000,499,308	0,000,035,473	
0,23	0,115	0,000,031,918	0,000,496,857	0,000,035,176	
0,24	0,12	0,000,031,895	0,000,494,610	0,000,034,904	
0,25	0,125	0,000,031,875	0,000,492,543	0,000,034,654	
0,26	0,13	0,000,031,856	0,000,490,636	0,000,034,422	
0,27	0,135	0,000,031,840	0,000,488,869	0,000,034,209	
0,28	0,14	0,000,031,826	0,000,487,229	0,000,034,010	
0,29	0,145	0,000,031,813	0,000,485,701	0,000,033,825	
0,30	0,15	0,000,031,801	0,000,484,276	0,000,033,652	
0,31	0,155	0,000,031,791	0,000,482,943	0,000,033,491	
0,32	0,16	0,000,031,781	0,000,481,692	0,000,033,339	
0,325	0,1625	0,000,031,776	0,000,481,096	0,000,033,267	
0,33	0,165	0,000,031,772	0,000,480,518	0,000,033,197	
0,34	0,17	0,000,031,764	0,000,479,413	0,000,033,063	
0,35	0,175	0,000,031,757	0,000,478,371	0,000,032,937	

DIAMÈTRES.	RAYONS.	a. (1)	b. (2)	a_1. (3)	OBSERVATIONS.
mèt.	mèt.				
0,36	0,18	0,000,031,750	0,000,477,386	0,000,032,818	
0,37	0,185	0,000,031,744	0,000,476,455	0,000,032,705	
0,38	0,19	0,000,031,738	0,000,475,573	0,000,032,598	
0,39	0,195	0,000,031,733	0,000,474,737	0,000,032,497	
0,40	0,20	0,000,031,728	0,000,473,942	0,000,032,401	
0,41	0,205	0,000,031,724	0,000,473,186	0,000,032,309	
0,42	0,21	0,000,031,719	0,000,472,465	0,000,032,222	
0,43	0,215	0,000,031,715	0,000,471,779	0,000,032,139	
0,44	0,22	0,000,031,712	0,000,471,123	0,000,032,060	
0,45	0,225	0,000,031,708	0,000,470,497	0,000,031,984	
0,46	0,23	0,000,031,705	0,000,469,898	0,000,031,911	
0,47	0,235	0,000,031,702	0,000,469,324	0,000,031,842	
0,48	0,24	0,000,031,699	0,000,468,775	0,000,031,775	
0,49	0,245	0,000,031,697	0,000,468,247	0,000,031,711	
0,50	0,25	0,000,031,694	0,000,467,741	0,000,031,650	
0,55	0,275	0,000,031,684	0,000,465,486	0,000,031,377	
0,60	0,30	0,000,031,676	0,000,463,607	0,000,031,149	
0,65	0,325	0,000,031,670	0,000,462,018	0,000,030,957	
0,70	0,35	0,000,031,665	0,000,460,655	0,000,030,792	
0,75	0,375	0,000,031,661	0,000,459,474	0,000,030,649	
0,80	0,40	0,000,031,658	0,000,458,440	0,000,030,524	
0,85	0,425	0,000,031,655	0,000,457,529	0,000,030,413	
0,90	0,45	0,000,031,653	0,000,456,718	0,000,030,315	
0,95	0,475	0,000,031,651	0,000,455,993	0,000,030,227	
1,00	0,50	0,000,031,649	0,000,455,340	0,000,030,148	

Nous avons dit que l'on pouvait, jusqu'à un certain point, s'expliquer pourquoi il existe une différence dans l'expression algébrique qui représente les décroissements des coefficients de la première et de la seconde puissance de v, à partir du diamètre de $0^m,0122$.

Il est naturel, en effet, que le décroissement du premier soit plus rapide.

Car, aux causes réelles qui font naître ces diminutions, vient s'ajouter encore celle résultant de ce que, dans les grandes vitesses, les formules d'interpolation tendent à sacrifier le premier coefficient au second, à ce point, qu'à partir d'une certaine vitesse la valeur du débit ne semble point affectée par la suppression du premier terme.

Aussi verra-t-on plus tard qu'en dirigeant les expériences de manière à n'obtenir que de très-faibles vitesses, le coefficient du premier terme reprendra son caractère, et que même la loi algébrique de son décroissement reparaîtra sous la forme

$$a_1 = \alpha' + \frac{\beta'}{R}$$

dans laquelle

$$\alpha' = 0{,}000{,}028{,}647$$
$$\beta' = 0{,}000{,}000{,}751$$

Ce sont les valeurs déduites de la formule ci-dessus qui sont indiquées dans la colonne (3) du tableau précédent.

La similitude des colonnes (1) et (3), à partir du diamètre de $0^m,15$, rend assez indifférent l'usage de l'une ou de l'autre. Je pense cependant qu'il est plus logique d'employer les valeurs de la colonne (1), puisqu'elles se lient à celles de la colonne (2) au moyen de l'interpolation.

On devra seulement avoir recours à celles de la colonne (3) lorsque les vitesses ne dépasseront pas $0^m,10$ par seconde dans des tuyaux à parois suffisamment lisses : alors évidemment il ne faudra avoir aucun égard au terme en v^2; la vitesse étant donnée, dans cette circonstance, comme nous le ferons voir plus tard, par une expression de la forme

$$Ri = a_1 v.$$

On remarquera encore, en jetant les yeux sur le tableau des valeurs de a et b, que les coefficients de la première puissance s'approchent très-rapidement de l'uniformité. On voit aussi qu'il en est de même de ceux de la seconde, quoique à un degré un peu moindre.

Dans les applications, il sera donc très-permis de regarder les coefficients de a et de b comme constants, dans les limites que l'on considérera, pourvu qu'il ne s'agisse pas de tuyaux de très-petit diamètre, auxquels du reste on a rarement recours dans

les applications, excepté pour le cas spécial de l'alimentation des bornes-fontaines.

La formule de Prony, rapportée dans notre premier chapitre, est :

$$\frac{1}{4}\,DJ = 0{,}000{,}017{,}331{,}4\ v + 0{,}000{,}348{,}259\ v^2$$

ou

$$Ri = 0\ ,000{,}034{,}662{,}8\ v + 0{,}000{,}696{,}518\ v^2.$$

Elle correspond ainsi à celle du tuyau de $0^m{,}05$ de diamètre.

On comprend donc, selon que je l'ai déjà fait observer, qu'au-dessus ou au-dessous de ce diamètre l'expérience donne des résultats plus petits ou plus grands que ceux de la formule précitée.

Inutile d'ajouter que l'emploi de la formule à deux termes, à laquelle au reste, je le répète, il paraît tout à fait superflu de recourir dans la pratique, exigera, si on voulait en faire usage, les mêmes précautions que celles indiquées pour la formule à un seul terme.

Une réflexion se présente quand on examine les dernières valeurs de a et de b portées sur le tableau.

On pourrait se dire : puisque ces valeurs ne paraissent plus susceptibles de diminution, quel que soit le diamètre, ne devraient-elles pas être considérées comme les coefficients de résistance pouvant servir à déterminer la vitesse moyenne de l'eau dans les rivières?

Dans ce cas, la formule deviendrait

$$0{,}000{,}015{,}5\ v + 0{,}000{,}227{,}5\ v^2 = \frac{R}{2}\ i$$

puisque c'est le rayon moyen ou $\frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$ qui doit entrer dans le second terme.

Mais il est évident que cette formule donnerait en général des résultats trop forts.

D'une part, dans les tuyaux, le rapport du périmètre à la surface est toujours un minimum.

D'autre part, la régularité mathématique, et la netteté relative de leurs parois assureront toujours aux tuyaux une grande supériorité pour l'écoulement.

Aussi les formules expérimentales de MM. de Prony et d'Eytelwein sont-elles :

$$0{,}000{,}044{,}449{,}9\ v + 0{,}000{,}309{,}314\ v^2 = Ri\ ^1$$

et

$$0{,}000{,}024{,}265\ \ v + 0{,}000{,}365{,}543\ v^2 = Ri.$$

Si la formule de Prony pour les tuyaux,

$$0{,}000{,}017{,}331{,}4\ v + 0{,}000{,}348{,}259\ v^2 = \frac{R}{2}\ i$$

paraît, contrairement à celle qui résulte de mes tableaux, coïncider à peu près avec celle des rivières, cela tient encore à ce que la première, établie au moyen de tuyaux de petit diamètre, ou d'une grande section mais recouverts de dépôts, donne à la résistance des valeurs plus grandes que celles exigées pour les grands diamètres dont les parois présentaient le degré de poli ordinaire.

C'est toujours la conséquence de cette même compensation confuse que j'ai déjà eu l'occasion de signaler.

Il est inutile de rechercher les équations qui conviendraient à l'écoulement de l'eau dans les tuyaux en tôle et bitume, parce que, comme nous l'avons fait observer, ils finiront, bien qu'à une époque plus reculée, par se recouvrir de dépôts, et qu'en dernier résultat, c'est toujours cette fin qu'il faut considérer.

Il nous a suffi de montrer que dans ces tuyaux, lorsqu'ils étaient neufs, le coefficient de v^2 diminuait notablement, tandis que celui de v, au contraire, prenait une valeur plus grande : double résultat qui contribuait à faire abaisser au-dessous de l'axe des x l'origine de la parabole, et qui tendait par conséquent à présenter pour la loi d'écoulement des parties de la ligne dont le rayon de courbure était beaucoup plus grand.

[1] R, rayon moyen ou surface divisée par le contour.

Ainsi grandissait dans ces conduites l'influence relative du coefficient de la première puissance.

Les tuyaux en plomb donnent lieu de faire une autre observation :

C'est que, tandis que dans les tuyaux en fer étiré les coefficients de la résistance, calculés au moyen de la formule (6), prennent pour les tuyaux de $0^m,0122$ et $0^m,0395$ les valeurs successives :

0,001,684
0,000,808

les mêmes coefficients deviennent dans les tuyaux en plomb de $0^m,014$ et $0^m,041$:

0,000,810
0,000,757.

Ainsi, à partir des petits diamètres, l'affaiblissement des coefficients de la résistance paraît beaucoup moins rapide, ce qui doit tenir à ce que la couche annulaire et presque immobilisée, dont il a déjà été question, devait être beaucoup moins épaisse dans les tuyaux repoussés en plomb, lesquels étaient d'un poli presque parfait, que dans les tuyaux en fer étiré.

On aurait eu évidemment la même remarque à faire dans les tuyaux en tôle et bitume, si nous eussions pu opérer sur des tuyaux d'un centimètre.

CHAPITRE V.

VITESSES RELATIVES DES FILETS FLUIDES.

Lorsqu'un tuyau cylindrique livre passage à une masse fluide coulant avec une vitesse moyenne quelconque, cet écoulement s'opère, ainsi que nous l'avons déjà vu (chap. I), comme si cette masse fluide était composée d'une infinité de couches ou enveloppes concentriques se mouvant avec des vitesses d'autant plus grandes qu'elles sont plus éloignées de la paroi.

La vitesse maximum se trouve dans l'axe du tuyau, la vitesse minimum à la paroi; la vitesse moyenne, placée à une distance plus rapprochée de la paroi que de l'axe, est d'ailleurs liée par une relation assez simple avec les vitesses maximum et minimum.

Quelle peut être la loi existant entre les vitesses de ces diverses enveloppes concentriques? A quelle distance de l'axe la vitesse moyenne est-elle située? Quelle est la valeur de cette dernière en fonction des vitesses au centre et à la paroi?

Telles sont les trois questions que je vais chercher à résoudre.

L'expérience seule pouvait faire connaître la vitesse avec laquelle cheminaient les diverses enveloppes concentriques.

Pour arriver à ce résultat j'ai eu recours à l'appareil suivant : j'ai introduit dans le tuyau soumis à l'expérience un tube très-délié, creux, verticalement placé et passant par le centre; sur la portion de ce tube intérieure au tuyau était fixé perpendiculairement un petit ajutage, dont l'orifice présentait un diamètre d'environ 1 millimètre.

Cette espèce de tube de Pitot avait, au moyen de parties flexibles, la possibilité de s'élever et de s'abaisser de telle sorte que le petit ajutage pût correspondre à tous les points du diamètre intérieur du tuyau. De plus, il se terminait par un tube en verre; enfin, un tube manométrique s'élevait à côté du tube de Pitot et dans le même plan normal au tuyau.

Le tube manométrique indiquait la pression à laquelle l'eau était soumise dans le tuyau; le tube de Pitot, la hauteur totale due à cette pression et à la vitesse de la couche à laquelle correspondait l'ajutage.

Ainsi, la différence exprimait la hauteur due à la vitesse : cette dernière pouvait donc être facilement calculée; je dirai plus tard les petites corrections qu'il était nécessaire d'effectuer.

Or, supposons que par ce procédé j'aie obtenu pour un tuyau :

1° Les vitesses du filet central correspondant à diverses pentes, ou

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3.....$$

2° Les vitesses de la couche correspondant au tiers du rayon, ou

$$v', v'_1, v'_2, v'_3 \ldots\ldots$$

3° Celles de la couche correspondant aux deux tiers du même rayon, ou

$$v'', v''_1, v''_2, v''_3 \ldots\ldots$$

Supposons, en outre, que l'on prenne les différences existant entre les vitesses du filet central, et celles trouvées au tiers et aux deux tiers du rayon,

Les premières seront:

$$v - v', \quad v_1 - v'_1, \quad v_2 - v'_2, \quad v_3 - v'_3 \ldots\ldots$$

Les secondes,

$$v - v'', \quad v_1 - v''_1, \quad v_2 - v''_2, \quad v_3 - v''_3 \ldots\ldots$$

Supposons enfin que les pentes par mètre correspondantes aient pour valeurs,

$$i, \quad i', \quad i'', \quad i''' \ldots\ldots$$

L'expérience, comme nous le verrons, apprend que les rapports:

$$\frac{v - v'}{\sqrt{i}}, \quad \frac{v_1 - v'_1}{\sqrt{i'}}, \quad \frac{v_2 - v'_2}{\sqrt{i''}}, \quad \frac{v_3 - v'_3}{\sqrt{i'''}} \ldots\ldots$$

sont constants; et qu'il en est de même des rapports

$$\frac{v - v''}{\sqrt{i}}, \quad \frac{v_1 - v''_1}{\sqrt{i'}}, \quad \frac{v_2 - v''_2}{\sqrt{i''}}, \quad \frac{v_3 - v''_3}{\sqrt{i'''}} \ldots\ldots$$

que, par conséquent, la vitesse d'une enveloppe concentrique placée à une distance constante du centre est liée à la pente du tuyau par la relation

$$V - v = K' \sqrt{i},$$

V étant la vitesse au centre, v la vitesse de cette couche.

Si maintenant nous recherchons quel est, pour une pente donnée, le rapport existant entre les différences

$$V - v'$$
$$V - v''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et les rayons r', r'', etc. v' étant placé à la distance r', v'' à la distance r'' de l'axe du tuyau, l'expérience nous montrera également que les expressions :

$$\frac{V - v_1}{r'^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{V - v''}{r''^{\frac{3}{2}}}$$
$$\ldots\ldots$$

sont constantes, nous aurons donc

$$V - v = K'' r^{\frac{3}{2}}$$

d'où nous déduirons en général, pour la relation existant dans un même tuyau, entre les différences $V - v$, la pente et la distance du centre r de la couche que l'on considère :

$$V - v = K_0 r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}.$$

En passant d'un tuyau à l'autre, j'ai remarqué que K_0 variait, et que pour le rendre constant, il fallait le multiplier par le rayon du tuyau soumis à l'épreuve.

On a donc enfin pour la formule définitive cherchée :

$$V - v = \frac{K r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}}{R}$$

dans laquelle..... { V exprime la vitesse au centre;
v, la vitesse d'un filet fluide quelconque;
r, la distance de ce filet fluide au centre;
i, la pente.

J'aurais dû dire plus tôt que la symétrie la plus complète a

toujours été observée dans les vitesses des filets situés à pareille distance du centre.

Il est peut-être opportun de faire remarquer que cette équation toute expérimentale,

$$V - v = \frac{K r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}}{R}$$

peut facilement s'interpréter.

Sa différenciation nous donne

$$-\frac{dv}{dr} = \frac{3}{2} K \frac{r^{\frac{1}{2}} \sqrt{i}}{R};$$

élevée au carré, elle devient

$$\left(R \frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{9}{4} K^2 ri;$$

Enfin, on obtient, en la multipliant par $2\pi r$,

$$2\pi r \left(R \frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{9}{2} K^2 \pi r^2 i$$

ou

$$\frac{2}{9 K^2} 2\pi r \left(R \frac{dv}{dr}\right)^2 = \pi r^2 i.$$

Sous cette forme on reconnaît facilement que l'équation ci-dessus n'est autre que l'équation d'équilibre du tuyau cylindrique liquide, dont le rayon est r.

En effet, ce tuyau est sollicité par la pesanteur, proportionnellement à $\pi r^2 i$, et il résiste à cette action avec une force retardatrice proportionnelle à son contour $2\pi r$, et au carré de sa vitesse relative multiplié par le carré du rayon de tuyau.

On voit donc :

1° Que la résistance due aux actions intérieures est proportionnelle au carré de l'inclinaison de la tangente de la courbe des vitesses;

2° Que dans les tuyaux de divers diamètres, et pour des points de la courbe pris à égales distances du centre, il y a constamment

égalité entre les produits des rayons par les inclinaisons des tangentes de la courbe aux points que l'on considère.

Si maintenant nous comparons l'équation différentielle ci-dessus, à celle obtenue dans le chapitre I:

$$2\pi r f\left(-\frac{dv}{dr}\right) = \pi r^2 i$$

dans laquelle la fonction f était inconnue, et qui d'ailleurs laissait ignorée l'influence du rayon du tuyau sur la courbe des vitesses, il en résultera que:

$$f\left(-\frac{dv}{dr}\right)$$

a pour valeur déduite de l'expérience:

$$\frac{2}{9K^2}\left(R\frac{dv}{dr}\right)^2.$$

Cette conclusion est en désaccord avec l'opinion émise par plusieurs hydrauliciens éminents qui, se laissant guider seulement par des considérations théoriques, ont posé l'équation

$$-\varepsilon\frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2}$$

qui revient à

$$2\pi r\varepsilon \times -\frac{dv}{dr} = \pi r^2 i$$

au lieu de la précédente,

$$2\pi r\varepsilon\left(R\frac{dv}{dr}\right)^2 = \pi r^2 i$$

je représente par ε la constante $\frac{2}{9K^2}$.

L'opinion de ces savants était pour moi d'un grand poids, et je ne me suis hasardé à m'en écarter qu'en présence des résultats concordants et multipliés que m'ont fournis des expériences faites avec tout le soin possible.

Du reste, j'aurai encore occasion de chercher à justifier mon équation lorsque j'aurai donné le détail des expériences qui m'ont servi à la déterminer.

Quant à l'interprétation de la constante $\frac{2}{9\,K^2}$ ou ε, je ferai remarquer que, dans un tuyau de rayon égal à l'unité, et pour le point de la courbe où $\frac{dv}{dr} = 1$ (c'est-à-dire correspondant au cylindre liquide qui, dans l'unité de temps, a parcouru une distance relative dv égale à l'épaisseur infiniment petite des anneaux cylindriques, *d'épaisseur égale*, dans lesquels le cylindre liquide total a été décomposé), je ferai remarquer, dis-je, que l'équation ci-dessus se réduit dans cette hypothèse à

$$2\pi r\,\varepsilon = \pi r^2 i$$

d'où l'on voit que ε représente précisément la résistance due aux actions intérieures, par mètre carré, pour le déplacement $dv = dr$, dans un tuyau dont le rayon est égal à l'unité.

Si l'on fait $R\,\frac{dv}{dr} = 1$, on tombe sur le même résultat pour la valeur de ε, bien que le déplacement ait alors pour expression $\frac{dr}{R}$.

Ce serait à la physique à donner une explication de ce résultat curieux qui tendrait à prouver que, dans deux tuyaux de rayons différents, les vitesses relatives de deux anneaux pris à la même distance r sont en raison inverse des rayons de ces tuyaux; c'est-à-dire que ces vitesses relatives dépendraient des dimensions absolues de la section, ou de la distance des anneaux aux parois.

L'hypothèse du mouvement graduel et régulier des filets contigus ne pouvait faire pressentir ce résultat; alors l'expression $\frac{dv}{dr}$ semblait devoir être indépendante du rayon du tuyau. Mais cette hypothèse est-elle plus conforme aux lois naturelles que celle du parallélisme des tranches? Rend-elle compte de tous les mouvements observés dans les courants, mouvements qui paraissent dépendre de la section absolue, et doivent influer sur la grandeur des actions intérieures? Explique-t-elle la variation périodique des vitesses des filets fluides telle que nous l'avons observée, M. Baumgarten et moi, au moyen du tube jaugeur décrit dans les

Fontaines publiques de Dijon[1] ? Laisse-t-elle entrevoir la cause des variations de hauteur des jets d'eau[2] et des oscillations manométriques, *oscillations d'autant plus fortes que les diamètres des conduites sont plus considérables?*

A-t-on égard d'ailleurs dans cette hypothèse aux mouvements giratoires et oscillatoires que doivent prendre les éléments des filets prétendus linéaires; mouvements qu'il est bien difficile de révoquer en doute en présence de l'extrême mobilité des molécules fluides, de la différence de vitesse des filets contigus et de la cohésion qui les unit? Si j'ajoute à ces difficultés que cette même hypothèse, dans laquelle on laisse la section du tuyau sans influence sur les actions intérieures, conduit, comme on le verra pour les vitesses maximum et moyenne, à des expressions désavouées par l'expérience, il faudra bien conclure, malgré l'autorité des noms qui s'attachent à cette hypothèse, qu'elle est en désaccord avec les faits, et qu'elle devrait être modifiée[3].

Sans doute, je ne saurais maintenant donner la raison philosophique de l'expression révélée par mes expériences, mais il me suffisait, je crois, d'établir ici que l'hypothèse précitée était

[1] Les phénomènes hydrauliques qui paraissent devoir être assujettis complétement à la loi de *continuité* sont soumis à des variations qu'il est bien difficile de s'expliquer.

M. l'ingénieur Bazin, dans des expériences relatives au débit des vannes d'écluse, a remarqué le fait suivant :

Il vidait lentement un bassin de deux hectares de superficie (le port de Tonnerre) : l'abaissement aurait dû s'opérer, dans les idées reçues, par degrés insensibles. Il a observé au contraire que l'abaissement à l'extrémité amont (opposée à la vanne qui était levée) s'opérait par saccades, d'une manière discontinue, par soubresauts de 3 à 4 millimètres, de manière à faire varier tout à coup de 1 à 2 centmillièmes la pente du bassin, qui était presque nulle.

L'écoulement du sable très-fin et très-sec présente un phénomène analogue; j'ai cru le remarquer du moins.

M. Bazin doit renouveler ces expériences de manière à en tirer, s'il est possible, quelque conclusion sur la cohésion de l'eau.

[2] Voir l'ouvrage sur les fontaines de Dijon, où j'ai donné les rapports existant entre les hauteurs minimum, moyenne et maximum du jet de la porte Saint-Pierre.

[3] J'entrerai à la fin de ce chapitre dans des détails plus explicites à ce sujet.

ébranlée par trop de faits bien constatés pour qu'elle pût être victorieusement opposée aux résultats que j'ai déduits d'expériences aussi exactes que possible.

La constante ε sera donc, dans un tuyau de rayon égal à l'unité, la résistance due aux actions intérieures, par mètre carré, pour un déplacement relatif du cylindre liquide, égal à l'épaisseur infiniment petite, dr, de la couche enveloppe; cette valeur de ε est égale à $1^k,74$, comme nous le verrons plus tard.

Reprenons l'équation,

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i}.$$

Pour obtenir la vitesse à la paroi, il suffira de faire $r = R$ et l'on aura, en appelant w cette vitesse:

$$V - w = K \sqrt{R} \sqrt{i}$$

d'où

$$V - v = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} (V - w)$$

d'où,

$$v = V - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} (V - w)$$

Pour obtenir la vitesse moyenne, il suffira de poser

$$\pi R^2 u = \int_0^R \left[V - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}} (V - w) \right] 2 \pi r dr$$

d'où,

$$u = V - \frac{4}{7} (V - w)$$

$$u = \frac{3V + 4w}{7},$$

c'est-à-dire que la vitesse moyenne est égale à trois fois la vitesse au centre, plus quatre fois la vitesse à la paroi, le tout divisé par 7.

Quant à la distance à laquelle cette vitesse est placée par rapport au centre du tuyau, il suffira, pour la trouver, de remplacer dans l'équation

$$V - v = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}}}(V - w)$$

$V - v$ par

$$V - u = \frac{4}{7}(V - w)$$

et l'on aura

$$\frac{4}{7} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où, pour la valeur du rayon correspondant à la vitesse moyenne,

$$r = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{2}{3}} R = 0{,}689\,R.$$

Je me bornerai, quant à présent, à poser les relations suivantes, résultant de la combinaison des équations qui précèdent :

$$V - w = K\sqrt{Ri},$$
$$V - u = \frac{4}{7} K\sqrt{Ri},$$
$$u - w = \frac{3}{7} K\sqrt{Ri}.$$

Il existe un moyen géométrique très-simple de construire la courbe des vitesses.

Nous avons en effet :

1° L'équation différentielle

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{3}{2} K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R}\sqrt{i}.$$

2° L'équation de la courbe

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i}.$$

Divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{\frac{dv}{dr}}{V - v} = -\frac{3}{2}\frac{1}{r},$$

d'où, pour l'expression générale de l'inclinaison des tangentes à la courbe,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{V-v}{r}.$$

On aura d'ailleurs, pour la valeur de l'inclinaison de la tangente de la courbe à la paroi :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{V-w}{R},$$

et pour celle de la tangente correspondant à la vitesse moyenne,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{V-u}{0{,}689R}.$$

Supposons maintenant que le tuyau, dans la section que l'on considère, soit partagé en une série de tranches rapprochées, équidistantes et parallèles à l'axe (pl. XI) m, m', m'', etc.

Supposons de plus que $V - w = ab$, si l'on porte $\frac{1}{2}$ ab en aa' et qu'on joigne $a'c$, on aura la tangente au point où la courbe rencontre la paroi.

Abaissons maintenant une perpendiculaire $c'b'$, portons en aa'' $\frac{1}{2}$ ab' et joignons $a''c'$, etc. la courbe tangente à toutes ces obliques sera précisément la courbe cherchée.

On obtient, au reste, une approximation suffisante du tracé de la courbe en traçant ses tangentes :

1° Au point où elle rencontre la paroi;

2° A son intersection avec le filet de la vitesse moyenne;

3° A son intersection avec le filet central : en ce dernier point la tangente est une perpendiculaire à l'axe du tuyau.

Je passe maintenant à la description des expériences.

EXPÉRIENCES.

DESCRIPTION DE L'APPAREIL EMPLOYÉ POUR LA MESURE DES VITESSES.

C'est près du premier manomètre qu'était établi l'instrument dont on s'est servi pour connaître la vitesse des filets fluides aux

différents points du diamètre. Des expériences ont été faites sur les conduites en fonte de

$0^m,188$, $0^m,2432$, $0^m,2447$, $0^m,297$ et $0^m,50$.

Le tuyau $0^m,2432$ était recouvert de dépôts, le tuyau $0^m,2447$ n'était que le précédent nettoyé.

L'appareil (pl. IV, fig. 1) se composait d'un tube creux AB en cuivre, de $0^m,005$ de diamètre, au milieu duquel était soudé un tube C de même diamètre, percé à l'extrémité d'un trou de 1 à 2 millimètres de diamètre. En D avait été ajustée une tringle en fer dans une position parallèle au tube C, afin qu'on pût toujours placer ce tube parallèlement à l'axe de la conduite. La tige AB traversait deux *stuffing-box* en cuivre adaptés au-dessus et au-dessous du tuyau, et pouvait se mouvoir de manière à faire monter ou baisser le point C pour le placer au centre, au tiers, aux deux tiers du rayon, etc. Pour obtenir ces différentes positions, on descendait le point C en E′, et l'on mesurait la distance JD; on remontait C en E, et l'on mesurait de nouveau la distance JD; la différence entre les deux quantités trouvées donnait le diamètre E′E. En divisant ce diamètre par 6, on obtenait un quotient qu'il suffisait d'ajouter une fois, deux fois, etc. à la première distance, pour savoir à quelle hauteur il fallait placer la tringle D au-dessus du point J pour que le tube C prît l'une des positions indiquées ci-dessus. L'extrémité A du tube en cuivre était seulement fermée par une cheville mobile, afin que l'on eût la possibilité de permettre à l'air de s'échapper, et qu'on fût en mesure de vérifier à chaque instant si l'appareil fonctionnait bien, si le trou d'introduction C n'était pas bouché par des corps légers entraînés par l'eau, ce qui arrivait souvent. Pour que le point C pût bien affleurer la paroi, un petit vide avait été pratiqué à la partie inférieure des *stuffing-box*, en E et E′. Au point B était un robinet d'arrêt; de B en F (pl. IV, fig. 2, 3 et 4) une conduite en plomb de $0^m,01$ de diamètre, et assez flexible pour permettre de faire monter et descendre l'appareil, menait l'eau dans un tube en verre FG de $0^m,03$ environ de diamètre placé sur une échelle graduée.

Dans les expériences sur les conduites de $0^m,50$ et $0^m,188$, le premier manomètre n'était pas placé au même point que l'appareil destiné à mesurer les vitesses, l'un était à $0^m,989$, l'autre à 2 mètres en amont. Cette circonstance obligeait de faire des calculs pour obtenir la charge dans le plan normal à l'appareil. Pour éviter cet inconvénient, on a établi le premier manomètre en R pour les expériences sur les autres conduites. La charge en R était dirigée vers les manomètres à eau précédemment décrits, au moyen de la conduite RIH sur laquelle était branchée la conduite IF', destinée à faire connaître cette même charge dans le tube F'G'. La hauteur de l'eau dans le tube F'G' donnait la pression au point R; le tube FG, la pression, plus la hauteur due à la vitesse. La différence entre les deux nombres accusés exprimait donc la hauteur due à la vitesse. En F et F' étaient ménagés des robinets de décharge pour vider au besoin ou purger d'air les deux manomètres.

C'est au moyen de cet appareil que des expériences ont été faites sur les tuyaux des diamètres suivants :

$0^m,188$	30 expériences.
0 ,2432	25
0 ,2447	20
0 ,297	20
0 ,50	13
TOTAL	108

Le tableau synoptique ci-après donne le résultat de ces expériences.

La première colonne indique la charge par mètre sous laquelle on opérait;

La deuxième, la vitesse moyenne obtenue;

La troisième, la distance du centre du tuyau au point où était placé l'orifice du tube de Pitot;

La quatrième et la cinquième donnent les hauteurs au-dessus du zéro de l'échelle du tube de Pitot et du piézomètre;

La sixième et la septième, la hauteur due à la vitesse, et la vitesse correspondante;

Enfin, la huitième, l'excès de la vitesse au centre sur les vitesses des filets supérieurs et inférieurs.

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux points où était placé le tube de Pitot. (3)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du tube de Pitot. (4)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du manomètre. (5)	EXCÈS de LA HAUTEUR du tube de Pitot sur le manomètre. (6)	VITESSES correspondant à ces hauteurs ou $V = \sqrt{2gh}$. (7)	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience. (8)
CONDUITE DE 0m,188 DE DIAMÈTRE.							
			mèt.			mèt.	mèt.	mèt.
		au-dessus du centre.	0,0637	0,100		0,0334	0,810	0,134
			0,0325	0,108		0,0414	0,901	0,043
mèt. 0,00368	mèt. 0,758	au centre....	0,0000	0,112	mèt. 0,0666	0,0454	0,944	0,043
		au-dessous du centre.	0,0325	0,108		0,0414	0,901	0,134
			0,0637	0,100		0,0334	0,810	
		au-dessus du centre.	0,0637	0,180		0,0761	1,223	0,186
			0,0325	0,196		0,0921	1,345	0,064
0,00805	1,128	au centre....	0,0000	0,205	0,1039	0,1011	1,409	0,064
		au-dessous du centre.	0,0325	0,196		0,0921	1,345	0,186
			0,0637	0,180		0,0761	1,223	
		au-dessus du centre.	0,0637	0,265		0,1218	1,546	0,263
			0,0325	0,296		0,1528	1,732	0,077
0,01340	1,488	au centre....	0,0000	0,310	0,1432	0,1668	1,809	0,077
		au-dessous du centre.	0,0325	0,296		0,1528	1,732	0,263
			0,0637	0,265		0,1218	1,546	
		au-dessus du centre.	0,0637	0,415		0,2100	2,030	0,335
			0,0325	0,464		0,2590	2,255	0,110
0,02250	1,933	au centre....	0,0000	0,490	0,2050	0,2850	2,365	0,110
		au-dessous du centre.	0,0325	0,464		0,2590	2,255	0,369
			0,0637	0,408		0,2030	1,996	

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux points où était placé le tube de Pitot. (3)		HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du tube de Pitot. (4)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du manomètre. (5)	EXCÈS de LA HAUTEUR du tube de Pitot sur le manomètre. (6)	VITESSES correspondant à ces hauteurs ou $V = \sqrt{2gh}$. (7)	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience. (8)
CONDUITE DE 0m,188 DE DIAMÈTRE. (Suite.)								
			mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	mèt.
		au-dessus du centre.	0,0637	0,655		0,3432	2,595	0,420
			0,0325	0,737		0,4252	2,888	0,127
mèt. 0,03810	mèt. 2,506	au centre....	0,0000	0,775	mèt. 0,3118	0,4632	3,015	0,127
		au-dessous du centre.	0,0325	0,737		0,4252	2,888	0,420
			0,0637	0,655		0,3432	2,595	
		au-dessus du centre.	0,0637	1,720		1,0100	4,451	0,761
			0,0325	1,985		1,2750	5,001	0,211
0,10980	4,323	au centre....	0,0000	2,095	0,7100	1,3850	5,212	0,211
		au-dessous du centre.	0,0325	1,985		1,2750	5,001	0,761
			0,0637	1,720		1,0100	4,451	
CONDUITE DE 0m,2432 DE DIAMÈTRE.								
		au-dessus du centre.	0,088	0,076		0,010	0,444	0,116
			0,044	0,080		0,014	0,524	0,036
0,00202	0,452	au centre....	0,000	0,082	0,066	0,016	0,560	0,036
		au-dessous du centre.	0,044	0,080		0,014	0,524	0,140
			0,088	0,075		0,009	0,420	
		au-dessus du centre.	0,088	0,117		0,022	0,657	0,172
			0,044	0,125		0,030	0,767	0,062
0,00473	0,707	au centre....	0,000	0,130	0,095	0,035	0,829	0,062
		au-dessous du centre.	0,044	0,125		0,030	0,767	0,172
			0,088	0,117		0,022	0,657	
		au-dessus du centre.	0,088	0,335		0,117	1,515	0,401
			0,044	0,380		0,162	1,783	0,133
0,02290	1,547	au centre....	0,000	0,405	0,218	0,187	1,916	0,145
		au-dessous du centre.	0,044	0,378		0,160	1,771	0,338
			0,088	0,345		0,127	1,578	

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux points où était placé le tube de Pitot. (3)		HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du tube de Pitot. (4)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du manomètre. (5)	EXCÈS de LA HAUTEUR du tube de Pitot sur le manomètre. (6)	VITESSES correspondant à ces hauteurs ou $V = \sqrt{2gh}$. (7)	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience. (8)
CONDUITE DE 0m,2432 DE DIAMÈTRE. (Suite.)								
			mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	mèt.
		au-dessus du centre.	0,088	0,430		0,162	1,783	0,506
			0,044	0,500		0,232	2,133	0,156
mèt. 0,03200	mèt. 1,833	au centre....	0,000	0,535	mèt. 0,268	0,267	2,289	0,156
		au-dessous du centre.	0,044	0,500		0,232	2,133	0,442
			0,088	0,442		0,174	1,847	
		au-dessus du centre.	0,088	1,515		0,745	3,823	0,937
			0,044	1,770		1,000	4,430	0,330
0,13981	3,833	au centre....	0,000	1,925	0,770	1,155	4,760	0,350
		au-dessous du centre.	0,044	1,760		0,990	4,410	0,770
			0,088	1,580		0,810	3,990	
CONDUITE DE 0m,2447 DE DIAMÈTRE.								
		au-dessus du centre.	0,088	0,090		0,017	0,578	0,108
			0,044	0,095		0,022	0,655	0,031
0,00165	0,537	au centre....	0,000	0,097	0,073	0,024	0,686	0,031
		au-dessous du centre.	0,044	0,095		0,022	0,655	0,108
			0,088	0,090		0,017	0,578	
		au-dessus du centre.	0,088	0,164		0,040	0,886	0,180
			0,044	0,176		0,052	1,010	0,056
0,00498	0,949	au centre....	0,000	0,182	0,124	0,058	1,066	0,056
		au-dessous du centre.	0,044	0,176		0,052	1,010	0,147
			0,088	0,167		0,043	0,919	
		au-dessus du centre.	0,088	0,445		0,175	1,853	0,348
			0,044	0,490		0,220	2,078	0,123
0,02035	1,904	au centre....	0,000	0,517	0,270	0,247	2,201	0,147
		au-dessous du centre.	0,044	0,485		0,215	2,054	0,348
			0,088	0,445		0,175	1,853	

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux points où était placé le tube de Pitot. (3)		HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du tube de Pitot. (4)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du manomètre. (5)	EXCÈS de LA HAUTEUR du tube de Pitot sur le manomètre. (6)	VITESSES correspondant à ces hauteurs ou $V = \sqrt{2gh}$. (7)	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience. (8)
				CONDUITE DE 0m,2447 DE DIAMÈTRE. (Suite.)				
			mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	mèt
		au-dessus du centre.	0,088	1,930		0,970	4,362	0,783
			0,044	2,170		1,210	4,872	0,273
mèt.	mèt.				mèt.			
0,11343	4,497	au centre....	0,000	2,310	0,960	1,350	5,145	0,303
		au-dessous du centre.	0,044	2,155		1,195	4,842	0,752
			0,088	1,945		0,985	4,393	
				CONDUITE DE 0m,297 DE DIAMÈTRE.				
		au-dessus du centre.	0,102	0,064		0,006	0,343	0,077
			0,052	0,066		0,008	0,396	0,024
0,00070	0,355	au centre....	0,000	0,067	0,058	0,009	0,420	0,024
		au-dessous du centre.	0,052	0,066		0,008	0,396	0,077
			0,102	0,064		0,006	0,343	
		au-dessus du centre.	0,102	0,248		0,088	1,314	0,201
			0,052	0,267		0,107	1,449	0,066
0,00617	1,236	au centre....	0,000	0,277	0,160	0,117	1,515	0,059
		au-dessous du centre.	0,052	0,268		0,108	1,456	0,186
			0,102	0,250		0,090	1,329	
		au-dessus du centre.	0,102	0,370		0,160	1,772	0,282
			0,052	0,405		0,195	1,956	0,098
0,01125	1,665	au centre....	0,000	0,425	0,210	0,215	2,054	0,098
		au-dessous du centre.	0,052	0,405		0,195	1,956	0,282
			0,102	0,370		0,160	1,772	
		au-dessus du centre.	0,102	0,620		0,310	2,466	0,370
			0,052	0,685		0,375	2,712	0,124
0,02251	2,365	au centre....	0,000	0,720	0,310	0,410	2,836	0,124
		au-dessous du centre.	0,052	0,685		0,375	2,712	0,350
			0,102	0,625		0,315	2,486	

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux points où était placé le tube de Pitot. (3)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du tube de Pitot. (4)	HAUTEURS AU-DESSUS DU ZÉRO du manomètre. (5)	EXCES de LA HAUTEUR du tube de Pitot sur le manomètre. (6)	VITESSES correspondant à ces hauteurs ou $V = \sqrt{2gh}$. (7)	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience. (8)
			CONDUITE DE $0^m,50$ DE DIAMÈTRE.				
			mèt.		mèt.	mèt.	mèt.
		au-dessus du centre.	0,17	0,255	0,0116	0,4770	0,093
			0,09	0,258	0,0146	0,5352	
mèt.	mèt.			mèt.			0,036
0,00060	0,4752	au centre....	0,00	0,260	0,2134 0,0166	0,5707	
		au-dessus du centre.	0,17	0,536	0,04225	0,910	0,140
			0,09	0,544	0,05025	0,993	
0,00125	0,7951	au centre....	0,00	0,550	0,49375 0,05625	1,050	0,057
		au-dessous du centre.	0,09	0,544	0,05025	0,993	0,057
			0,17	0,536	0,04225	0,910	0,140
		au-dessus du centre.	0,17	0,822	0,0646	1,1257	0,185
			0,09	0,836	0,0786	1,2417	0,069
0,00260	1,1197	au centre....	0,00	0,845	0,7574 0,0876	1,3109	0,077
		au-dessous du centre.	0,09	0,835	0,0776	1,2338	0,202
			0,17	0,820	0,0626	1,1081	

En présence de ce tableau une première réflexion se présente : la 7e colonne offre-t-elle bien les vitesses réelles, et, dans le cas contraire, comment opérer les corrections nécessaires?

Or, quel que soit le coefficient de rectification à adopter, il paraît certain qu'il doit être à peu près le même pour chaque tuyau; l'application de ce coefficient ne détruira donc pas, si elle existe, l'égalité des rapports :

$$\frac{v - v'}{\sqrt{i}}, \quad \frac{v_1 - v'_1}{\sqrt{i'}}, \quad \frac{v_2 - v'_2}{\sqrt{i''}}, \quad \frac{v_3 - v'_3}{\sqrt{i'''}} \ldots\ldots$$

$$\frac{v - v''}{\sqrt{i}}, \quad \frac{v_1 - v''_1}{\sqrt{i'}}, \quad \frac{v_2 - v''_2}{\sqrt{i''}}, \quad \frac{v_3 - v''_3}{\sqrt{i'''}} \ldots\ldots$$

et

$$\frac{V - v'}{r'^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{V - v''}{r''^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{V - v'''}{r'''^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{V - v''''}{r''''^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots$$

Nous pouvons d'abord vérifier si ces relations sont vraies.

Or, nous avons fait ce calcul, que nous ne reproduisons pas ici parce que nous l'effectuerons plus tard pour établir définitivement l'équation cherchée.

De ces calculs préliminaires nous avons conclu l'existence de l'équation :

$$V - v = K_0 r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}$$

(K_0 étant une constante pour un même tuyau). Elle donne

$$r = 0{,}689\ R$$

pour la distance à laquelle le filet de la vitesse moyenne est situé de l'axe du tuyau de rayon R.

Si donc nous connaissions, fournie par l'instrument, la vitesse du filet situé à cette distance du centre, il est évident qu'en la comparant à la vitesse moyenne expérimentale de l'eau dans le tuyau, nous aurions le coefficient de rectification à adopter.

Or, dans les tuyaux soumis aux expériences, c'est-à-dire dans les tuyaux de

$$0^m{,}188, \quad 0^m{,}2432, \quad 0^m{,}2447, \quad 0^m{,}297, \quad 0^m{,}50,$$

des expériences pour déterminer les vitesses ont été faites à des distances du centre égales à

(1) $0^m{,}0637$, $0^m{,}088$, $0^m{,}088$, $0^m{,}102$, $0^m{,}17$,

tandis qu'en prenant les 0,689 des rayons, on aurait obtenu

(2) $0^m{,}0648$, $0^m{,}0838$, $0^m{,}0843$, $0^m{,}102$, $0^m{,}172$.

On voit d'abord qu'il ne peut y avoir qu'une différence très-faible entre les vitesses correspondant aux distances (1) et celles correspondant aux distances (2) qui se rapportent aux filets animés de la vitesse moyenne.

On pourrait s'abstenir de calculer cette différence : nous la déterminerons pourtant, afin de donner plus de certitude aux résultats que nous cherchons.

Nous ferons donc une espèce de règle de fausse position et nous admettrons d'abord que les vitesses trouvées aux distances

$$0^m,0637, \quad 0^m,088, \quad 0^m,088, \quad 0^m,102, \quad 0^m,17$$

soient les vitesses correspondant aux filets moyens.

En conséquence, nous adopterons pour coefficient de correction le rapport existant entre les vitesses moyennes expérimentales et celles précitées, puis nous appliquerons ce coefficient à toutes les vitesses.

Nous aurons ainsi les éléments nécessaires pour déterminer, dans chaque tuyau, la constante de l'équation de la courbe $V - v = K_0 r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}$.

Cette détermination étant effectuée par le procédé que nous décrirons plus tard à l'occasion des calculs définitifs, nous cherchons, au moyen des équations des courbes provisoirement établies, quelles vitesses correspondent aux distances accouplées:

$$\left\{\begin{matrix} 0^m,0648 \\ 0\ ,0637 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 0^m,0838 \\ 0\ ,088 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 0^m,0843 \\ 0\ ,088 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 0^m,102 \\ 0\ ,102 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} 0^m,172 \\ 0\ ,17 \end{matrix}\right\}$$

dans les tuyaux de $0^m,188$, $0^m,2432$, $0^m,2447$, $0^m,297$, $0^m,50$.

Nous prendrons les différences de ces vitesses, lesquelles seront évidemment presque identiques à celles que l'on obtiendrait en opérant sur les courbes définitives.

Il ne nous restera plus qu'à ajouter, avec leurs signes, ces différences aux vitesses trouvées aux distances expérimentales (1), lesquelles sont, comme on vient de le voir,

$$0^m,0637, \quad 0^m,088, \quad 0^m,088, \quad 0^m,102, \quad 0^m,17.$$

Enfin, les rapports entre les résultats des additions précitées et les vitesses moyennes de l'eau dans les tuyaux donneront les coefficients de rectification cherchés.

Les résultats de ces calculs sont donnés dans le tableau suivant.

DIAMÈTRES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	VITESSES DÉDUITES de l'appareil. (3)	VALEURS, DANS LES COURBES PROVISOIRES, des V — v correspondants aux distances (1). (4)	VALEURS, DANS LES COURBES PROVISOIRES, des V — v correspondants aux distances (2). (5)	DIFFÉRENCES[1] entre les chiffres posés dans les colonnes (5) et (4). (6)	COLONNE (6) ajoutée avec son signe à la vitesse de la colonne (3). (7)	RAPPORT entre les colonnes (2) et (7). (8)
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.		mèt.	
	0,758	0,810	0,123	0,125	— 0,002	0,808	0,938
	1,128	1,223	0,181	0,185	— 0,004	1,219	0,925
mèt. 0,188	1,488	1,546	0,234	0,239	— 0,005	1,541	0,966
	1,933	2,013	0,303	0,310	— 0,007	2,006	0,964
	2,506	2,595	0,394	0,403	— 0,009	2,586	0,969
	4,323	4,451	0,669	0,685	— 0,016	4,435	0,975
	0,452	0,432	0,111	0,103	+ 0,008	0,440	1,027
	0,707	0,657	0,170	0,158	+ 0,012	0,669	1,057
0,2432	1,547	1,547	0,374	0,348	+ 0,026	1,573	0,983
	1,833	1,815	0,442	0,411	+ 0,031	1,846	0,993
	3,833	3,907	0,925	0,859	+ 0,066	3,973	0,965
	0,537	0,578	0,095	0,088	+ 0,007	0,585	0,918
0,2447	0,949	0,903	0,166	0,152	+ 0,014	0,917	1,035
	1,904	1,853	0,335	0,308	+ 0,027	1,880	1,013
	4,497	4,378	0,791	0,728	+ 0,063	4,441	1,013
	0,355	0,343	0,065	0,065	+ 0,000	0,343	1,035
0,297	1,236	1,322	0,192	0,193	+ 0,000	1,322	0,936
	1,665	1,772	0,260	0,261	+ 0,000	1,772	0,940
	2,365	2,476	0,368	0,368	+ 0,000	2,476	0,955
	0,4752	0,477	0,094	0,096	— 0,002	0,475	1,000
0,50	0,7951	0,910	0,136	0,138	— 0,002	0,908	0,875
	1,1197	1,117	0,196	0,200	— 0,004	1,113	1,006

Au moyen des coefficients de rectification de la colonne (8) du tableau ci-dessus, il devient facile d'obtenir les vitesses réelles des filets fluides aux points où l'instrument a été placé, et par suite les différences de vitesse du filet central et des filets supérieurs et inférieurs.

Les tableaux ci-après présentent les résultats de ces recherches.

[1] Ces différences sont évidemment égales à celles existant entre les vitesses des filets placés aux distances (2) et (1), distances précédemment indiquées.

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.		VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
			CONDUITE DE 0m,188 DE DIAMÈTRE.				
		mèt.	mèt.		mèt.	met.	
	au-dessus du centre.	*0,0648*	*0,808*		*0,758*		
		0,0637	0,810		0,760	*0,127*	On a écrit en *chiffres italiques* les distances et les vitesses correspondant aux filets qui doivent être animés de la vitesse moyenne, suivant la formule.
		0,0325	0,901		0,845	0,125	
mèt.				mèt		0,040	
0,758	au centre....	0,0000	0,944	0,938	0,885		
	au-dessous du centre.	0,0325	0,901		0,845	0,040	
		0,0637	0,810		0,760	0,125	
		0,0648	*0,808*		*0,758*	*0,127*	
	au-dessus du centre.	*0,0648*	*1,219*		*1,128*		
		0,0637	1,223		1,131	*0,175*	
		0,0325	1,345		1,244	0,172	
1,128	au centre....	0,0000	1,409	0,925	1,303	0,059	
	au-dessous du centre.	0,0325	1,345		1,244	0,059	
		0,0637	1,223		1,131	0,172	
		0,0648	*1,219*		*1,128*	*0,175*	
	au-dessus du centre.	*0,0648*	*1,541*		*1,488*		
		0,0637	1,546		1,493	*0,259*	
		0,0325	1,732		1,673	0,254	
1,488	au centre....	0,0000	1,809	0,966	1,747	0,074	
	au-dessous du centre.	0,0325	1,732		1,673	0,074	
		0,0637	1,546		1,493	0,254	
		0,0648	*1,541*		*1,488*	*0,259*	
	au-dessus du centre.	*0,0648*	*2,006*		*1,933*		
		0,0637	2,030		1,957	*0,347*	
		0,0325	2,255		2,174	0,323	
1,933	au centre....	0,0000	2,365	0,964	2,280	0,106	
	au-dessous du centre.	0,0325	2,255		2,174	0,106	
		0,0637	1,996		1,924	0,356	
		0,0648	*2,006*		*1,933*	*0,347*	

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.	VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
		CONDUITE DE 0m,188 DE DIAMÈTRE. (Suite.)				
		mèt.		mèt.	trèt.	
	au-dessus du centre. 0,0648	2,586		2,506	0,416	
	au-dessus du centre. 0,0637	2,595		2,515	0,407	
	au-dessus du centre. 0,0325	2,888		2,798	0,124	
mèt. 2,506	au centre.... 0,0000	3,015	mèt. 0,969	2,922	0,124	
	au-dessous du centre. 0,0325	2,888		2,798	0,407	
	au-dessous du centre. 0,0637	2,595		2,515	0,416	
	au-dessous du centre. 0,0648	2,586		2,506		
	au-dessus du centre. 0,0648	4,435		4,323	0,759	
	au-dessus du centre. 0,0637	4,451		4,340	0,742	
	au-dessus du centre. 0,0325	5,001		4,876	0,206	
4,323	au centre.... 0,0000	5,212	0,975	5,082	0,206	
	au-dessous du centre. 0,0325	5,001		4,876	0,742	
	au-dessous du centre. 0,0637	4,451		4,340	0,759	
	au-dessous du centre. 0,0648	4,435		4,323		
		CONDUITE DE 0m,2432 DE DIAMÈTRE.				
	au-dessus du centre. 0,088	0,444		0,456	0,119	
	au-dessus du centre. 0,0838	0,440		0,452	0,123	
	au-dessus du centre. 0,044	0,524		0,538	0,037	
0,452	au centre.... 0,000	0,560	1,027	0,575	0,037	
	au-dessous du centre. 0,044	0,524		0,538	0,123	
	au-dessous du centre. 0,0838	0,440		0,452	0,114	
	au-dessous du centre. 0,088	0,420		0,431		
	au-dessus du centre. 0,088	0,657		0,694	0,132	
	au-dessus du centre. 0,0838	0,669		0,707	0,169	
	au-dessus du centre. 0,044	0,767		0,811	0,065	
0,707	au centre.... 0,000	0,829	1,057	0,876	0,065	
	au-dessous du centre. 0,044	0,767		0,811	0,169	
	au-dessous du centre. 0,0838	0,669		0,707	0,132	
	au-dessous du centre. 0,088	0,657		0,694		

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.		VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
			CONDUITE DE 0m,2432 DE DIAMÈTRE. (Suite.)				
		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
	au-dessus du centre.	0,088	1,515		1,489	0,394	
		0,0838	*1,573*		*1,547*	*0,336*	
		0,044	1,783		1,753	0,130	
mèt. 1,547	au centre....	0,000	1,916	mèt. 0,983	1,883	0,142	
	au-dessous du centre.	0,044	1,771		1,741	*0,336*	
		0,0838	*1,573*		*1,547*	0,332	
		0,088	1,578		1,551		
	au-dessus du centre.	0,088	1,783		1,771	0,502	
		0,0838	*1,846*		*1,833*	*0,440*	
		0,044	2,133		2,118	0,155	
1,833	au centre....	0,000	2,289	0,993	2,273	0,155	
	au-dessous du centre.	0,044	2,133		2,118	*0,440*	
		0,0838	*1,846*		*1,833*	0,439	
		0,088	1,847		1,834		
	au-dessus du centre.	0,088	3,823		3,689	0,904	
		0,0838	*3,973*		*3,833*	*0,760*	
		0,044	4,430		4,275	0,318	
3,833	au centre....	0,000	4,760	0,965	4,593	0,337	
	au-dessous du centre.	0,044	4,410		4,256	*0,760*	
		0,0838	*3,973*		*3,833*	0,743	
		0,088	3,990		3,850		
			CONDUITE DE 0m,2447 DE DIAMÈTRE.				
	au-dessus du centre.	0,088	0,578		0,531	0,099	
		0,0843	*0,585*		*0,537*	*0,093*	
		0,044	0,655		0,601	0,029	
0,537	au centre....	0,000	0,686	0,918	0,630	0,029	
	au-dessous du centre.	0,044	0,655		0,601	*0,093*	
		0,0843	*0,585*		*0,537*	0,099	
		0,088	0,578		0,531		

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.		VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
CONDUITE DE 0m,2447 DE DIAMÈTRE. (Suite.)							
		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
	au-dessus du centre.	0,088	0,886		0,917	0,186	
		0,0843	*0,917*		*0,949*	*0,154*	
		0,044	1,010	mèt.	1,045	0,058	
mèt. 0,949	au centre....	0,000	1,066	1,035	1,103	0,058	
	au-dessous du centre.	0,044	1,010		1,045	*0,154*	
		0,0843	*0,917*		*0,949*	0,152	
		0,088	0,919		0,951		
	au-dessus du centre.	0,088	1,853		1,877	0,353	
		0,0843	*1,880*		*1,904*	*0,326*	
		0,044	2,078		2,105	0,125	
1,904	au centre....	0,000	2,201	1,013	2,230	0,149	
	au-dessous du centre.	0,044	2,054		2,081	*0,326*	
		0,0843	*1,880*		*1,904*	0,353	
		0,088	1,853		1,877		
	au-dessus du centre.	0,088	4,362		4,419	0,793	
		0,0843	*4,441*		*4,497*	*0,715*	
		0,044	4,872		4,935	0,277	
5,197	au centre....	0,000	5,145	1,013	5,212	0,307	
	au-dessous du centre.	0,044	4,842		4,905	*0,715*	
		0,0843	*4,441*		*4,497*	0,762	
		0,088	4,393		4,450		
CONDUITE DE 0m,297 DE DIAMÈTRE.							
	au-dessus du centre.	*0,1023*	*0,343*		*0,355*	*0,080*	
		0,102	0,343		0,355	0,080	
		0,052	0,396		0,410	0,025	
0,355	au centre....	0,000	0,420	1,035	0,435	0,025	
	au-dessous du centre.	0,052	0,396		0,410	0,080	
		0,102	0,343		0,355	*0,080*	
		0,1023	*0,343*		*0,355*		

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.	VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
		mèt.		mèt.	mèt.	
		0,1023		*1,236*		
	au-dessus du centre.	0,102		1,230	*0,182*	
		0,052		1,356	0,188	
mét.			mét.		0,062	
1,236	au centre....	0,000	0,936	1,418	0,055	
		0,052		1,363	0,174	
	au-dessous du centre.	0,102		1,244	*0,182*	
		0,1023		*1,236*		
		0,1023		*1,665*		
	au-dessus du centre.	0,102		1,666	*0,266*	
		0,052		1,839	0,265	
					0,092	
1,665	au centre....	0,000	0,940	1,931	0,092	
		0,052		1,839	0,265	
	au-dessous du centre.	0,102		1,666	*0,266*	
		0,1023		*1,665*		
		0,1023		*2,365*		
	au-dessus du centre.	0,102		2,355	*0,343*	
		0,052		2,590	0,353	
					0,118	
2,365	au centre....	0,000	0,955	2,708	0,118	
		0,052		2,590	0,334	
	au-dessous du centre.	0,102		2,374	*0,343*	
		0,1023		*2,365*		

CONDUITE DE 0m 50 DE DIAMÈTRE.

		0,1723	*0,475*		*0,475*	
	au-dessus du centre.	0,17	0,477		0,477	*0,096*
		0,09	0,535		0,535	0,094
0,4752				1,000		0,036
	au centre....	0,00	0,571		0,571	

VITESSES MOYENNES d'après l'expérience.	DISTANCES DU CENTRE aux points où était placé le tube de Pitot.		VITESSES correspondant aux points où était placé l'appareil de Pitot.	COEFFICIENT de correction à appliquer.	VITESSES RECTIFIÉES.	EXCÈS DE LA VITESSE au centre sur les vitesses inférieures et supérieures d'après l'expérience.	OBSERVATIONS.
			CONDUITE DE 0m,50 DE DIAMÈTRE. (Suite.)				
		mèt.	mèt.		mèt.	mèt.	
	au-dessus du centre.	*0,1723*	*0,908*		*0,795*		
		0,17	0,910		0,796	*0,124*	
		0,09	0,993		0,869	0,123	
mèt.				mèt.		0,050	
0,7951	au centre....	0,00	1,050	0,875	0,919	0,050	
	au-dessous du centre.	0,09	0,993		0,869	0,123	
		0,17	0,910		0,796	*0,124*	
		0,1723	*0,908*		*0,795*		
	au-dessus du centre.	*0,1723*	*1,113*		*1,1197*	*0,199*	
		0,17	1,126		1,133	0,186	
		0,09	1,242		1,249	0,070	
1,1197	au centre....	0,00	1,311	1,006	1,319	0,078	
	au-dessous du centre.	0,09	1,234		1,241	0,204	
		0,17	1,108		1,115	*0,199*	
		0,1723	*1,113*		*1,1197*		

Il nous reste maintenant à reconnaître, à l'aide de ces données, si, comme nous l'avons annoncé, les rapports

$$\frac{v-v'}{\sqrt{i}},\quad \frac{v_1-v'_1}{\sqrt{i'}},\quad \frac{v_2-v'_2}{\sqrt{i'}},\quad \frac{v_3-v'_3}{\sqrt{i'''}}\ldots\ldots$$

$$\frac{v-v''}{\sqrt{i}},\quad \frac{v_1-v''_1}{\sqrt{i'}},\quad \frac{v_2-v''_2}{\sqrt{i''}},\quad \frac{v_3-v''_3}{\sqrt{i''''}}\ldots\ldots$$

ainsi que les suivants,

$$\frac{V-v'}{r'^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{V-v''}{r''^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{V-v'''}{r'''^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{V-v''}{r''^{\frac{3}{2}}}\ldots\ldots$$

sont constants dans un même tuyau.

Le tableau ci-après donne le calcul de ces rapports.

DIAMÈTRES.	PENTES.	DIFFÉRENCES ENTRE LES VITESSES au centre et celles prises à		RACINE CARRÉE des pentes.	RAPPORTS ENTRE LES COLONNES		RAPPORTS ENTRE LES COLONNES (3) et (4) et les distances	
		r de l'axe [1].	r' de l'axe [1].		(3) et (5).	(4) et (5).	r élevée à la puissance $\frac{3}{2}$.	r' élevée à la puissance $\frac{3}{2}$.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		mèt. 0,0325	mèt. 0,0637				mèt. 0,0325	mèt. 0,0637
	mèt. 0,00368	0,040	0,125	0,060,633	0,659	2,061	6,827	7,775
	0,00805	0,059	0,172	0,089,72	0,658	1,917	10,070	10,699
mèt. 0,188	0,01340	0,074	0,254	0,115,75	0,639	2,194	12,630	15,799
	0,0225	0,106	0,3395	0,15	0,707	2,263	18,092	21,117
	0,0381	0,124	0,407	0,195,19	0,635	2,085	21,164	25,316
	0,1098	0,206	0,742	0,331,36	0,622	2,239	35,160	46,153
		0,044	0,088				0,044	0,088
	0,00202	0,037	0,1315	0,044,94	0,823	2,926	4,009	5,037
	0,00473	0,065	0,182	0,068,77	0,945	2,647	7,042	6,972
0,2432	0,0229	0,136	0,363	0,151,32	0,899	2,399	14,735	13,905
	0,032	0,155	0,4705	0,178,88	0,867	2,630	16,793	18,023
	0,13981	0,3275	0,8235	0,373,91	0,876	2,202	35,482	31,546
		0,044	0,088				0,044	0,088
	0,00165	0,029	0,099	0,040,621	0,714	2,437	3,142	3,792
	0,00498	0,058	0,169	0,070,569	0,822	2,395	6,284	6,474
0,2447	0,02035	0,137	0,353	0,142,653	0,960	2,475	14,843	13,522
	0,11343	0,292	0,7775	0,336,497	0,867	2,309	31,636	29,784
		0,052	0,102				0,052	0,102
	0,0007	0,025	0,080	0,026,46	0,945	3,023	2,108	2,456
0,297	0,00617	0,0585	0,181	0,078,55	0,745	2,304	4,434	5,556
	0,01125	0,092	0,265	0,106,07	0,867	2,498	7,759	8,135
	0,02251	0,118	0,3435	0,150,03	0,787	2,290	9,952	10,545
		0,09	0,17				0,09	0,17
	0,0006	0,036	0,094	0,024,5	1,469	3,837	1,333	1,341
0,50	0,00125	0,050	0,123	0,035,36	1,414	3,479	1,852	1,755
	0,0026	0,074	0,195	0,050,99	1,451	3,824	2,741	2,782

[1] Les valeurs numériques successives de r et de r' sont placées en tête des données relatives à chaque tuyau.

En examinant, pour chaque tuyau, les chiffres des colonnes (6) et (7), on voit que les rapports des différences des vitesses aux racines carrées des pentes peuvent être considérés comme constants.

Les quelques différences qui existent ne peuvent être attribuées qu'à la difficulté d'obtenir plus de précision dans les expériences.

La moindre erreur, en effet, dans l'indication des instruments qui donnent les vitesses entières, doit influer d'une manière très-sensible sur les différences des vitesses, si l'erreur ne porte pas à la fois sur les deux vitesses.

En examinant ensuite pour chaque tuyau les colonnes (8) et (9), et comparant entre eux les chiffres correspondants dans chaque colonne, on voit encore qu'il est permis de les considérer comme égaux.

Le tuyau de 0,188 présente seul des différences un peu notables, différences dont l'explication se trouve dans l'observation précédente.

Il est donc permis de poser pour un même tuyau la formule

$$V - v = K_0 r^{\frac{3}{2}} \sqrt{i}.$$

Or, K_0 pourra évidemment être déterminé par les trois conditions :

$$K_0 = \frac{\Sigma \frac{V - v}{\sqrt{i}}}{n r^{\frac{3}{2}}},$$

$$K_0 = \frac{\Sigma \frac{V - v_0}{\sqrt{i}}}{n r'^{\frac{3}{2}}},$$

$$K_0 = \frac{\Sigma \left(\frac{V - v}{r^{\frac{3}{2}}} \right) + \Sigma \left(\frac{V - v_0}{r'^{\frac{3}{2}}} \right)}{2 \Sigma \sqrt{i}},$$

dans lesquelles $V - v$ et $V - v_0$ représentent les différences de vitesses pour les distances r et r', n le nombre des expériences.

La moyenne de ces trois valeurs donnera pour chaque tuyau la constante cherchée.

DIAMÈTRES.	$K_0 = \frac{\Sigma \frac{V - v}{\sqrt{i}}}{n r^{\frac{3}{2}}}$	$K_0 = \frac{\Sigma \frac{V - v_0}{\sqrt{i}}}{n r'^{\frac{3}{2}}}$	$K_0 = \frac{\Sigma \left(\frac{V - v}{r^{\frac{3}{2}}}\right) + \Sigma \left(\frac{V - v_0}{r'^{\frac{3}{2}}}\right)}{2 \Sigma \sqrt{i}}$	VALEURS MOYENNES de K_0.
mèt.				
0,188	$K_0 = \frac{3,920}{6 \times 0,005,859} = 112,00$	$K_0 = \frac{12,759}{6 \times 0,0161} = 131,54$	$K_0 = \frac{103,943 + 126,859}{2 \times 0,942,863} = 122,41$	121,98
0,2432	$K_0 = \frac{4,410}{5 \times 0,009,23} = 95,87$	$K_0 = \frac{12,804}{5 \times 0,0261} = 97,74$	$K_0 = \frac{78,061 + 75,483}{2 \times 0,818} = 93,85$	95,82
0,2447	$K_0 = \frac{3,363}{4 \times 0,009,23} = 90,89$	$K_0 = \frac{9,616}{4 \times 0,0261} = 92,46$	$K_0 = \frac{55,905 + 53,572}{2 \times 0,5905} = 92,73$	92,03
0,297	$K_0 = \frac{3,344}{4 \times 0,118,857} = 71,15$	$K_0 = \frac{10,115}{4 \times 0,032,576} = 77,81$	$K_0 = \frac{24,253 + 26,692}{2 \times 0,361} = 70,56$	73,17
0,50	$K_0 = \frac{4,334}{3 \times 0,027} = 53,506$	$K_0 = \frac{11,140}{3 \times 0,070} = 53,05$	$K_0 = \frac{5,926 + 5,878}{2 \times 0,11085} = 53,7$	53,24

On voit donc que pour chaque tuyau K_0 devient :

INDICATION DES TUYAUX. — Diamètres.	VALEURS MOYENNES de K_0.	VALEURS de $K_0 \times R$ ou K.	OBSERVATIONS.
mèt.			
0,188	121,98	11,466	
0,2432	95,82	11,652	
0,2447	92,03	11,259	
0,297	73,17	10,866	
0,50	53,24	13,310	
	Moyenne générale.....	$\frac{58,553}{5} = 11,710$	

On voit de plus par la 3e colonne que les valeurs de K_0, multipliées par le rayon de chaque tuyau correspondant, donnent des chiffres sensiblement constants.

On peut donc poser l'équation

$$V - v = K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{i}$$

déjà discutée au commencement de ce chapitre.

Mais j'ai cru devoir, conformément à la manière dont j'ai déjà opéré dans les expériences précédentes, déterminer la valeur de la constante K par la méthode des moindres carrés.

Soit l'expression

$$z = K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{y},$$

dans laquelle z est égal à la différence des vitesses correspondant aux rayons r, y représente les pentes, et R le rayon du tuyau.

Les données correspondantes de la question seront désignées ainsi qu'il suit :

Différences de vitesse des filets.	Distances de ces filets au centre du tuyau.	Pentes.
z'	r'	y'
z''	r''	
z'''	r'	y''
z^{iv}	r''	
z^{v}	r'	y'''
z^{vi}	r''	
z^{vii}	r'	y^{iv}
z^{viii}	r''	
z^{ix}	r'	y^{v}
z^{x}	r''	

On aura pour le rapport de l'erreur à l'ordonnée

$$\frac{z - K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{y}}{z}.$$

d'où pour la condition à remplir

$$d\,\Sigma\left(1-\frac{K}{R}\,r^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{y}}{z}\right)^{2}=0,$$

d'où

$$\Sigma\left(1-\frac{K}{R}\,r^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{y}}{z}\right)\frac{1}{R}\,r^{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{y}}{z}=0,$$

laquelle, décomposée dans ses éléments déduits des données de l'expérience, donne :

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(1-\frac{K}{R}r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'}}{z'}\right)\left(r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'}}{z'}\right)\right]+\left[\left(1-\frac{K}{R}r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y''}}{z'''}\right)\left(r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y''}}{z'''}\right)\right]\\&\qquad+\left[\left(1-\frac{K}{R}r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'''}}{z^{v}}\right)\left(r'^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'''}}{z^{v}}\right)\right]+\ldots\\&\left[\left(1-\frac{K}{R}r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'}}{z''}\right)\left(r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'}}{z''}\right)\right]+\left[\left(1-\frac{K}{R}r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y''}}{z^{iv}}\right)\left(r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y''}}{z^{iv}}\right)\right]\\&\qquad+\left[\left(1-\frac{K}{R}r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'''}}{z^{vi}}\right)\left(r''^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{y'''}}{z^{vi}}\right)\right]+\ldots\end{aligned}\right\}=0$$

d'où

$$\begin{aligned}&\sqrt{y'}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z'}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z''}\right)+\sqrt{y''}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z'''}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z^{iv}}\right)+\sqrt{y'''}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z^{v}}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z^{vi}}\right)+\ldots\\&=\frac{K}{R}\left[\left(\frac{r'^{3}}{z'^{2}}+\frac{r''^{3}}{z''^{2}}\right)y'+\left(\frac{r'^{3}}{z'''^{2}}+\frac{r''^{3}}{z^{iv2}}\right)y''+\left(\frac{r'^{3}}{z^{v2}}+\frac{r''^{3}}{z^{vi2}}\right)y'''+\ldots\right],\end{aligned}$$

d'où, enfin,

$$\frac{K}{R}=\frac{\sqrt{y'}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z'}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z''}\right)+\sqrt{y''}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z'''}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z^{iv}}\right)+\sqrt{y'''}\left(\frac{r'^{\frac{3}{2}}}{z^{v}}+\frac{r''^{\frac{3}{2}}}{z^{vi}}\right)+\ldots}{y'\left(\frac{r'^{3}}{z'^{2}}+\frac{r''^{3}}{z''^{3}}\right)+y''\left(\frac{r'^{3}}{z'''^{2}}+\frac{r''^{3}}{z^{iv2}}\right)+y'''\left(\frac{r'^{3}}{z^{v2}}+\frac{r''^{3}}{z^{vi2}}\right)+\ldots}$$

Dans les substitutions on mettra à la place des z', z'', z''', etc. les moyennes entre les valeurs trouvées au-dessus et au-dessous du centre.

DIAMETRES.	VALEURS de $\sqrt{\gamma'}\left(\frac{r'^{\frac{1}{2}}}{z'}+\frac{r''^{\frac{1}{2}}}{z''}\right)+\ldots$	VALEURS de $\gamma'\left(\frac{r'^{3}}{z'^{2}}+\frac{r''^{3}}{z''^{2}}\right)+\ldots$	VALEURS de K.
mèt. 0,188	0,016,571,734	0,000,137,859,675	11,253
	0,017,264,068	0,000,149,159,620	
	0,016,442,252	0,000,136,800,749	
	0,015,394,709	0,000,119,197,973	
	0,017,003,083	0,000,145,816,663	
	0,016,618,978	0,000,140,079,363	
	0,099,294,824	0,000,828,914,043	
0,2432	0,020,899,836	0,000,219,642,581	11,654
	0,019,560,348	0,000,191,338,142	
	0,020,952,202	0,000,218,385,793	
	0,021,297,709	0,000,226,779,805	
	0,022,369,892	0,000,240,287,922	
	0,105,079,990	0,001,096,433,943	
0,2447	0,024,770,845	0,000,312,711,872	10,869
	0,020,368,872	0,000,224,057,504	
	0,020,191,102	0,000,204,279,558	
	0,021,986,559	0,000,241,855,718	
	0,087,317,378	0,000,982,904,652	
0,297	0,023,446,040	0,000,276,475,904	10,689
	0,030,074,579	0,000,453,100,219	
	0,026,687,584	0,000,356,305,172	
	0,029,643,886	0,000,439,525,320	
	0,109,852,089	0,001,525,406,615	
0,50	0,036,840,160	0,000,678,325	13,224
	0,039,374,512	0,000,775,577	
	0,037,106,883	0,000,688,547	
	0,113,321,555	0,002,142,449	

Nous pouvons maintenant comparer les différences existant entre les éléments déduits de l'expérience et de la courbe calculée.

Cette comparaison s'effectuera au moyen des colonnes (4) et (5) du tableau suivant : on remarquera combien sont légères les différences obtenues.

Les colonnes (8), (9) et (10) donnent les vitesses pour les filets central, moyen et à la paroi.

PENTES.	VITESSES MOYENNES.	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux filets dont la vitesse a été mesurée.	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant l'expérience.	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant la formule $V-v=K\frac{i^{\frac{1}{2}}}{R}\sqrt{i}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse moyenne $V-v=K\frac{0,689}{i^{\frac{1}{2}}}\sqrt{Ri}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse à la paroi ou flèche de la courbe $V-v=K\sqrt{R}\sqrt{i}$.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet central.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet moyen.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet à la paroi.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
			CONDUITE DE $0^m,188$.						
			mèt.	mèt.	mèt.				
		au-dessus du centre.	0,0637	0,125	0,117				
mèt.	mèt.	au-dessus du centre.	0,0325	0,040	0,043	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00368	0,758	au centre..	0,0000			0,120	0,209	0,878	0,758	0,669
		au-dessous du centre.	0,0325	0,040	0,043					
			0,0637	0,125	0,117					
		au-dessus du centre.	0,0637	0,172	0,173					
			0,0325	0,059	0,063					
0,00805	1,128	au centre..	0,0000			0,177	0,309	1,305	1,128	0,996
		au-dessous du centre.	0,0325	0,059	0,063					
			0,0637	0,172	0,173					
		au-dessus du centre.	0,0637	0,254	0,223					
			0,0325	0,074	0,081					
0,01340	1,488	au centre..	0,0000			0,228	0,399	1,716	1,488	1,317
		au-dessous du centre.	0,0325	0,074	0,081					
			0,0637	0,254	0,223					
		au-dessus du centre.	0,0637	0,0323	0,289					
			0,0325	0,106	0,105					
0,02250	1,933	au centre..	0,0000			0,296	0,517	2,229	1,933	1,712
		au-dessous du centre.	0,0325	0,106	0,105					
			0,0637	0,356	0,289					

PENTES.	VITESSES MOYENNES.	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux filets dont la vitesse a été mesurée.		EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant l'expérience.	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant la formule $V - v = K\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse moyenne $V - v = K\,0{,}68\frac{3}{2}\sqrt{Ri}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse à la paroi ou flèche de la courbe $V - v = K\sqrt{Ri}$.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet central.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet moyen.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet à la paroi.
(1)	(2)	(3)		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				CONDUITE DE 0m,188. (Suite.)						
			met.	met.	met.					
		au-dessus du centre.	0,0637	0,407	0,376					
			0,0325	0,124	0,137					
met	met.					met.	met.	met.	met.	met.
0,03810	2,506	au centre..	0,0000			0,385	0,673	2,891	2,506	2,218
		au-dessous du centre.	0,0325	0,124	0,137					
			0,0637	0,407	0,376					
		au-dessus du centre.	0,0637	0,742	0,638					
			0,0325	0,206	0,233					
0,10980	4,323	au centre..	0,0000			0,653	1,143	4,976	4,323	3,833
		au-dessous du centre.	0,0325	0,206	0,233					
			0,0637	0,742	0,638					
				CONDUITE DE 0m,2432.						
		au-dessus du centre.	0,088	0,119	0,112					
			0,044	0,037	0,040					
0,00202	0,452	au centre..	0,000			0,104	0,183	0,556	0,452	0,373
		au-dessous du centre.	0,044	0,037	0,040					
			0,088	0,119	0,112					
		au-dessus du centre.	0,088	0,182	0,172					
			0,044	0,065	0,061					
0,00473	0,707	au centre..	0,000			0,160	0,279	0,867	0,707	0,588
		au-dessous du centre.	0,044	0,065	0,061					
			0,088	0,182	0,172					
		au-dessus du centre.	0,088	0,394	0,379					
			0,044	0,130	0,134					
0,02290	1,547	au centre..	0,000			0,352	0,615	1,899	1,547	1,284
		au-dessous du centre.	0,044	0,142	0,134					
			0,088	0,332	0,379					

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux filets dont la vitesse a été mesurée. (3)	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant l'expérience. (4)	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant la formule $V-v=K\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i}$. (5)	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse moyenne $V-v=K\frac{r^{\frac{3}{2}}}{0,689}\sqrt{Ri}$. (6)	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse à la paroi ou flèche de la courbe $V-v=K\sqrt{R}\sqrt{i}$. (7)	VITESSES déduites de la courbe pour le filet central. (8)	moyen. (9)	à la paroi. (10)
			mèt.	mèt.	mèt.					
		au-dessus du centre.	0,088	0,502	0,448					
			0,044	0,155	0,158					
mèt.	mèt.					mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,03200	1,833	au centre..	0,000			0,416	0,727	2,249	1,833	1,522
		au-dessous du centre.	0,044	0,155	0,158					
			0,088	0,439	0,448					
		au-dessus du centre.	0,088	0,904	0,936					
			0,044	0,318	0,331					
0,13981	3,833	au centre..	0,000			0.869	1,520	4,702	3,833	3,182
		au-dessous du centre.	0,044	0,337	0,331					
			0,088	0,743	0,936					
		CONDUITE DE 0m,2447.								
		au-dessus du centre.	0,088	0,099	0,094					
			0,044	0,029	0,033					
0,00165	0,537	au centre..	0,000			0,088	0,154	0,625	0,537	0,471
		au-dessous du centre.	0,044	0,029	0,033					
			0,088	0,099	0,094					
		au-dessus du centre.	0,088	0,186	0,164					
			0,044	0,058	0,058					
0,00498	0,949	au centre..	0,000			0,153	0,268	1,102	0,949	0,834
		au-dessous du centre.	0,044	0,058	0,058					
			0,088	0,152	0,164					
		au-dessus du centre.	0,088	0,353	0,331					
			0,044	0,125	0,117					
0,02035	1,904	au centre..	0,000			0,310	0,542	2,214	1,904	1,672
		au-dessous du centre.	0,044	0,149	0,117					
			0,088	0,353	0,331					

PENTES.	VITESSES MOYENNES.	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux filets dont la vitesse a été mesurée.		EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant l'expérience.	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant la formule $V - v = K\frac{r^2}{R}\sqrt{Ri}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse moyenne $V - v = K\,0{,}68\,g\frac{1}{R}\sqrt{Ri}$.	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse à la paroi ou flèche de la courbe $V - v = K\sqrt{R}\sqrt{i}$.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet central.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet moyen.	VITESSES déduites de la courbe pour le filet à la paroi.
(1)	(2)	(3)		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				CONDUITE DE 0m,2447. (Suite.)						
			mèt.	mèt.	mèt.					
		au-dessus	0,088	0,793	0,781					
		du centre.	0,044	0,277	0,276					
mèt.	mèt.					mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,11343	4,497	au centre..	0,000			0,733	1,280	5,230	4,497	3,950
		au-dessous	0,044	0,307	0,276					
		du centre.	0,088	0,702	0,781					
			CONDUITE DE 0m,297.							
		au-dessus	0,102	0,080	0,062					
		du centre.	0,052	0,025	0,023					
0,00070	0,355	au centre..	0,000			0,062	0,109	0,417	0,355	0,308
		au-dessous	0,052	0,025	0,023					
		du centre.	0,102	0,080	0,062					
		au-dessus	0,102	0,188	0,184					
		du centre.	0,052	0,062	0,067					
0,00617	1,236	au centre..	0,000			0,185	0,324	1,421	1,236	1,097
		au-dessous	0,052	0,055	0,067					
		du centre.	0,102	0,174	0,184					
		au-dessus	0,102	0,265	0,249					
		du centre.	0,052	0,092	0,091					
0,01125	1,665	au centre..	0,000			0,250	0,437	1,915	1,665	1,478
		au-dessous	0,052	0,092	0,091					
		du centre.	0,102	0,265	0,249					
		au-dessus	0,102	0,353	0,352					
		du centre.	0,052	0,118	0,128					
0,02251	2,365	au centre..	0,000			0,353	0,618	2,718	2,365	2,100
		au-dessous	0,052	0,118	0,128					
		du centre.	0,102	0,334	0,352					

PENTES. (1)	VITESSES MOYENNES. (2)	DISTANCES DU CENTRE DU TUYAU aux filets dont la vitesse a été mesurée. (3)		EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant l'expérience. (4)	EXCÈS DE LA VITESSE du filet central sur celle des autres filets suivant la formule $V - v = K\frac{r^{\frac{2}{3}}}{R}\sqrt{i}$. (5)	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse moyenne $V - v = K\,0{,}689\sqrt[3]{\frac{2}{R}}\sqrt{i}$. (6)	EXCÈS DE LA VITESSE AU CENTRE sur la vitesse à la paroi ou flèche de la courbe $V - v = K\sqrt{R}\sqrt{i}$. (7)	VITESSES déduites de la courbe pour le filet central. (8)	VITESSES déduites de la courbe pour le filet moyen. (9)	VITESSES déduites de la courbe pour le filet à la paroi. (10)
				CONDUITE DE 0m,50.						
			mèt.	mèt.	mèt.					
mèt.	mèt.	au-dessus	0,17	0,094	0,091	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,00060	0,4752	du centre.	0,09	0,036	0,035	0,093	0,162	0,568	0,4752	0,406
		au centre..	0,00							
		au-dessus	0,17	0,123	0,131					
		du centre.	0,09	0,050	0,050					
0,00125	0,7951	au centre..	0,00			0,134	0,234	0,929	0,7951	0,695
		au-dessous	0,09	0,050	0,050					
		du centre.	0,17	0,123	0,131					
		au-dessus	0,17	0,186	0,189					
		du centre.	0,09	0,070	0,073					
0,00260	1,1197	au centre..	0,00			0,193	0,337	1,313	1,120	0,976
		au-dessous	0,09	0,078	0,073					
		du centre.	0,17	0,204	0,189					

C'est au moyen des résultats du tableau ci-dessus que les courbes dessinées, planche XI, dans les tuyaux 0m,188, 0m,2432, 0m,2447, 0m,297, 0m,50, ont été tracées.

L'antépénultième tableau peut donner lieu à plusieurs observations :

1° On voit d'abord que les valeurs successives de K sont,

Tuyau de 0m,188 11,253
——— 0 ,2432 (parois recouvertes de dépôts).... 11,654
——— 0 ,2447 (précédent nettoyé)..... 10,869
——— 0 ,297 10,689
——— 0 ,50 13,224

Or, le coefficient de la résistance du tuyau de $0^m,2432$ est,

dans l'équation de la forme $Ri = b_1 v^2$, de..... 0,001,168,

celui du tuyau nettoyé $0^m,2447$, de..... 0,000,703,

de là découle la conséquence que la surface du tuyau paraît être sans influence sur les vitesses relatives des filets fluides.

Ce résultat aurait pu être confirmé par d'autres expériences non moins décisives.

Je veux parler de celles opérées sur la conduite en tôle et bitume de $0^m,196$ de diamètre.

L'appareil destiné à mesurer les vitesses relatives des filets fluides lui avait été appliqué. Une absence pour mon service et la nécessité où l'on fut de démonter cette conduite pendant cette absence ne me permirent point d'assister aux opérations ou de les recommencer, ainsi que je m'y étais constamment assujetti.

Lorsque le tableau des expériences me fut remis, je remarquai que les vitesses au-dessus et au-dessous de l'axe n'étaient plus les mêmes.

Je remarquai en même temps que pour chaque pente le manomètre destiné à mesurer les pressions n'était point resté fixe; il montait lorsque la tige de l'appareil s'élevait pour la détermination des vitesses de la partie supérieure du tuyau; en même temps les cotes accusées par ce dernier appareil décroissaient relativement à celles obtenues dans les parties inférieures.

Il y avait donc un désordre causé par des corps étrangers que les eaux avaient conduits et dont l'influence variait avec la position de l'instrument.

J'avais quelquefois remarqué des effets analogues, et en faisant démonter l'appareil j'en avais toujours reconnu la cause : quelques parcelles de *mousse* engagées dans les orifices des tubes, et plus ou moins comprimées dans les mouvements de la tige, donnaient lieu à des ralentissements plus ou moins considérables de vitesse.

Malheureusement, on n'a point songé à nettoyer l'appareil pour

recommencer les expériences, et j'ai dû renoncer à transcrire des opérations qui ne me présentaient aucun degré de certitude.

Je dirai cependant que l'on reconnaissait encore la trace évidente des lois précédemment observées, et que les différences de vitesse n'avaient en général subi aucune diminution en les comparant à celles déduites des formules.

Je crois donc que l'on peut admettre comme vraie l'observation première qui se déduit d'ailleurs de la comparaison des résultats obtenus dans les tuyaux de $0^m,2432$ et $0^m,2447$.

Or, lorsque l'on remarque que le coefficient de la résistance pour le tuyau de tôle et bitume est 0,000,446,5, on en conclura qu'au moins entre des limites de résistance comprises entre 0,001,168 (parois recouvertes de dépôts) et 0,000,446,5 (parois enduites de bitume vitrifié) la courbe

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i}$$

ne semble dépendre que des actions intérieures du fluide et nullement des frottements contre les parois.

2° On se rappelle que j'ai cherché à établir dans les expériences 26 *bis*, 26 *ter*, 26 *quater* qu'une impulsion centrale excessivement vive n'altérait point d'une manière appréciable la loi de distribution des vitesses des filets fluides.

D'abord elle ne modifie pas la vitesse à la paroi, puisque les différences des colonnes manométriques qui les mesurent ne varient point sous l'influence de cette impulsion.

En second lieu, la vitesse moyenne conservant la valeur que les formules lui assignent sans impulsion, la différence entre la vitesse moyenne et celle à la paroi reste la même : d'où résulte la conséquence précitée.

J'ai voulu savoir si une expérience directe conduirait encore à ce résultat.

J'ai donc placé à 11 mètres en amont de l'appareil destiné à

mesurer les vitesses dans le tuyau en fonte de $0^m,188$ un diaphragme percé d'un orifice de $0^m,03$.

La charge sur cet orifice (expérience 165 *bis*) était $20^m,206$, d'où, pour la vitesse par seconde,

$$v = 4,42\sqrt{20,206} = 19^m,87^1.$$

Or, la vitesse moyenne dans le tuyau était..... $0^m,346$
et l'on avait pour la pente correspondante tirée de la formule expérimentale applicable au tuyau de $0^m,188$

$$i = \frac{0,000,012,276\,v + 0,000,572\,v^2}{0,094} = \ldots\ldots\ldots\ 0^m,000,774$$

Mais nous avons, pour la formule des différences de vitesse dans le tuyau de $0^m,188$,

$$V - v = 11,253\,\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i},$$

l'expérience suivante ayant été faite aux distances $0^m,0325$ et $0^m,0637$ de l'axe, il convient de substituer à $r^{\frac{3}{2}}$ les nombres 0,00586 et 0,01608, on aura donc pour les valeurs cherchées :

$$V - v = 0^m,02,$$
$$V - v = 0\ ,059.$$

Or, l'expérience a donné les résultats suivants :

appareil des vitesses	au centre.....	$0^m,040$
	à $0^m,0325$ de l'axe.....	$0\ ,039$
	à $0\ ,0637$ de l'axe.....	$0\ ,037$
manomètre.....		$0\ ,03$

[1] Le diamètre de l'orifice étant $0^m,03$ et la section 0,000,708,49, le volume théorique serait $14^l,078$. Le volume effectif débité par la conduite étant de $9^l,609$. le coefficient de contraction $= \frac{9,609}{14,078} = 0,682$.

différences donnant les hauteurs dues

aux vitesses..... { au centre..... $0^m,010$
à $0^m,0325$..... $0,009$
à $0,0637$..... $0,007$

d'où pour les vitesses correspondantes..... { $0^m,442.17$
$0,420.00$
$0,370.00$

différences de vitesse { distance du centre $0^m,0325$. $0^m,022.17$
—————— $0,0637$. $0,072.17$

Mais ces différences devant être atténuées dans le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse $0^m,37$ prise sensiblement à la distance de la vitesse moyenne, il viendra en dernier lieu pour les différences de vitesse cherchées :

Suivant l'expérience.	Suivant la formule.
$0^m,021$	$0^m,02$
$0,066$	$0,056$

Cette coïncidence, presque parfaite entre la formule et l'expérience, lorsqu'il s'agit d'une vitesse moyenne aussi faible et d'une impulsion aussi vive, me semble justifier entièrement cette assertion, que l'effet de la cohésion de l'eau détruit presque immédiatement l'influence des plus grandes vitesses.

En serait-il de même si l'on opérait par voie de succion, c'est-à-dire si, en aval de l'instrument, on eût disposé les choses de manière que le filet central eût été suivi de filets marchant beaucoup plus rapidement que ceux du reste de la section?

L'expérience paraît indiquer le contraire.

En effet, si l'on jette les yeux sur le coefficient de la formule

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i},$$

relative au tuyau de 0,50, on remarquera que ce coefficient est supérieur à ceux des tuyaux qui précèdent.

J'ai longtemps cherché à m'expliquer cette différence, et je crois en avoir trouvé la raison dans la manière dont les appareils d'écoulement étaient disposés.

La conduite de $0^m,50$ n'arrivait pas avec le même diamètre jusqu'au cylindre de décharge.

Afin de pouvoir employer un robinet de $0^m,30$, on avait raccordé la conduite de $0^m,50$ et une conduite de $0^m,297$ au moyen d'un cône tronqué dont les diamètres étaient de $0^m,30$ et de $0^m,50$.

Ce cône était placé à $4^m,33$ en aval du manomètre n° 1, à $3^m,34$ en aval de l'appareil destiné à mesurer les vitesses[1].

Or si au moyen de la formule

$$V - v = K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{i}$$

nous calculons : 1° pour le tuyau de $0^m,50$, 2° pour celui de $0^m,297$ les $V - v$ relatifs à la vitesse à la paroi et à la vitesse moyenne, en introduisant pour K la valeur moyenne résultant de l'ensemble des tuyaux, moins celui de 0,50 ou 11,116, en remarquant de plus

	Dans le tuyau de $0^m,50$.
qu'aux vitesses moyennes de.....	$0^m,4752$
	0 ,7951
	1 ,1197
	Dans le tuyau de $0^m,297$.
correspondent les vitesses de.....	$1^m,347$
	2 ,253
	3 ,173

[1] Voici comment le raccordement du cône était disposé :

Du cylindre vertical dans lequel débouchait le tuyau de $0^m,297$ au robinet d'arrêt de même diamètre.....	$0^m,42$
Largeur du robinet d'arrêt à vanne.....	0 ,60
Longueur du cône.....	1 ,00
Distance de l'appareil des vitesses au joint de raccordement du cône avec le tuyau de $0^m,50$.....	3 ,34
TOTAL.....	$5^m,36$

et qu'en même temps ces dernières vitesses sont dues d'après la formule

$$i = \frac{0{,}000.023.508\, v + 0{,}000.585.53\, v^2}{0{,}1485},$$

aux pentes..... $\begin{cases} 0^m{,}007.365 \\ 0\ ,020.380 \\ 0\ ,040.205 \end{cases}$

on pourra former le tableau suivant :

DIFFÉRENCES ENTRE LES VITESSES À LA PAROI ET AU CENTRE.		DIFFÉRENCES ENTRE LES VITESSES CENTRALES ET MOYENNES.	
Tuyau de $0^m{,}297$.	Tuyau de $0^m{,}50$.	Tuyau de $0^m{,}297$.	Tuyau de $0^m{,}50$.
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
0,3677	0,1362	0,2103	0,07786
0,6117	0,1966	0,3498	0,1124
0,8592	0,2835	0,4914	0,1621

d'où l'on déduira le tableau suivant, étant données les vitesses moyennes :

VITESSE CENTRALE.		DIFFÉRENCES.	VITESSE MOYENNE.		DIFFÉRENCES.	VITESSE À LA PAROI.		DIFFÉRENCES.
Tuyau de $0^m{,}297$.	Tuyau de $0^m{,}50$.		Tuyau de $0^m{,}297$.	Tuyau de $0^m{,}50$.		Tuyau de $0^m{,}297$.	Tuyau de $0^m{,}50$.	
mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
1,5600	0,5550	1,0050	1,3470	0,4752	0,8718	1,1923	0,4198	0,7725
2,6028	0,9075	1,6953	2,2530	0,7951	1,4579	1,9911	0,7109	1,2802
3,6644	1,2818	2,3826	3,1730	1,1197	2,0533	2,8052	0,9983	1,8069

On voit donc qu'en passant du tuyau de $0^m{,}50$ au tuyau de $0^m{,}297$ les différences de vitesse sont plus grandes pour les filets centraux que pour les filets moyens, et plus grandes aussi pour ces derniers que pour ceux à la paroi.

Il en résulte qu'une sorte de succion doit se produire, laquelle peut à la fois déterminer des courants transversaux et des accroissements dans les flèches des courbes du tuyau de $0^m,50$.

C'est ainsi que l'on peut attribuer l'accroissement du coefficient K dans ce dernier tuyau à la manière dont étaient disposés les appareils des expériences : on a obtenu les mêmes résultats que si l'on eût opéré sur un liquide d'une moindre cohésion.

Il paraîtrait ainsi que c'est de la moyenne des coefficients trouvés pour les quatre premiers tuyaux que devrait résulter la valeur de K.

On aurait ainsi..... $K = 11,116$

La moyenne générale, au reste, eût donné... $K = 11,537$

Il semble dès lors assez indifférent d'employer l'une ou l'autre de ces valeurs. On pourrait adopter..... $11,30$

Cette valeur de K étant ainsi déterminée expérimentalement, on obtiendra facilement celle de $\frac{2}{9K^2}$, ou du multiplicateur du premier membre de l'équation différentielle suivante, précédemment établie

$$\frac{2}{9K^2}\, 2\pi r \left(R\frac{dv}{dr}\right)^2 = \pi r^2 i$$

qui devient, en faisant disparaître les facteurs communs et en représentant $\frac{2}{9K^2}$ par ε,

$$\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2}$$

$\frac{2}{9K^2}$ ou ε est égal à $\frac{2}{9\times 11,30^2} = 0,00174$.

C'est-à-dire que dans un tuyau d'un rayon égal à l'unité, et pour la surface cylindrique correspondant à la distance où l'inclinaison de la tangente de la courbe $\frac{dv}{dr} = 1$, la résistance au déplacement relatif qui a lieu, pendant l'unité de temps, entre les couches en contact est égale à $1^k,74$ par mètre carré.

Dans le cas d'une pente d'un centimètre par mètre pour un tuyau de rayon égal à l'unité, et dans l'hypothèse $\frac{dv}{dr} = 1$, on a donc :

$$0{,}00174 = \frac{r}{2}\,0{,}01,$$

d'où

$$r = 0^{m},348,$$

c'est-à-dire que dans les circonstances précédentes le rayon à l'extrémité duquel s'exercerait la résistance $1^{k},74$ serait égal à $0^{m},348$: on voit par ce qui précède qu'il suffit d'une vitesse relative infiniment petite pour faire naître, dans les couches fluides en contact, une résistance comparable à celle qui pourrait être engendrée par une vitesse finie du liquide glissant sur une paroi solide. M. Dupuit a donc pu prétendre que de Prony ne paraît pas avoir exprimé une idée précise lorsqu'il a dit : « cette cohésion des molécules fluides entre elles, et celle des mêmes molécules à la matière dont le tuyau est formé ou dans laquelle le canal est creusé, doivent être en général représentées par des valeurs différentes, mais comparables ou de même ordre les unes par rapport aux autres. »

L'adhérence à la paroi, en effet, peut être expérimentée sous une vitesse finie quelconque, tandis que ce qu'on appelle *la cohésion* ne peut l'être que sous l'influence d'une vitesse relative infiniment petite; car, de quelque manière qu'on fasse l'expérience, ajoute justement M. Dupuit, *la cohésion du liquide sera toujours assez forte pour que la vitesse relative des deux surfaces soit sensiblement nulle.*

Ces deux forces de l'adhérence et de la cohésion sont, on le voit, d'un ordre différent et sans mesure commune.

Reprenons maintenant pour les discuter avec plus de détails les équations connues :

$$V - w = K\sqrt{Ri},$$
$$V - u = \frac{4}{7}K\sqrt{Ri},$$

d'où l'on tire, pour les valeurs de la vitesse à la paroi et de la vitesse maximum en fonction de la vitesse moyenne,

$$w = u - \frac{3}{7} K \sqrt{R i},$$

$$V = u + \frac{4}{7} K \sqrt{R i}.$$

Si nous supposons que l'équation de la vitesse moyenne ne comprenne que la seconde puissance de cette vitesse, elle prendra, ainsi qu'on l'a vu, la forme

$$b_1 u^2 = \frac{R i}{2} \quad \text{d'où} \quad u = \sqrt{\frac{R i}{2 b_1}},$$

on aura donc

$$w = \sqrt{R i} \left(\frac{1}{\sqrt{2 b_1}} - \frac{3}{7} K \right),$$

$$V = \sqrt{R i} \left(\frac{1}{\sqrt{2 b_1}} + \frac{4}{7} K \right).$$

Supposons encore que dans l'équation qui donne la vitesse de l'eau à la paroi, et dont la forme générale est, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre,

$$a_0 w + b_0 w^2 = \frac{R i}{2},$$

on ne conserve que le terme où w est élevé au carré, il viendra

$$b_0 w^2 = \frac{R i}{2}, \quad \text{d'où} \quad w = \sqrt{\frac{R i}{2 b_0}},$$

on aura donc

$$\sqrt{\frac{R i}{2 b_0}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2 b_1}} - \frac{3}{7} K \right) \sqrt{R i},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{b_0}} = \frac{1}{\sqrt{b_1}} - \frac{3}{7} \sqrt{2}\, K,$$

d'où enfin

$$b_0 = \frac{49\, b_1}{(7 - 3\sqrt{2}\,\mathrm{K}\sqrt{b_1})^2} = \frac{49\, b_1}{\left(7 - 2\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}}\right)^2},$$

Pour la relation existant entre le coefficient de la résistance à la paroi et le coefficient de cette même résistance rapporté à la vitesse moyenne; il sera toujours facile d'obtenir b_0 en fonction des valeurs expérimentales de b_1 du tableau du quatrième chapitre.

Seulement il faudra remarquer que, comme j'ai adopté pour l'équation de la vitesse moyenne la forme $b_1\, u^2 = \mathrm{R}\, i$ [1] au lieu de la forme habituelle..... $b_1\, u^2 = \frac{\mathrm{R}\, i}{2}$, les b_1 du tableau précité devront être divisés par 2 avant d'être introduits dans l'expression qui donne b_0 en fonction de b_1; sinon, cette expression devrait être corrigée pour les substitutions à faire, et deviendrait

$$b_0 = \frac{1}{2}\,\frac{49\, b_1}{(7 - 3\,\mathrm{K}\sqrt{b_1})^2} = \frac{1}{2}\,\frac{49\, b_1}{\left(7 - \sqrt{\frac{2\, b_1}{\varepsilon}}\right)^2}.$$

On peut arriver à l'équation ci-dessus posée

$$b_0\, w^2 = \frac{\mathrm{R}\, i}{2},$$

au moyen de la relation suivante facile à établir

$$2\,\pi\,\mathrm{R}\, b_0\, w^2 = \varepsilon\,\mathrm{R}^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 \cdot 2\,\pi\,\mathrm{R},$$

$\frac{dv}{dr}$ devant être pris dans l'hypothèse de $r = \mathrm{R}$ rayon du tuyau.

Le premier membre, en effet, représente la résistance [2] que la couche en contact avec la paroi éprouve de la part de cette dernière.

[1] En agissant ainsi, j'ai eu pour but de comprendre toutes les constantes dans le coefficient b.

[2] Dans l'hypothèse, bien entendu, où cette résistance est considérée comme uniquement proportionnelle au carré de la vitesse de la couche liquide en contact avec la paroi; hypothèse suffisamment d'accord avec les faits pratiques.

Le second membre est l'expression expérimentale de l'effort que le cylindre liquide de rayon R fait pour entraîner cette même couche.

Il doit donc y avoir équilibre entre ces deux forces.

Or $\frac{dv}{dr}$, pris à l'extrémité du rayon du tuyau, est égal à $-\frac{3}{2}\,\mathrm{K}\sqrt{\frac{i}{\mathrm{R}}}$ comme on peut le déduire de l'équation

$$\mathrm{V} - v = \mathrm{K}\,\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{R}}\sqrt{i},$$

d'où, en substituant dans l'équation d'équilibre cette valeur de $\frac{dv}{dr}$ il viendra

$$b_0\, w^2 = \frac{\mathrm{R}\,i}{2}.$$

Nous avons obtenu l'équation de la vitesse maximum et de la vitesse à la paroi en fonction du coefficient de la résistance rapporté à la vitesse moyenne et du coefficient relatif aux actions intérieures du fluide ou ε; il est facile d'arriver aux équations de la vitesse maximum et de la vitesse moyenne en fonction du coefficient de la résistance à la paroi et de ε, au moyen de la relation ci-dessus trouvée,

$$\frac{1}{\sqrt{b_1}} = \frac{1}{\sqrt{b_0}} + \frac{3}{7}\sqrt{2}\,\mathrm{K} = \frac{1}{\sqrt{b_0}} + \frac{2}{7\sqrt{\varepsilon}}$$

et il viendra pour la vitesse maximum,

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}\,i}{2\,b_0}}\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$ [1]

[1] On parviendrait encore à la même équation en remarquant que

$$\mathrm{V} - w = \mathrm{K}\sqrt{\mathrm{R}\,i} = \frac{\sqrt{2\,\mathrm{R}\,i}}{3\sqrt{\varepsilon}},$$

laquelle combinée avec

$$w = \sqrt{\frac{\mathrm{R}\,i}{2\,b_0}}$$

reproduit l'équation de la vitesse maximum en fonction de b_0 et de ε.

la vitesse moyenne étant

$$u = \frac{3V + 4w}{7},$$

on a, en remplaçant V et w par leurs valeurs précédentes,

$$u = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}}\,\frac{\left[4 + 3\left(1 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right]}{7} = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}}\left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

d'où le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximum :

$$\frac{u}{V} = \frac{1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}.$$

Ce rapport, exprimé en fonction du coefficient de la vitesse moyenne et de ε, deviendrait :

$$\frac{u}{V} = \frac{\sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_1}}}{\sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_1}}\left(1 + \frac{4}{7}K\sqrt{2\,b_1}\right)} = \frac{7}{7 + 4K\sqrt{2\,b_1}} = \frac{7}{7 + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}}}.$$

Mais encore ici il convient de remarquer, par la raison déjà exprimée, qu'il faudra, avant de les substituer dans la formule ci-dessus, diviser par 2 les b_1 déduits de la table du quatrième chapitre ; ou bien encore substituer les valeurs de b_1 telles qu'elles se trouvent inscrites au tableau dans la formule modifiée :

$$\frac{u}{V} = \frac{7}{7 + 4K\sqrt{b_1}} = \frac{7}{7 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\,b_1}{\varepsilon}}}.$$

Nous allons maintenant appliquer les formules

$$b_0 = \frac{1}{2}\frac{49\,b_1}{(7-3\,K\sqrt{b_1})^2},\quad w = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}},\quad V = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

$$u = \frac{3\,V+4\,w}{7} = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}}\left(1+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),\quad \frac{u}{V} = \frac{1+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}} = \frac{7}{7+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\,b_1}{\varepsilon}}},$$

dans lesquelles on prendra pour b_1 les valeurs déduites du tableau du chapitre IV.

Ces applications seront faites aux tuyaux présentant les diamètres de $0^m,188$, $0^m,2432$, $0^m,2447$, $0^m,297$, $0^m,50$.

Elles nous permettront d'obtenir les résultats consignés dans le tableau suivant :

DIAMÈTRE des tuyaux.	PENTES.	VALEURS DE b_1.	VALEURS DE K.	$\varepsilon = \frac{2}{9K^2}$.	$b_0 = \frac{1}{2}\frac{49\,b_1}{(7-3K\sqrt{b_1})^2}$.	$w = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}$.	$V = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)$.	$u = \frac{3V+4w}{7}$ ou $u = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}\left(1+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)$.	$\frac{u}{V} = \frac{1+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}$ ou $\frac{u}{V} = \frac{7}{7+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2b_1}{\varepsilon}}}$.
	mèt.					mèt.	mèt.	mèt.	
	0,00368					0,679	0,889	0,769	0,865
mèt.	0,00805					1,005	1,314	1,137	0,865
0,188	0,01340	0,000,585	11,253	0,001,755	0,000,374,848	1,296	1,696	1,467	0,865
	0,02250					1,680	2,197	1,901	0,865
	0,03810					2,186	2,859	2,474	0,865
	0,10980					3,710	4,854	4,200	0,865
	0,00202					0,380	0,563	0,459	0,815
	0,00473					0,582	0,861	0,702	0,815
0,2432	0,02290	0,001,168	11,654	0,001,636	0,000,849,16	1,281	1,895	1,544	0,815
	0,03200					1,514	2,241	1,825	0,814
	0,13981					3,164	4,683	3,815	0,815
	0,00165					0,470	0,620	0,534	0,861
	0,00498					0,816	1,078	0,928	0,861
0,2447	0,02035	0,000,703,3	10,869	0,001,881	0,000,457,762	1,649	2,179	1,876	0,861
	0,11343					3,893	5,145	4,430	0,861
	0,00070					0,365	0,474	0,412	0,869
	0,00617					1,084	1,408	1,223	0,869
0,297	0,01125	0,000,612,9	10,689	0,001,945	0,000,389,865	1,464	1,901	1,651	0,868
	0,02251					2,071	2,689	2,335	0,868
	0,00060					0,471	0,633	0,540	0,853
0,50	0,00125	0,000,514,3	13,224	0,001,271	0,000,338,59	0,679	0,913	0,779	0,853
	0,00260					0,980	1,317	1,124	0,853

On voit que ces résultats sont concordants avec ceux du tableau de la page 297 où les vitesses à la paroi, au centre et moyenne avaient été calculées à l'aide de la vitesse moyenne expérimentale et de la formule

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i}.$$

Les légères différences que l'on remarquera proviennent de ce que l'on a pris dans le premier tableau les vitesses moyennes expérimentales elles-mêmes, tandis que dans le tableau ci-dessus on s'est borné à recourir aux coefficients de la résistance exprimé dans la formule d'interpolation monôme correspondant à chacun des tuyaux précités, ainsi que l'indique la seconde colonne du tableau précédent.

J'ai dû prendre les valeurs successivement trouvées pour ε, puisqu'on avait pareillement agi dans le tableau de la page 297; on remarquera, d'ailleurs, que les chiffres qui donnent ε sont presque identiques, à l'exception de celui qui correspond au tuyau de $0^m,50$ de diamètre; mais j'ai cherché à entrevoir la raison de cette anomalie apparente; elle tenait aux circonstances dans lesquelles ce tuyau était placé; ces circonstances agissaient en effet comme si la cohésion de l'eau eût diminué, puisqu'elles avaient pour résultat d'agrandir la flèche de la courbe.

En se rappelant la relation $u = \frac{3V + 4w}{7}$ et en joignant aux deux équations

$$w = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}},$$

$$V = \sqrt{\frac{R\,i}{2\,b_0}} \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

l'expression générale

$$V - v = K \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i} = 11{,}30 \frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} \sqrt{i},$$

on aura tous les éléments nécessaires pour calculer les vitesses de chacun des filets de la section du tuyau.

On prendrait pour ε la valeur 0,00174 : les valeurs de b_0 se déduiraient de l'expression $b_0 = \frac{1}{2}\frac{49\,b_1}{(7-3K\sqrt{b_1})^2}$ dans laquelle b_1 est égal aux chiffres de la 3e colonne du tableau de la page 252, chiffres variables avec le diamètre du tuyau.

VALEURS DANS LES TUYAUX CYLINDRIQUES DES RAPPORTS

$$\alpha = \frac{\int_R^0 2\pi r\,dr\,v^3}{\pi R^2 u^3} \text{ ET } \alpha' = \frac{\int_R^0 .2\pi r\,dr\,v^2}{\pi R^2 u^2}.$$

Nous rechercherons maintenant quel est dans les tuyaux cylindriques le rapport de la somme des forces vives des filets du courant, pris chacun avec sa vitesse réelle, à la force vive de ce même courant, dans l'hypothèse où tous les filets fluides seraient animés de la vitesse moyenne.

M. le général Poncelet a démontré que ce rapport était toujours plus grand que l'unité.

Appelons α ce rapport;

v la vitesse d'un filet quelconque dans une section normale à la direction du courant;

r le rayon correspondant à la vitesse v;

u la vitesse moyenne;

V la vitesse maximum;

R le rayon du tuyau.

L'équation qui résulte de l'énoncé de la question est

$$\alpha\,\pi R^2 u^3 = \int_R^0 2\pi r dr v^3.$$

Or on a

$$v = V - K\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i}.$$

Substituant et intégrant entre les limites o et R, il viendra, après avoir divisé les deux membres de l'équation par πR^2,

$$\alpha u^3 = V^3 - \frac{4}{13} K^3 i^{\frac{3}{2}} R^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{5} V K^2 R i - \frac{12}{7} V^2 K \sqrt{R i}.$$

Entre la vitesse maximum et la vitesse moyenne existe, comme on l'a vu, la relation

$$\frac{7}{4}(V - u) = K\sqrt{Ri},$$

l'équation précédente peut donc être ramenée à la forme suivante :

$$\alpha = \frac{V^3}{u^3} - 3\frac{V^2}{u^2}\left(\frac{V}{u} - 1\right) + 3{,}675\frac{V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 - 1{,}65\left(\frac{V}{u} - 1\right)^3.$$

Or de l'identité

$$\left[\frac{V}{u} - \left(\frac{V}{u} - 1\right)\right]^3 = 1$$

on tire

$$\frac{V^3}{u^3} - 3\frac{V^2}{u^2}\left(\frac{V}{u} - 1\right) = 1 - 3\frac{V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 + \left(\frac{V}{u} - 1\right)^3,$$

donc

$$\alpha = 1 + 0{,}675\frac{V}{u}\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 - 0{,}65\left(\frac{V}{u} - 1\right)^3,$$

d'où

$$(A) \qquad \alpha = 1 + 0{,}65\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2\left(1 + 0{,}0385\frac{V}{u}\right).$$

Or, si l'on jette les yeux sur le tableau précédent, on verra que la plus grande valeur de $\frac{V}{u}$ qui correspond au tuyau de $0^m{,}2432$ de diamètre recouvert de dépôts est..... 1,22

que la valeur $\frac{V}{u}$ correspondant au tuyau neuf de $0^m{,}50$ de diamètre est..... 1,17

et l'on trouvera, en substituant ces valeurs dans l'expression algé-

brique de α, que cette expression prendra dans ces hypothèses les valeurs suivantes :

$$\alpha = 1{,}033,$$

$$\alpha = 1{,}020.$$

La valeur de α peut aussi être donnée en fonction du coefficient de la résistance à la paroi b_0 et de la constante ε; en effet, on a :

$$\frac{V}{u} = \frac{7 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{7 + 2\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}} = \frac{21 + 14\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{21 + 6\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}},$$

$$\left(\frac{V}{u} - 1\right)^2 = \left(\frac{8\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{21 + 6\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}\right)^2 = \frac{64\, b_0}{(21\sqrt{\varepsilon} + 6\sqrt{b_0})^2},$$

d'où

$$(B) \quad \alpha = 1 + \frac{41{,}60\, b_0}{(21\sqrt{\varepsilon} + 6\sqrt{b_0})^2}\left(1 + 0{,}0385\,\frac{21 + 14\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{21 + 6\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}\right)$$

Enfin, l'expression de α en fonction du coefficient b_1 de la vitesse moyenne et de la constante ε serait :

$$\alpha = 1 + 0{,}65\,\frac{32}{21^2}\,\frac{b_1}{\varepsilon}\left[1 + 0{,}0385\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{21}\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}}\right)\right]$$

On obtient ce résultat en remarquant, comme à la page 313, que

$$\frac{V}{u} = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{21}\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}},$$

et l'on arrive, calculs opérés et réductions faites, à

$$(C) \qquad \alpha = 1 + 0{,}0472\,\frac{b_1}{\varepsilon}\left(1{,}0385 + 0{,}0104\,\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}}\right)$$

Or, on a pour le tuyau de $0^m{,}2432$:

$$b_0 = 0{,}000.889,$$
$$b_1 = 0{,}001.1654,$$
$$\varepsilon = 0{,}001.6,$$

d'où l'on tire pour ce tuyau de $0^m{,}2432$,

par la formule B..... $\alpha = 1{,}037$

et par la formule C..... $\alpha = 1{,}036$,

valeurs pareilles à celles déduites de la formule A.

Il faut bien se rappeler que j'ai pris pour l'équation de la vitesse moyenne :

$$b_1 u^2 = Ri$$

et pour celle de la vitesse à la paroi

$$b_0 w^2 = \frac{R}{2} i,$$

ce qui explique pourquoi l'on trouve

$$b_0 < b_1.$$

Pour rendre comparables les valeurs de b_0 et de b_1, il faut donc diviser par 2 la valeur de b_1 trouvée dans la table, et il vient alors :

$$b_1 = \frac{0{,}001.165.4}{2} = 0{,}000.582.7,$$
$$b_0 = 0{,}001.778$$

Une erreur paraît s'être glissée dans le Mémoire de M. Sonnet au sujet du calcul de la quantité α; il a déduit cette quantité de la comparaison de la somme des quantités de mouvement des filets

fluides du courant à la quantité de mouvement de ce même courant pris par rapport à la vitesse moyenne.

Dans cette hypothèse, l'équation qui résulte de l'énoncé de la question est

$$\alpha' \pi R^2 u^2 = \int_R^0 2\pi r dr v^2,$$

et l'on arrive pour les trois équations correspondant aux équations A, B, C à

$$(A') \qquad \alpha' = 1 + 0{,}225 \left(\frac{V}{u} - 1\right)^2$$

$$(B') \qquad \alpha' = 1 + 1{,}60 \frac{b_0}{(7\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{b_0})^2}$$

$$(C') \qquad \alpha' = 1 + 0{,}016.32 \frac{b_1}{\varepsilon}$$

et l'on tirerait pour le tuyau de $0^m{,}2432$ de diamètre, dans lequel $\frac{V}{u} = 1{,}22$, la valeur $\alpha' = 1{,}01$ de la première des équations posées ci-dessus.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES.

Je terminerai ce chapitre par quelques considérations générales sur l'équation d'équilibre, de laquelle j'ai déduit la courbe des vitesses : on a vu que l'expérience m'avait donné pour cette équation dans un tuyau de rayon R la relation

$$2\pi r\varepsilon \left(R \frac{dv}{dr}\right)^2 = \pi r^2 i,$$

d'où

$$\varepsilon \left(R \frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2}.$$

Cette équation d'équilibre exprime que, pour obtenir l'effet de la résistance éprouvée par un cylindre liquide de rayon r dans

un tuyau de rayon R, de la part de la couche enveloppe, il faut prendre le produit du carré du rayon du tuyau par le carré de l'inclinaison de la tangente de la courbe au point que l'on considère, lequel produit ayant en outre pour facteur un coefficient ε dépendant des actions intérieures du liquide.

Jusqu'à ce jour on avait supposé que la résistance dont il vient d'être parlé était proportionnelle à la première puissance de l'inclinaison de la tangente de la courbe multipliée par une constante : cette hypothèse a été successivement reproduite par MM. Navier et Poisson; enfin M. Sonnet, dans un mémoire présenté à l'Académie, et M. Dupuit, dans ses *Études sur le mouvement des eaux courantes,* ont cherché à tirer un parti pratique de l'hypothèse précitée : ils sont arrivés l'un et l'autre pour le mouvement de l'eau dans un tuyau à l'équation d'équilibre

$$-\varepsilon \frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2}.$$

On voit qu'il existe entre cette relation et celle que l'expérience m'a donnée deux différences notables :

1° Dans cette dernière l'inclinaison de la tangente de la courbe est élevée au carré;

2° Elle est multipliée par le carré du rayon du tuyau, d'où il suit que la valeur de la résistance provenant des actions intérieures augmente proportionnellement au carré du rayon du tuyau.

Ce résultat de mes expériences, qui n'étaient pas encore faites à l'époque de la publication des ouvrages de MM. Sonnet et Dupuit, ne pouvait être pris en considération par ces hydrauliciens distingués; cependant on paraissait déjà croire, mais sans la préciser, à l'influence des dimensions absolues de la section sur les actions intérieures des molécules fluides.

On lit, en effet, dans un ouvrage de M. de Saint-Venant intitulé *Nouvelles formules relatives aux eaux courantes :*

« Si l'hypothèse de Newton reproduite par MM. Navier et Poisson, et qui consiste à prendre le frottement intérieur proportionnel à

la vitesse relative des filets glissant les uns devant les autres, peut être appliquée approximativement pour les divers points d'une même section fluide, tous les faits connus portent à inférer qu'il faut faire croître le coefficient de cette proportionnalité avec les dimensions des sections transversales; ce qui s'explique, jusqu'à un certain point, en remarquant que les filets ne marchent pas parallèlement entre eux avec des vitesses régulièrement graduées de l'un à l'autre, et que les *ruptures*, les tourbillonnements et d'autres mouvements compliqués ou obliques, qui doivent beaucoup influer sur l'intensité des frottements, se forment et se développent davantage dans les grandes sections. »

Pour arriver à l'appréciation raisonnée de l'intervention de la grandeur absolue de la section dans l'expression de la résistance due aux actions intérieures des fluides, il faudrait connaître le mode suivant lequel cette intervention a lieu : il ne m'a point encore été donné d'arriver à l'interprétation philosophique de cette loi, que l'expérience seule m'a révélée pour les tuyaux et même pour les canaux rectangulaires, comme je le montrerai dans un travail qui fait en ce moment l'objet de mes études.

Au reste, indépendamment des expériences à l'aide desquelles j'ai pu construire de toutes pièces la formule

$$V - v = K \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{i},$$

qui recèle, comme on l'a vu, la loi des résistances intérieures, il me paraît légitime de conclure la vérité de cette loi *de la circonstance que seule elle conduit aux expressions connues de la vitesse moyenne et de la vitesse maximum d'un courant.*

Je m'explique.

On sait que l'expérience nous a démontré que lorsque la vitesse moyenne était supérieure à 10 ou 12 centimètres par seconde, son expression algébrique était donnée par l'équation

$$b_1 u^2 = \frac{R i}{2} \quad \text{ou} \quad u = \sqrt{\frac{R i}{2 b_1}}.$$

Si donc l'équation $\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2}$ est vraie, elle doit, dans la même hypothèse, conduire pour la vitesse moyenne à une expression de même forme.

Or, on se rappelle que nous avons trouvé pour la valeur de la vitesse moyenne :

$$u = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}\left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

laquelle est exactement de même forme que la précédente

$$u = \sqrt{\frac{Ri}{2b_1}}.$$

Si, au lieu de supposer que le frottement à la paroi est seulement proportionnel au carré de la vitesse w, nous avions admis, conformément à la loi plus générale de Coulomb, la proportionnalité au binôme $a_0 w + b_0 w^2$, l'équation de la vitesse à la paroi serait devenue (comme on l'a vu chap. I[er]):

$$a_0 w + b_0 w^2 = \frac{Ri}{2}.$$

En la résolvant par rapport à w, on obtient

$$w = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}},$$

laquelle combinée avec la relation $\frac{9}{2}\varepsilon\frac{(V-w)^2}{R} = i$ donne pour la vitesse maximum :

$$V = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}} + \sqrt{\frac{2}{9\varepsilon}}\sqrt{Ri},$$

et comme la vitesse moyenne u est égale à $\frac{3V+4w}{7}$, il vient enfin pour son expression :

$$u = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}} + \frac{3}{7}\sqrt{\frac{2}{9\varepsilon}}\sqrt{Ri}.$$

Si l'on remarque maintenant que l'expression générale consacrée par l'expérience pour la vitesse moyenne, lorsque l'on considère le frottement comme proportionnel à un binôme de la forme $a_0 w + b_0 w^2$ est

$$a u + b u^2 = \frac{\mathrm{R}\, i}{2},$$

il viendra pour la valeur de u :

$$u = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{\mathrm{R}\, i}{2\, b}},$$

expression qui, bien que présentant une grande analogie avec la précédente, n'offre plus cependant une forme identique.

Mais il faut remarquer que cette identité ne pouvait exister, car l'équation de la vitesse moyenne telle qu'elle a été empiriquement établie ne saurait être théoriquement rigoureuse ; elle suppose, en effet, qu'il existe, même dans l'hypothèse où l'on représente le frottement par la formule binôme, un rapport constant entre la vitesse à la paroi et la vitesse moyenne

$$\frac{u}{w} = m, \quad \text{d'où} \quad w = \frac{u}{m},$$

et que par conséquent on puisse passer de l'équation de la vitesse à la paroi

$$a_0 w + b_0 w^2 = \frac{\mathrm{R}\, i}{\mathrm{II}}$$

à celle de la vitesse moyenne, par la substitution de la relation ci-dessus posée, d'où

$$\frac{a_0}{m} u + \frac{b_0}{m^2} u^2 = \frac{\mathrm{R}\, i}{2},$$

mais si une semblable hypothèse suffit aux exigences de la pratique, rien ne la justifie, comme le fait observer de Prony, sous le rapport théorique.

Rapprochons maintenant les deux expressions de la vitesse moyenne :

$$u = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{\mathrm{R}i}{2b_0}} + \frac{3}{7}\sqrt{\frac{2}{9\varepsilon}}\sqrt{\mathrm{R}i},$$

$$u = -\frac{ma_0}{2b_0} + m\sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{\mathrm{R}i}{2b_0}},$$

la première donnant l'expression théorique et la seconde l'expression empirique approchée de la vitesse moyenne, et voyons dans quelles conditions ces deux expressions doivent converger vers une forme identique, et finir même par la présenter.

Cela arrivera toutes les fois que le terme sous le radical $\frac{a_0^2}{4b_0^2}$ pourra, sans erreur notable, être négligé en présence du second terme $\frac{\mathrm{R}i}{2b_0}$; or cette circonstance se présentera fréquemment, parce que le coefficient de la première puissance est toujours beaucoup plus petit que celui de la seconde puissance de la vitesse : on sait, par exemple, que dans la formule de Prony le rapport de ces coefficients est, en ce qui concerne la vitesse moyenne, égal à 0,05.

Or, dans le cas où la suppression du premier terme sous le radical peut être opérée, les deux équations précédentes se réduisent à celles qui suivent:

$$u = -\frac{a_0}{2b_0} + \left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{R}i}{2b_0}},$$

$$u = -\frac{ma_0}{2b_0} + m\sqrt{\frac{\mathrm{R}i}{2b_0}},$$

expressions de même forme, et d'où l'on peut déduire, par l'élimination de u, le rapport m existant entre les vitesses moyenne et à la paroi. Sa valeur est

$$m = \frac{-\frac{a_0}{2b_0} + \left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)\sqrt{\frac{\mathrm{R}i}{2b_0}}}{-\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{\mathrm{R}i}{2b_0}}},$$

laquelle ne prendrait la forme suivante, qui donne à m une valeur constante,

$$m = 1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}},$$

que dans l'hypothèse où $a_0 = 0$; c'est-à-dire lorsque l'on admet que les phénomènes de l'écoulement de l'eau dans les tuyaux peuvent être représentés par les formules monômes :

$$\frac{Ri}{2} = b_0 w^2, \qquad \frac{Ri}{2} = b_1 u^2,$$

w et u étant la vitesse à la paroi et la vitesse moyenne.

On a dans ce cas, comme il a été déjà dit,

$$u = \left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right) w.$$

Je vais montrer maintenant que l'équation d'équilibre

$$-\varepsilon \frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2},$$

fondée sur l'hypothèse de M. Navier, ne saurait conduire à l'expression de la vitesse moyenne consacrée par l'expérience, et qu'ainsi elle ne supporte pas la vérification *a posteriori*, à laquelle au contraire répond convenablement l'équation nouvelle

$$\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2}.$$

On tire de l'équation

$$-\varepsilon \frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2},$$

$$v = -\frac{r^2 i}{4\varepsilon} + c,$$

ou en appelant V la vitesse maximum,

$$v = V - \frac{r^2 i}{4\varepsilon},$$

et pour la relation entre la vitesse maximum V et celle à la paroi w,

$$V - w = \frac{R^2 i}{4\varepsilon}.$$

On a d'ailleurs dans cette hypothèse, entre la vitesse moyenne, la vitesse maximum et la vitesse à la paroi, la relation

$$u = \frac{V+w}{2}$$

et par conséquent

$$V - u = \frac{R^2 i}{8\varepsilon},$$

d'où il suit que, d'après l'hypothèse de M. Navier, la différence entre les vitesses maximum et moyenne serait proportionnelle au produit du carré du rayon moyen par la pente.

Or, l'expérience donne, en supposant le frottement simplement proportionnel au carré de la vitesse,

$$V = \alpha' \sqrt{\frac{R i}{2}}$$

$$u = \alpha \sqrt{\frac{R i}{2}}$$

d'où :

$$V - u = (\alpha' - \alpha) \sqrt{\frac{R i}{2}}$$

résultat tout à fait différent de celui auquel l'hypothèse de M. Navier vient de nous conduire.

Si nous voulons maintenant obtenir les valeurs de V et de u dans cette même hypothèse, il sera nécessaire de poser l'équation de la vitesse à la paroi $b_0 w^2 = \frac{R i}{2}$, laquelle, combinée avec l'équation $V - w = \frac{R^2 i}{4\varepsilon}$, permettra d'arriver aux valeurs suivantes de w et V :

$$w = \sqrt{\frac{R i}{2 b_0}},$$

$$V = \sqrt{\frac{R i}{2 b_0}} + \frac{R^2 i}{4\varepsilon},$$

d'où enfin

$$u = \frac{V+w}{2} = \frac{R^2 i}{8\varepsilon} + \sqrt{\frac{R i}{2 b_0}}$$

au lieu de

$$u = \alpha \sqrt{\frac{R i}{2}}.$$

Ces rapprochements suffisent, ce me semble, pour démontrer la nécessité de substituer de nouvelles hypothèses à celles adoptées par M. Navier; mais, ainsi que je l'ai déjà dit, je ne dois qu'à l'expérience la connaissance de l'équation d'équilibre

$$\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2},$$

et, bien que cette expression soit assez simple, il ne m'a point été donné de pénétrer la raison philosophique de son existence.

Sans doute, il n'est pas difficile d'admettre que la résistance éprouvée par un filet fluide soit proportionnelle à $\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ au lieu de l'être à $\frac{dv}{dr}$, ainsi que le suppose M. Navier, sans preuve à l'appui; il est possible même que cette résistance soit représentée par un binôme comprenant la première et la seconde puissance de $\frac{dv}{dr}$. On verra tout à l'heure les motifs qui justifient cette assertion. Il est plus difficile, il faut en convenir, de se rendre compte de l'intervention du rayon du tuyau dans l'équation d'équilibre, avec l'hypothèse du mouvement du liquide par filets s'avançant régulièrement et parallèlement entre eux.

Cependant, l'expérience a décidé que la grandeur de la section devait jouer un rôle dans l'équation d'équilibre; il est donc nécessaire d'admettre que le mouvement du fluide absorbe une certaine portion de travail qui n'est plus mesurée par le carré de l'inclinaison des tangentes de la courbe des vitesses.

Entrons dans quelques explications à ce sujet:

L'hypothèse du mouvement de l'eau s'écoulant par filets paral-

lèles et conservant entre eux leur indépendance est une abstraction pure; elle semble entièrement incompatible, d'une part, avec l'extrême mobilité des molécules fluides et, d'autre part, avec la viscosité qui relie ces dernières entre elles : une pareille hypothèse a pour résultat d'assimiler l'avancement relatif des diverses couches animées de la même vitesse, dans un tuyau, au développement graduel des divers tubes concentriques qui composent une lunette. Or, cette assimilation est sans vérité, et la formule algébrique qui reposait sur cette hypothèse unique ne pouvait représenter les faits observés, soit que l'on prît pour expression de la résistance due à la vitesse relative des couches $\varepsilon \frac{dv}{dr}$, comme M. Navier, ou $\varepsilon \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ et même $\varepsilon_1 \frac{dv}{dr} + \varepsilon \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$.

Ces expressions, en effet, ne concernent que le mouvement de translation des couches en contact; or ce mouvement ne peut être le seul qui anime les particules fluides du volume d'eau que le tuyau mène.

Et d'abord dans la couche en contact avec les aspérités de la paroi doivent se former des tourbillons qui se communiquent de proche en proche en s'affaiblissant; ensuite chaque filet a sa vitesse propre et deux filets contigus présentent toujours une différence dans leurs vitesses; le plus rapide, conséquence de la viscosité, tend à entraîner son voisin, et ce dernier réagit contre cette action. Dans cette lutte, et à raison de la mobilité des particules fluides, il paraît impossible de se refuser à admettre la naissance de mouvements giratoires par groupements moléculaires.

Or, les diverses expressions posées ci-dessus comme mesure de la résistance engendrée par l'avancement relatif des filets ne tiennent aucun compte de ces mouvements giratoires; ces derniers cependant doivent absorber une certaine portion de travail que la formule de M. Navier laisse échapper, et que les expressions de la résistance que je propose de leur substituer laisseraient échapper comme elle, sans le facteur que l'expérience m'a révélé pour les compléter, au moins approximativement.

En effet, ni l'expression $\frac{dv}{dr}$ adoptée par M. Navier, comme proportionnelle à la résistance engendrée par les couches glissant les unes sur les autres, ni l'expression $\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ ne conduiraient aux valeurs empiriques de la vitesse moyenne et de la vitesse maximum; et si l'on remarque, par exemple, que de l'hypothèse de M. Navier résulterait cette conséquence, précédemment indiquée, que la différence entre ces vitesses croîtrait proportionnellement à $R^2 i$ au lieu de grandir simplement comme $\sqrt{R\,i}$, ainsi qu'il résulte de l'expérience, on est en droit de conclure qu'il y a, dans cette hypothèse, une perte de travail que l'on n'a point prise en considération, ou même une résistance qui n'a pas été assez évaluée, puisque l'accroissement de la différence $V - u$, déduit des formules, est plus rapide qu'il ne devrait l'être.

Or, j'inclinerais à penser que le terme $\frac{dv}{dr}$ donne lieu à *cette résistance trop peu évaluée*, $\frac{dv}{dr}$ devant être remplacé par $\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$; quant à la perte de travail dont il n'a pas été tenu compte, pourquoi ne résulterait-elle pas des mouvements giratoires des groupements moléculaires; et pourquoi ces mouvements ne dépendraient-ils pas eux-mêmes de la grandeur absolue de la section?

Comment se fait-il maintenant que la formule se complète et permette d'arriver aux expressions empiriques connues, en multipliant le terme $\varepsilon \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$, que je substitue à celui $\varepsilon \frac{dv}{dr}$ résultant de l'hypothèse de M. Navier, par le carré du rayon ou R^2? Comment se fait-il qu'en prenant l'expression $\frac{dv}{dr}$, qui s'applique aux vitesses très-faibles et aux tuyaux de petits rayons, on parvienne également à représenter les phénomènes en multipliant $\frac{dv}{dr}$ par R?

Je l'ignore encore, mais ce sont là des faits qu'il faut bien admettre et qui prouvent, irrésistiblement, que la grandeur absolue de la section a une influence positive sur la résistance totale qui

prend naissance dans la marche inégale des diverses couches fluides superposées.

Plusieurs phénomènes hydrauliques ne semblent-ils pas, d'ailleurs, venir à l'appui de cette supposition?

Ne voit-on pas, en effet, les mouvements oscillatoires des colonnes piézométriques qui mesurent les pressions exercées en un point déterminé des conduites, grandir, non-seulement avec la vitesse du liquide, mais encore avec le diamètre des tuyaux? Ne voit-on pas le même phénomène se produire en plaçant la branche horizontale du tube de Pitot dans des courants plus ou moins rapides, ou d'une section plus ou moins grande, mais animés de vitesses égales? Ne remarque-t-on pas dans les canaux découverts les ondulations qui courent à la surface se prononcer davantage avec l'accroissement de la section et diminuer avec la vitesse? Sous ce dernier rapport j'ai fait une observation qui n'est pas sans intérêt : je voyais constamment ces ondulations s'affaiblir en même temps que la rugosité de la paroi augmentait, c'est-à-dire avec la diminution de la vitesse; la rugosité n'était donc pas la cause déterminante des ondulations qui paraissent dépendre principalement de la vitesse moyenne, ou bien encore de la flèche de la courbe des vitesses, flèche dont l'expression est

$$V - w = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{Ri}{2b_0}} = \frac{\sqrt{2Ri}}{3\sqrt{\varepsilon}},$$

et qui grandit, par conséquent, proportionnellement à la vitesse moyenne.

D'où peuvent naître ces mouvements ondulatoires et oscillatoires qui n'ont échappé à l'œil d'aucun observateur? Ne pourrait-on pas leur assigner comme cause première ces mouvements giratoires des groupements moléculaires que les différences de vitesse des filets doivent déterminer, et n'y aurait-il pas dans tous ces mouvements divers que l'on rapporterait ainsi à une cause unique, je suis loin de dire une raison précise, mais une raison suffisamment plausible de l'intervention de la grandeur absolue de la section dans l'équation d'équilibre?

Je n'ai point parlé des mouvements obliques du fluide, mouvements qui sembleraient accusés par les corps en suspension, lesquels se dirigent, en général, vers les points animés d'une vitesse plus grande; l'explication de ce phénomène, en effet, peut résulter, ainsi que plusieurs hydrauliciens l'ont fait observer, des différences de pressions auxquelles ces corps sont assujettis et non d'un mouvement particulier du fluide. Je ne crois pas qu'en général ce phénomène puisse indiquer un afflux réel des particules fluides vers les points du plus grand débit; on ne saurait lui assigner pour cause l'alimentation des filets doués d'une vitesse supérieure. De quelle façon, en effet, dans cette hypothèse, les molécules enlevées aux filets doués de moindre vitesse pourraient-elles être remplacées? C'est vers l'origine du tuyau que le mouvement paraît se régler, et que chaque filet prend la vitesse qui lui est propre.

Dans les premiers mètres le mouvement semble désordonné, tumultueux; tous les filets doivent sortir du réservoir avec des vitesses à peu près égales, soumis qu'ils sont tous à une pression peu différente dans le réservoir; bientôt les résistances à la paroi font ressentir leur influence, la vitesse des filets augmente avec leur rapprochement de l'axe du tuyau, et l'appel des molécules nécessaires à la dépense de chaque filet est réglé par les vitesses qu'ils prennent à la naissance définitive du régime uniforme. Il semblerait ainsi que chaque filet exerce dans le milieu d'où il émane une sorte de succion proportionnée à sa vitesse. Ce ne sont point, en effet, des différences de pression qui font naître les différences de vitesse, puisque tous les filets sont soumis à la pression unique accusée par le piézomètre placé à l'origine du tuyau.

Pourquoi ne se passerait-il pas là un effet analogue à celui que j'ai plusieurs fois constaté, lorsque je supprimais brusquement une portion de la hauteur qui mettait un tuyau en charge : le mouvement se continuait longtemps avec une vitesse supérieure à celle due à la nouvelle charge; ce n'était plus dans ce cas le ré-

servoir qui fonctionnait seul, la vitesse ancienne et non encore amortie du fluide ajoutait à son action en produisant une succion sur l'eau du réservoir : succion au reste que j'ai directement constatée ainsi qu'on l'a vu page 229.

Sans doute, je n'ai pas eu la prétention, dans les lignes précédentes, de rendre compte des mouvements en apparence si compliqués que présente un fluide en s'écoulant, mouvements qui doivent être assujettis cependant à des lois fixes et mathématiques dont on découvrira peut-être un jour l'expression algébrique sous le désordre apparent qui les voile; mais, dans l'impossibilité où j'étais de préciser philosophiquement la raison de l'intervention de la grandeur absolue de la section du tuyau dans l'équation d'équilibre, j'ai voulu au moins essayer de faire entrevoir la nécessité de cette intervention, et de montrer en outre que l'expérience désavoue les lois algébriques essayées pour l'écoulement des fluides, lorsqu'on n'introduisait pas, dans les équations du mouvement par filets parallèles, la grandeur absolue de la section du tuyau.

J'ai dit plus haut qu'il était possible que la résistance éprouvée par un filet fluide dépassant le filet voisin fût représentée par une expression de la forme

$$\varepsilon_1 \, R \, \frac{dv}{dr} + \varepsilon \, R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2.$$

Ce binôme se réduisant au second terme quand $\varepsilon_1 \, R \, \frac{dv}{dr}$ peut être négligé devant $\varepsilon \, R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$, et au premier quand $\varepsilon \, R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ peut disparaître devant $\varepsilon_1 R \, \frac{dv}{dr}$, de même que l'expression générale du frottement de l'eau contre les parois

$$a_0 \, w + b_0 \, w^2,$$

tantôt se réduit à $b_0 \, w^2$ et tantôt à $a_0 \, w$, comme nous l'avons successivement constaté dans les expériences précédemment relatées.

Nous avons vu que l'expression de la résistance des filets $\varepsilon \, R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$

correspondait à la première hypothèse : l'expression $\varepsilon_1 \mathrm{R} \frac{di}{dr}$ correspond-elle aussi bien à la seconde ?

Nous avons trouvé que dans ce cas la vitesse moyenne du tuyau résultait de la relation

$$u = \frac{\mathrm{R}}{2a_1} i.$$

Voyons si nous tirerons une même valeur pour la vitesse moyenne de la relation

$$-\varepsilon_1 \mathrm{R} \frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2}.$$

On en déduit, en appelant V et w les vitesses maximum et à la paroi, et v une vitesse quelconque,

$$\mathrm{V} - v = \frac{r^2}{4\mathrm{R}\varepsilon_1} i,$$

$$\mathrm{V} - w = \frac{\mathrm{R}}{4\varepsilon_1} i,$$

$$\frac{\mathrm{V} - v}{\mathrm{V} - w} = \frac{r^2}{\mathrm{R}^2}.$$

d'où, pour la vitesse moyenne,

$$\pi \mathrm{R}^2 u = \int_{\mathrm{R}}^{0} \left[\mathrm{V} - (\mathrm{V} - w)\frac{r^2}{\mathrm{R}^2}\right] 2\pi r dr,$$

d'où

$$u = \frac{\mathrm{V} + w}{2}.$$

Or, nous avons déjà entre V et w la relation

$$\mathrm{V} - w = \frac{\mathrm{R}i}{4\varepsilon_1},$$

de plus, on peut poser pour la vitesse à la paroi l'équation suivante qui résulte de notre hypothèse même,

$$a_0 w = \frac{\mathrm{R}i}{2},$$

donc

$$V = \frac{R i}{2 a_0} + \frac{R i}{4 \varepsilon_1},$$

donc enfin

$$u = \frac{\frac{2 R i}{2 a_0} + \frac{R i}{4 \varepsilon_1}}{2} = \frac{R i}{2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{4 \varepsilon_1} \right),$$

expression de même forme que celle qui nous a été donnée par l'expérience.

On tirerait de là, pour la relation existant entre le coefficient de la vitesse moyenne et celui de la vitesse à la paroi

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{4 \varepsilon_1}, \quad \text{d'où} \quad a_1 = 4 \frac{a_0 \varepsilon_1}{a_0 + 4 \varepsilon_1} \quad \text{et} \quad a_0 = 4 \frac{a_1 \varepsilon_1}{4 \varepsilon_1 - a_1}.$$

Quant au rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximum, il est donné par l'expression

$$\frac{u}{V} = \frac{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{4 \varepsilon_1}}{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2 \varepsilon_1}} = \frac{1}{2} \frac{4 \varepsilon_1 + a_0}{2 \varepsilon_1 + a_0}.$$

L'hypothèse de M. Navier aurait conduit aux valeurs suivantes pour la vitesse maximum et pour la vitesse moyenne :

$$V = \frac{R i}{2 a_0} + \frac{R^2 i}{4 \varepsilon} = \frac{R i}{2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{R}{2 \varepsilon} \right),$$

$$u = \frac{R i}{2 a_0} + \frac{R^2 i}{8 \varepsilon} = \frac{R i}{2} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{R}{4 \varepsilon} \right),$$

d'où, pour le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse maximum,

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0 + 4 \frac{\varepsilon}{R}}{a_0 + 2 \frac{\varepsilon}{R}} \right),$$

équations qui ne s'accordent pas davantage avec les faits observés.

On voit donc que tout concourt à prouver l'influence de la grandeur absolue de la section sur la résistance, et, par consé-

quent, à justifier l'expression que nous avons posée :

$$\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2}.$$

Nous terminerons ces considérations en recherchant ce que deviendrait l'expression générale de la vitesse maximum et de la vitesse moyenne en fonction de la vitesse à la paroi, dans le cas où l'on donnerait à la résistance la forme que nous avons précédemment indiquée

$$\varepsilon_1 R \frac{dv}{dr} + \varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2,$$

laquelle paraît résulter de cette double circonstance que, lorsque le rayon du tuyau est grand et la courbe des vitesses suffisamment prononcée, l'expression de la résistance se mesure par la fonction $\varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2$, tandis qu'elle se réduit au monôme $\varepsilon R \frac{dv}{dr}$ lorsque le rayon est petit et que la courbe des vitesses a peu de flèche.

On peut donc en induire que la formule qui embrasserait les deux cas, serait le binôme ci-dessus posé.

Nous avons vu qu'à la paroi on avait dans le cas le plus général

$$a_0 w + b_0 w^2 = \frac{R i}{2},$$

d'où

$$w = -\frac{a_0}{2 b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4 b_0^2} + \frac{R i}{2 b_0}},$$

de plus, l'équation de la courbe des vitesses est, dans l'hypothèse précitée,

$$2 \pi r \left[\varepsilon_1 R \frac{dv}{dr} + \varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2\right] = \pi r^2 i,$$

d'où

$$\varepsilon_1 R \frac{dv}{dr} + \varepsilon R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2},$$

on en déduit, en remarquant que le coefficient de $\frac{dv}{dr}$ doit être pris avec le signe — puisque v croît quand r diminue,

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon R} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{4\varepsilon R^2} + \frac{ri}{2\varepsilon R^2}},$$

R étant le rayon du tuyau, r le rayon d'un cylindre liquide quelconque.

L'intégration de cette équation donne

$$v = \frac{\varepsilon_1 r}{2\varepsilon R} - \frac{2}{3}\frac{1}{4\varepsilon^2 R i}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon r i)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Lorsque $r = 0$, v devient la vitesse maximum ou la vitesse au centre, on a donc

$$V = -\frac{\varepsilon_1^3}{6\varepsilon^2 R i} + c,$$

d'où

$$v = V + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon R}\left(r + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon i}\right) - \frac{1}{6\varepsilon^2 R i}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon r i)^{\frac{3}{2}}.$$

Lorsque $r = R$, v devient w ou la vitesse à la paroi et l'on a entre w et V la relation

$$w = V + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon R}\left(R + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon i}\right) - \frac{1}{6\varepsilon^2 R i}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon R i)^{\frac{3}{2}}.$$

Lorsque $\varepsilon_1 = 0$, ou que l'expression de la résistance prend la forme monôme $\varepsilon R^2\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$, les équations précédentes se réduisent : la première à

$$v = V - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\varepsilon}}\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R} i^{\frac{1}{2}},$$

la seconde à

$$w = V - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{Ri},$$

expressions déjà trouvées.

La valeur de la vitesse moyenne en fonction de la vitesse maximum résultera de l'équation

$$\pi R^2 u = \int_R^0 \left[V + \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon R}\left(r + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon i}\right) - \frac{1}{6\varepsilon^2 R i}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon r i)^{\frac{3}{2}}\right] 2\pi r dr,$$

laquelle, intégrée entre les limites o et R, conduit à la suivante:

$$u = V + \frac{\varepsilon_1}{3\varepsilon R}\left(R + \frac{\varepsilon_1^2}{2\varepsilon i}\right) - \frac{(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon R i)^{\frac{5}{2}}}{6\varepsilon^4 R^3 i^3}\left[\frac{1}{7}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon i R) - \frac{\varepsilon_1^2}{5}\right] - \frac{\varepsilon_1^7}{105\varepsilon^6 i^3 R^3},$$

lorsque $\varepsilon_1 = o$, elle se réduit, comme cela devait être, à

$$u = V - \frac{4}{7}\frac{\sqrt{2Ri}}{3\sqrt{\varepsilon}}$$

On a donc, en définitive, pour les valeurs de la vitesse maximum et de la vitesse moyenne exprimées en fonction des coefficients de la résistance à la paroi, et des actions intérieures,

$$V = \left(\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6\varepsilon^2 Ri}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon Ri)^{\frac{3}{2}} - \frac{a_0}{2b_0} - \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon R}\left(R + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon i}\right)$$

$$u = \left(\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6\varepsilon^2 Ri}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon Ri)^{\frac{3}{2}} - \frac{a_0}{2b_0}$$

$$- \frac{(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon i R)^{\frac{5}{2}}}{6\varepsilon^4 i^3 R^3}\left[\frac{1}{7}(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon i R) - \frac{\varepsilon_1^2}{5}\right] - \frac{1}{105 R^3 i^3}\frac{\varepsilon_1^7}{\varepsilon^4} - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon},$$

expressions beaucoup trop compliquées pour qu'il soit possible de songer à en faire usage dans la pratique, mais qui justifient complétement cette réflexion de Prony (page 79 des *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*):

« Quelque satisfaisant que soit l'accord entre la formule de l'article 196 (il s'agit de l'expression de la vitesse moyenne), je dois cependant faire remarquer une circonstance qui peut faire regarder cette formule comme une simple règle de calcul empirique, et qui tient à ce que les observations semblent indiquer qu'on peut déterminer u et V (vitesse moyenne et vitesse maximum) indépendamment de la figure, de la grandeur, de la pente, etc. du canal; elle n'en tient aucun compte. Il est cependant difficile de se persuader que ces divers éléments n'aient aucune influence sur les relations entre V, w et u, mais il fallait pourvoir d'abord aux besoins de la pratique par des règles suffi-

samment exactes pour les cas qu'elle a à traiter; et la recherche des lois générales et rigoureuses auxquelles les phénomènes sont assujettis, offre encore un problème où les géomètres et les physiciens trouveront à s'exercer sur des objets dignes de leur attention et de leur intérêt. »

Si maintenant nous faisons successivement dans les deux équations précédentes

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad a_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0,$$

nous trouverons pour les valeurs de V et de u:

1°
$$V = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}} + \sqrt{\frac{2Ri}{9\varepsilon}},$$

$$u = -\frac{a_0}{2b_0} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4b_0^2} + \frac{Ri}{2b_0}} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{2Ri}{\varepsilon}},$$

2°
$$V = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

$$u = \sqrt{\frac{Ri}{2b_0}}\left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

expressions auxquelles nous sommes déjà parvenus directement dans les hypothèses précitées.

On a vu, par la discussion précédente, que l'hypothèse faite par M. Navier pour représenter les actions mutuelles des filets fluides ne permettait pas d'arriver aux lois empiriques que l'expérience a révélées en ce qui concerne les relations qui lient les vitesses maximum et moyenne au rayon moyen et à la pente du tuyau, relations d'où l'on peut déduire l'expression suivante, dans l'hypothèse où l'on ne conserve que le terme où la vitesse est élevée au carré pour représenter les résistances à la paroi,

$$V - u = \alpha\sqrt{Ri},$$

V étant la vitesse maximum, u la vitesse moyenne, R et i le rayon et la pente du tuyau.

On a vu, de plus, comment j'étais parvenu à représenter ces actions mutuelles par une fonction qui m'a permis au contraire de retrouver les formules consacrées par l'expérience; mais il est possible, ainsi que me l'a fait observer M. l'ingénieur Bazin, au lieu de justifier *a posteriori* mon opinion, de trouver directement la valeur des exposants indéterminés de l'expression

$$c\,\mathrm{R}\,\left(\frac{dv}{dr}\right)^n = \frac{ri}{2},$$

ou de l'équation d'équilibre du cylindre fluide du rayon r, de manière à satisfaire à la relation nécessaire

$$v - u = \alpha\sqrt{\mathrm{R}i}.$$

Extrayant, en effet, la racine $n^{ième}$, il viendra

$$-\,\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}\frac{dv}{dr} = \frac{1}{\sqrt[n]{2c}}\,ri^{\frac{1}{n}}$$

(v croissant lorsque r décroît, le coefficient différentiel $\frac{dv}{dr}$ doit être pris avec le signe —). Intégrant maintenant cette expression, on aura

$$-\,\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}v = c_0 + \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2c}}\cdot i^{\frac{1}{n}}\cdot r^{\frac{n+1}{n}}.$$

Lorsque $r = 0$, v devient la vitesse au centre ou V; donc $c_0 = -\,\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}\mathrm{V}$, d'où

$$\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}(\mathrm{V} - v) = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2c}}\cdot i^{\frac{1}{n}}\cdot r^{\frac{n+1}{n}}.$$

Donnant à r la valeur μ R qui convient à la vitesse moyenne u, il viendra

$$\mathrm{R}^{\frac{m}{n}}(\mathrm{V} - u) = \frac{n}{n+1}\,\frac{\mu^{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt[n]{2c}}\cdot i^{\frac{1}{n}}\cdot \mathrm{R}^{\frac{n+1}{n}},$$

d'où

$$V - u = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\mu^{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt[n]{2c}} : i^{\frac{1}{n}} \cdot R^{\frac{n+1-m}{n}}.$$

Or, maintenant, pour que cette expression soit identique à la relation précédemment posée

$$V - u = \alpha \sqrt{R i},$$

il faut que l'on ait

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n+1-m}{n} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$n = 2, \quad m = 2,$$

d'où enfin

$$c R^2 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \frac{ri}{2},$$

équation, comme on se le rappelle, déduite de nos expériences. Si, au lieu de partir de la relation expérimentale $V - u = \alpha\sqrt{Ri}$, nous prenons la suivante $V - u = \alpha R i$ qui a lieu pour les très-faibles vitesses dans les tuyaux de très-petits diamètres, on obtiendrait pour déterminer m et n les équations suivantes :

$$\frac{1}{n} = 1, \quad \frac{n+1-m}{n} = 1,$$

d'où

$$n = 1, m = 1;$$

d'où enfin pour l'équation d'équilibre du cylindre liquide de rayon r

$$- c R \frac{dv}{dr} = \frac{ri}{2}.$$

N'a-t-on pas maintenant le droit de conclure que dans l'équation plus générale

$$c_0 R^{m} \left(\frac{dv}{dr}\right)^{n} + c_1 R^{m_1} \left(\frac{dv}{dr}\right)^{n_1} = \frac{ri}{2},$$

m et n sont égaux à 1, ainsi que m_1 et n_1 à 2, puisque, suivant les

cas considérés, l'un des termes disparaissant devant l'autre, il faut retrouver les expressions monômes précédemment démontrées?

Je me bornerai à ces dernières réflexions, qui me semblent compléter la justification de la formule à laquelle j'ai cru devoir recourir pour exprimer la vitesse relative des filets fluides dans un tuyau; j'insisterai d'ailleurs sur cette circonstance, que les équations de condition ne donnant jamais $m = 0$, apportent la preuve que la grandeur absolue du rayon du tuyau doit intervenir dans l'équation d'équilibre d'où se déduit la courbe des filets fluides.

CHAPITRE VI.

RÉSUMÉ ET DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DE CONTRACTION À L'ENTRÉE DES CONDUITES.

On a vu dans les chapitres précédents :

1° Que la résistance éprouvée par le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite pouvait être représentée par des expressions de la forme :

$$av + bv^2,$$

ou

$$b_1 v^2,$$

dans lesquelles a et b ou b_1 variaient suivant des lois données par les formules

$$a = 0{,}000.031.635 + \frac{0{,}000.000.003{,}755.6}{R^2},$$

$$b = 0{,}000.442.939 + \frac{0{,}000.006.201}{R},$$

$$b_1 = 0{,}000.51 + \frac{0{,}000.0065}{R};$$

2° Que l'expression $av + bv^2$ s'appliquait plus spécialement

aux tuyaux avec parois lisses, et que le rapport de a et b grandissait avec le degré de poli des parois.

Au contraire, que pour les tuyaux recouverts de dépôts ou lorsque la vitesse devenait grande, c'était à l'expression $b_1 v^2$ qu'il convenait de recourir, les résistances comprises dans le premier terme disparaissant en présence de celles auxquelles le second terme se rapporte.

3° On a remarqué que ces lois semblaient disparaître dans les tuyaux de très-faibles diamètres à parois lisses, et pour des vitesses qui ne dépassaient pas 9 à 10 centimètres par seconde; qu'alors, et dans cet intervalle et dans ces conditions, la vitesse du liquide dans le tuyau grandissait suivant une ligne droite dont les ordonnées croissaient proportionnellement aux pentes.

4° Il a été établi que toutes ces lois étaient indépendantes des pressions exercées dans les tuyaux.

5° On est arrivé expérimentalement à une formule (dont j'ai cherché à légitimer théoriquement l'existence) pour exprimer la loi des vitesses relatives des filets fluides dans une même section normale à l'axe du tuyau; cette expression,

$$V - v = 11{,}30 \frac{r^{\frac{1}{2}}}{R} \sqrt{i},$$

dans laquelle V donne la vitesse au centre et v une vitesse quelconque à la distance r de l'axe, a permis de trouver la valeur de la vitesse moyenne en fonction des vitesses à la paroi et au centre, ou

$$u = \frac{3V + 4w}{7}$$

et la distance à laquelle elle est située de l'axe du tuyau.

Cette relation a donné encore les moyens d'obtenir l'expression générale de la vitesse à la paroi, dans l'hypothèse de la relation suivante entre la vitesse moyenne et la pente :

$$\frac{Ri}{2} = b_1 u^2,$$

cette expression est

$$\frac{\mathrm{R}\,i}{2} = \frac{49\,b_1}{(7 - 3\,\mathrm{K}\sqrt{2\,b_1})^2}\,w^2 = \frac{49\,b_1}{\left(7 - 2\sqrt{\frac{b_1}{\varepsilon}}\right)^2}\,w^2 \text{ [1]},$$

dans laquelle w représente la vitesse à la paroi, quant à la vitesse au centre du tuyau, ou à la vitesse maximum, elle est donnée par la relation

$$\mathrm{V} - w = \mathrm{K}\sqrt{\mathrm{R}\,i},$$

d'où résulte

$$\mathrm{V} = \left[\mathrm{K} + \frac{(7 - 3\,\mathrm{K}\sqrt{2\,b_1})}{7\sqrt{2\,b_1}}\right]\sqrt{\mathrm{R}\,i}$$

d'où résulte, pour le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse au centre,

$$\frac{u}{\mathrm{V}} = \frac{7}{7 + 4\,\mathrm{K}\sqrt{2\,b_1}}$$

expression en fonction de b_1, c'est-à-dire de l'état des surfaces et du rayon du tuyau, du moins jusqu'à une certaine limite.

On trouverait que ce rapport dépend encore de la pente si l'on conservait la première et la seconde puissance de la vitesse pour mesurer la résistance due aux frottements contre les parois

6° Il paraît résulter de l'expérience que la rugosité des surfaces est sans action appréciable sur la flèche de la courbe des vitesses des filets fluides; que, de plus, une impulsion liquide à l'amont quelque vive qu'elle soit, n'exerce sur elle aucune influence, mais qu'elle paraît s'allonger sous l'impression d'un accroissement de vitesse à l'aval.

7° Enfin, j'ai obtenu en fonction de la résistance à la paroi et de la cohésion de l'eau :

[1] Il faut se rappeler les observations de la page 311 pour tirer du tableau du quatrième chapitre, page 252, la véritable valeur de b_1 à substituer dans l'expression ci-dessus ou dans le coefficient de la résistance à la paroi.

1° La vitesse à la paroi,

$$w = \sqrt{\frac{\mathrm{R}\,i}{2\,b_0}},$$

2° La vitesse au centre,

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}\,i}{2\,b_0}}\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right),$$

3° La vitesse moyenne,

$$u = \sqrt{\frac{\mathrm{R}\,i}{2\,b_0}}\left(1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)$$

4° Le rapport de la vitesse moyenne à la vitesse au centre,

$$\frac{u}{\mathrm{V}} = \frac{1 + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}}$$

On connaît la valeur de ε; quant à b_0, on le déduit de l'équation

$$b_0 = \frac{1}{2}\,\frac{49\,b_1}{(7 - 3\,\mathrm{K}\sqrt{b_1})^2} = \frac{1}{2}\,\frac{49\,b_1}{\left(7 - \sqrt{2}\sqrt{\frac{b_0}{\varepsilon}}\right)^2}$$

La valeur de K a été donnée, celle de b_1 se trouve dans le tableau de la page 252, chapitre IV.

Il faut bien remarquer que le coefficient b_1 qui résulte de l'expression $b_1 = \frac{\mathrm{R}\,i}{u^2}$ dépend des perturbations apportées à la vitesse moyenne par les parois.

Ces perturbations auront d'autant plus d'influence que le rayon sera plus petit, d'où la conséquence que b_1 doit varier, comme nous l'avons déjà dit et comme l'expérience l'indique.

D'où il résulte encore que b_0 sera variable jusqu'à ce qu'on arrive à un diamètre assez grand pour que les perturbations relatives ne laissent plus apercevoir de différences dans leurs effets.

Mais si l'on peut admettre sans difficulté que les coefficients de la résistance de la vitesse moyenne prennent des valeurs dif-

férentes suivant le diamètre des tuyaux, à raison de l'influence croissante des résistances à la paroi, lorsque le diamètre diminue, on se rend moins aisément compte des variations éprouvées, d'après la formule précédente, par le coefficient qui exprime les résistances à la paroi.

Aussi j'incline à penser que ces variations ne sont point réelles; en effet, la relation d'où on les déduit suppose implicitement que la loi de distribution des vitesses reste la même, quel que soit le diamètre du tuyau : or, s'il n'en était point ainsi, si cette loi ne devenait permanente qu'à partir du diamètre où les coefficients de la vitesse moyenne sont permanents eux-mêmes; en un mot, si au-dessous de ce diamètre la loi de distribution des vitesses se modifiait de telle sorte que ces dernières tendissent à s'*égaliser,* ou que le rapport de la vitesse à la paroi à la vitesse moyenne prît des valeurs de plus en plus grandes, on comprend que les variations de b_0 ne seraient qu'apparentes, et qu'elles seraient dues à un accroissement relatif de la vitesse à la paroi et non pas à un accroissement réel et absolu de la résistance.

Telles sont les principales conclusions auxquelles je suis arrivé dans les cinq premiers chapitres de ce Mémoire; il reste maintenant à déterminer la valeur du coefficient de contraction m dans l'expression posée dès le premier chapitre,

$$\frac{\mathrm{R}\,i}{g} = \left(\frac{\mathrm{R}}{4\,\mathrm{L}\,m^2\,g} + b\right) v^2 + av;$$

la détermination de cette quantité complétera, en effet, l'équation générale du mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

Mais, avant d'indiquer les expériences qui ont été exécutées dans ce but, il est peut-être utile d'essayer quelques explications sur les deux autres coefficients, dont la valeur numérique a été précédemment déterminée, et de rechercher le rôle qui leur est assigné.

En d'autres termes, à quelle partie de la résistance correspond le multiplicateur de v^2, à quelle portion le multiplicateur de v?

En remplissant d'eau des tuyaux bien desséchés avec un volume

déterminé, on remarque que le liquide qui sort de ces tuyaux laisse un déficit variable suivant l'état des surfaces.

Il résulte des expériences faites :

1° Que, même dans un tuyau *verticalement placé* et à raison de l'attraction de ses parois, une couche liquide leur reste adhérente.

2° Que l'épaisseur de cette couche est beaucoup trop faible pour faire disparaître les aspérités de la paroi; que d'ailleurs elle doit présenter une épaisseur sensiblement constante et, par conséquent, offrir à la surface le même relief que les parois elles-mêmes.

Sans doute, dans un courant, il ne peut y avoir entre les vitesses de deux filets contigus qu'une différence insensible, mais il ne saurait en être ainsi lorsqu'il s'agit de la couche adhérente; elle est, pour ainsi dire, passée à l'état *d'émail*, d'enduit aqueux de la paroi.

Évidemment, le cylindre fluide qu'elle enveloppera à son passage ne laissera point immobiles les molécules composant la paroi factice; il les animera d'une certaine vitesse de translation, de certains mouvements giratoires, mais elles finiront par s'en détacher avec des différences finies de vitesse et à des distances en rapport avec l'attraction des parois et la cohésion des molécules. Ainsi l'on voit une goutte d'eau qui, d'abord, roulait tout entière sur une plaque métallique, se diviser lorsqu'on augmente la pente, une portion restant attachée à la paroi et l'autre continuant son trajet.

Si donc, d'une part, l'attraction des parois doit être considérée comme une des causes retardatrices du mouvement, on doit reconnaître, d'autre part, que cette cause agit vraisemblablement en grande partie par l'intermédiaire de la cohésion du fluide que la surface extérieure du cylindre mobile doit surmonter.

Cela est d'autant plus plausible que l'on voit la paroi rester mouillée même dans une position verticale.

Ainsi, le mode d'agir de l'attraction des parois semblerait pouvoir se résumer ainsi :

Force nécessaire pour vaincre l'attraction des parois dans les parties où le liquide viendrait à s'en détacher, et force nécessaire pour surmonter la cohésion quand le cylindre liquide passe sur l'enduit aqueux.

Enfin, les aspérités de la surface qui viennent modifier brusquement le mouvement et la direction des filets fluides forment, évidemment, une autre cause retardatrice.

Cherchons maintenant à les classer.

Si l'on a recours à des tuyaux chargés de dépôts, ou si l'on imprime à l'écoulement une grande vitesse, c'est-à-dire si l'on augmente la partie de la résistance qui doit provenir des aspérités, le premier terme en v disparaît, le coefficient de v^2 s'accroît : donc ce dernier est au moins en partie relatif aux aspérités.

Si l'on emploie des tuyaux très-lisses, en plomb, recouverts de bitume vitrifié, etc. le coefficient de v^2 va sans cesse en diminuant au fur et à mesure que le degré de poli augmente.

Mais la diminution cependant est loin de paraître en rapport avec le degré de poli obtenu. En vain dirait-on que l'influence des aspérités insensibles à la vue subsiste pour les molécules fluides, cette explication ne semblerait pas tout à fait satisfaisante.

C'est qu'en effet le terme en v^2 ne paraît pas correspondre seulement à la résistance causée par les aspérités, mais aussi à celle que fait éprouver la couche fluide juxtaposée à la paroi.

On a pu, en effet, conclure des considérations énoncées dans le cinquième chapitre que la force nécessaire pour détacher deux molécules fluides en contact était proportionnelle à un binôme, formé de la première et de la seconde puissance de leur vitesse relative.

Ainsi, cette cause retardatrice doit encore entrer en partie dans le terme de la formule affecté du carré de la vitesse.

Et ce terme subsisterait donc, lors même que toute aspérité disparaîtrait, pourvu que les surfaces des parois fussent susceptibles d'être mouillées.

Que reste-t-il pour le premier terme? Évidemment la partie de la résistance représentée par le premier terme du monôme [1].

Une première réflexion se présente. On se demande pourquoi les coefficients de la première puissance de v varient dans les formules spéciales que nous avons calculées pour chaque tuyau, entre de grandes limites et sans loi bien saisissable.

Cela tient à ce que les formules qui ont donné ces coefficients ne sont que des formules d'interpolation dans lesquelles les éléments qui ont peu d'influence sur la représentation des phénomènes généraux sont sacrifiés à ceux qui interviennent avec une grande énergie relative [2].

Ainsi, bien que j'aie cherché à arriver à la proportionnalité des erreurs, comme il n'entrait dans les données qu'un nombre de petites vitesses bien inférieur à celui des grandes, comme de plus elles ne se trouvaient pas en même proportion dans chaque courbe, on conçoit les irrégularités qui sont venues frapper les coefficients de la première puissance.

Pour rendre à ces coefficients leur part légitime, pour trouver en un mot leur valeur véritable, il aurait fallu opérer sur de très-petites vitesses, obtenues sur des parois présentant une surface lisse.

Alors reparaîtraient la vraie valeur et la régularité du coefficient du premier terme.

C'est ce que l'expérience indique; au fur et à mesure que l'on diminue les aspérités et la vitesse, on voit descendre de plus en plus l'origine de la parabole au-dessous de l'axe des y, de manière que la représentation des phénomènes d'écoulement soit due à des arcs de parabole se rapprochant davantage de la ligne droite.

Mais si non-seulement on diminue les aspérités et les vitesses,

[1] La force attractive d'un tuyau paraît s'arrêter, dit de Prony, à la couche fluide qui tapisse la paroi, puisque la diversité des matières présentant le même poli ne fait pas varier la résistance. S'il en était autrement, le premier terme du monôme comprendrait également la résistance due à l'attraction de la paroi.

[2] Cela est tellement vrai que je suis arrivé, pour le coefficient de v, à une valeur négative, dans le tuyau en fonte recouvert de dépôts de $0^m,0359$ de diamètre.

si, de plus, on fait descendre au-dessous d'une certaine limite les diamètres des tuyaux, de telle sorte qu'à des vitesses très-petites correspondent des pentes facilement appréciables, on arrivera à donner au coefficient du premier terme une prépondérance telle, que la loi qu'il représente sortira nette des expériences, le terme en v^2 disparaissant complétement.

Ces assertions sont confirmées par le tableau suivant, dans lequel on a recueilli les expériences faites sur des tuyaux de faibles diamètres et avec de petites charges.

DIAMÈTRE.		NUMÉROS d'ordre.	PENTES i.	VITESSES v.	$R\frac{i}{v}$.	OBSERVATIONS.
DIAMÈTRE.	NATURE.					
mèt.			mèt.	mèt.		
0,0112	Fer étiré.....	1	0,000,85	0,0344	0,000,15	Voy. planche XII.
		2	0,001,84	0,0718	0,000,156	
		3	0,003,01	0,117	0,000,158	
				Moyenne.....	0,000,155	
0,0266	Fer étiré.....	26a	0,000,2	0,0353	0,000,075,28	Voy. planche XII.
		26b	0,000,235	0,0383	0,000,088,58	
		26c	0,000,25	0,0404	0,000,082,19	
		14	0,000,33	0,0578	0,000,075,9	
		26d	0,000.55	0,086	0,000,085,05	
				Moyenne.....	0,000,081,20	
0,0268	Tôle et bitume...	60	0,000,22	0,03	0,000,098	Voy. pl. VI et XII.
		61	0,000,67	0,092	0,000,097,6	
				Moyenne.....	0,000,097,8	
0,014	Plomb.....	39	0,000,64	0,040	0,000,112	Voy. planche V.
0,027		46	0,000,44	0,065	0,000,091,6	
				Moyenne.....	0,000,101,8	
0,0395	Fer étiré.....	27	0,000,22	0,0626	0,000,069,4	Voy. planche V.
0,0359	Fonte recouverte de dépôts.....	108	0,000,25	0,051	0,000,088	Voy. planche VI.

Ce tableau me paraît jeter quelque jour sur la question.

Il démontre que :

Lorsque les causes de résistance qui concourent à la formation du terme en v^2 se sont assez affaiblies pour que leur influence disparaisse en présence du premier terme de l'expression de la résistance, cette dernière devient proportionnelle à la vitesse simple du fluide.

Le frottement de l'eau, ou ce qu'on appelle le frottement de l'eau, diffère donc essentiellement de celui des corps solides.

Le second est indépendant de la dimension des surfaces en contact et de la vitesse, et proportionnel à la pression.

Le premier, dans les petites vitesses, est proportionnel aux surfaces en contact et à la vitesse, et indépendant de la pression.

Dans les moyennes vitesses, il devient proportionnel à un binôme composé de la première et de la deuxième puissance de la vitesse.

Dans les grandes vitesses, on peut faire disparaître le premier terme de ce binôme.

Je ne chercherai pas à pousser plus loin la comparaison, mais je dirai seulement qu'en vertu des observations précédentes la cause principale du frottement de l'eau, à l'exception des résistances causées par les aspérités des surfaces, paraît dépendre beaucoup plus de la force nécessaire pour vaincre la cohésion du liquide, que de celle qui, comme dans les corps solides, prend naissance dans le plan de séparation des deux corps en contact.

Pour déterminer le véritable frottement de l'eau, il faudrait qu'elle glissât sans mouiller la surface sur laquelle elle coule.

Le tableau précédent démontre ensuite que le coefficient de la résistance paraît diminuer rapidement avec l'accroissement du diamètre.

Il est en effet dans les tuyaux de fer étiré comparable pour l'état de leurs surfaces.

Diamètres.	Coefficients.
$0^m,0122$	0,000.155
0 ,0266	0,000.081
0 ,0395	0,000.069

Ce résultat était nécessaire. L'attraction des parois n'a pour effet d'immobiliser en partie qu'une couche d'épaisseur constante. Or, l'influence de cette couche sur le débit diminue au fur et à mesure que la surface augmente, et même disparaît complétement dans les grands diamètres où le rapport entre l'anneau fixé à la paroi et la surface totale peut être considéré comme infiniment petit.

La loi qui résulterait des expériences précédentes serait donnée par l'expression :

$$a = 0{,}000.028.646.92 + \frac{0{,}000.000.750.885.87}{R}\ ^{1}.$$

[1] Cette expression justifie les réflexions de la page 260 : elle donne le droit d'admettre que le coefficient de la première puissance de la vitesse est de même forme que celui de la seconde puissance de cette même vitesse.

En appelant H la charge, et L la longueur d'un tuyau, l'équation d'où l'on déduit la vitesse moyenne u prendrait donc la forme générale

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) u^2 + \left(\alpha' + \frac{\beta'}{R}\right) u = R\,\frac{H}{L}.$$

qui devient, lorsque la vitesse est très-faible,

$$\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{R}\right) u = R\,\frac{H}{L}.$$

Remplaçant la vitesse par le volume débité φ, il viendra

$$\varphi\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{R}\right) = \pi R^3\,\frac{H}{L},$$

d'où, si R est très-petit, α_1 disparaissant en présence de $\frac{\beta_1}{R}$,

$$\varphi = K' R^4\,\frac{H}{L}.$$

On voit encore sur ce tableau qu'en comparant le tuyau en plomb d'un diamètre de $0^m,027$ avec le tuyau en tôle et bitume d'un diamètre de $0^m,0268$ et le tuyau en fer étiré de $0^m,0266$, ce dernier semble présenter un coefficient de résistance un peu moins grand que les deux premiers.

Est-ce à dire que la puissance attractive représentée par la couche au repos serait plus grande dans les deux premiers que dans le troisième?

Je ne le pense pas. Cela peut tenir à quelques irrégularités de mesure des diamètres, mais surtout, je crois, à la cause suivante qui explique le sens de la différence.

La surface du tuyau de $0^m,0266$ était beaucoup plus rugueuse que celle des deux autres; lorsqu'on l'a rempli pour en déterminer la capacité et par suite le diamètre, il a pu rester entre les aspérités, soit des bulles d'air très-divisées, soit des gouttelettes d'eau, bien qu'on eût pris toutes les précautions nécessaires pour le mesurer à sec.

On sait que dans les tuyaux capillaires, M. Poiseuille a trouvé la formule

$$\varphi = K D^4 \frac{H}{L},$$

la même que ci-dessus; résultat assez remarquable, puisque nous sommes parvenus, M. Poiseuille et moi, à cette expression, au moyen d'expériences faites dans des circonstances tout à fait différentes.

L'expression générale précédente paraît donc renfermer le lien qui unit les lois de l'écoulement dans un tuyau de diamètre quelconque et dans un tuyau capillaire.

M. Girard avait trouvé qu'au delà d'une certaine longueur d'un tube de petit diamètre, on avait la relation

$$u = K'' \frac{D}{L} H.$$

Mais cette expression ne permettait pas d'arriver à la loi de M. Poiseuille : aussi MM. Arago, Babinet, Piobert et Regnault avaient-ils fait remarquer dans leur Rapport (*Comptes rendus*, t. XI, p. 1167) que la formule donnée par M. Girard ne représentait pas dans leur généralité les phénomènes de l'écoulement de l'eau dans les tubes de divers diamètres.

La relation à laquelle je suis parvenu paraît avoir ce résultat.

Son diamètre dans ce cas aurait été coté un peu au-dessous de sa valeur réelle, et, par suite, la vitesse qui résulte de la division du volume expérimental par la surface due au diamètre précédent a pu être un peu augmentée. Cette circonstance tend à expliquer la petite infériorité reconnue pour le coefficient de la résistance dans le tuyau de $0^m,0266$.

On arrive donc à admettre des nombres constants pour les coefficients de la première puissance des tuyaux de même diamètre et d'un degré de poli à peu près semblable.

Lorsqu'on jette les yeux sur le tracé des courbes dont le tableau précédent renferme les éléments, on s'aperçoit que dans les environs de l'origine des coordonnées, près de la vitesse $0^m,08$ ou $0^m,09$, ces courbes ne semblent pas assujetties à cette loi de continuité qui préside ordinairement à la succession des phénomènes naturels découlant d'une loi unique (planche XII).

A partir de l'extrémité de la ligne droite qui passe par l'origine, extrémité qui se rencontre aux abords de la vitesse de $0^m,10$, la ligne s'infléchit assez brusquement pour suivre une courbure parabolique, de telle sorte que la droite semble inscrite à cette dernière.

Il semblerait donc qu'en franchissant la vitesse de $0^m,10$ un fait nouveau se produise, lequel vient porter atteinte à la loi de continuité.

Si, par exemple, on verse une goutte d'eau sur une plaque métallique, sous les premières inclinaisons très-faibles qu'on lui donnera l'eau restera immobile; elle marchera tout entière, en vertu de la cohésion du liquide, sous des inclinaisons un peu plus fortes; puis enfin, elle se divisera plus tard, partie de son volume étant retenue par l'attraction de la plaque, si la vitesse en augmentant encore favorise son déchirement par les aspérités de la surface.

La pente de la plaque varie par des degrés insensibles et pourtant la loi de continuité n'existera pas; il se peut que, dans le phénomène précédent, il se produise quelque chose d'analogue.

Je ne pense pas, en effet, que l'apparition même simultanée des résistances dues aux aspérités et à la cohésion puisse expliquer ce défaut de continuité; car ces résistances ne naissent et ne grandissent que par d'insensibles degrés.

Mais il pourrait arriver que le cylindre liquide qui coule dans le tuyau laissât, à partir d'une certaine vitesse, une couche plus épaisse à la paroi, et si cette couche correspond à la vitesse de 9 ou 10 centimètres, le phénomène signalé sera expliqué.

C'est encore ce qui arrive lorsque l'on fait éprouver un choc à l'extrémité d'un prisme encastré; il se rompt à des distances qui sont de plus en plus éloignées de l'encastrement lorsque l'on accroît la force du choc.

Quoi qu'il en soit, il semble que deux lois apparaissent dans le phénomène produit par l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite et que ces lois, au moins dans les diamètres que j'ai employés, viennent se souder vers les vitesses de 9 à 10 centimètres.

Et, du reste, ces effets disparaissent complétement dans les tuyaux de grand diamètre, parce que les vitesses de 9 à 10 centimètres sont excessivement rapprochées de l'origine des coordonnées.

Je ne dirai plus qu'un mot sur ce sujet, c'est que si l'on voulait avoir avec exactitude des vitesses au-dessous de $0^m,10$ dans les tuyaux de petits diamètres, il faudrait se servir des relations exprimées dans la colonne (3) du tableau de la page 259 [1].

Après ces considérations générales sur les variations respectives des deux termes de la résistance, j'arrivais, dans le Mémoire ma-

[1] Pour déterminer aussi approximativement que possible, dans l'équation générale $Ri = av + bv^2$, les coefficients a et b avec les *valeurs relatives* qui leur sont propres, peut-être aurait-on dû prendre pour a les chiffres de la troisième colonne du tableau précité, et déterminer ensuite les valeurs de b au moyen de la méthode des moindres carrés; mais je n'ai point effectué ces calculs, qui ne présentaient aucun intérêt pratique. La formule monôme, en effet, suffit parfaitement pour représenter les phénomènes, et son emploi présente d'ailleurs un avantage notable dans la résolution des problèmes concernant les distributions d'eau.

nuscrit présenté à l'Institut, à la description des expériences ayant pour objet la détermination du coefficient de correction à employer pour tenir compte de la contraction qui s'opère à l'origine des conduites cylindriques.

Ces expériences m'ont conduit à assigner à ce coefficient, pour des tuyaux dont le diamètre a varié depuis $0^{m},0364$ jusqu'à $0^{m},297$, la valeur moyenne de 0,82 généralement adoptée.

La lecture du Rapport de MM. Poncelet, Combes et Morin m'a montré que je pouvais abréger ce Mémoire en supprimant le récit détaillé de ces expériences, et me borner à consigner leur résultat.

J'ignorais, en effet, que M. le général Poncelet était déjà parvenu à ce coefficient dans des expériences encore inédites faites à Toulouse par le savant académicien.

J'ajouterai d'ailleurs que, mes expériences relatives à la détermination du coefficient de correction précité n'étant pas le but de mon travail et ne s'y rattachant que très-accessoirement, je n'avais pas disposé les appareils de manière à obtenir le degré de précision que j'ai cherché à obtenir dans mes précédentes recherches.

Il y avait d'ailleurs une cause d'erreur inhérente au mode employé, et que je n'avais pas alors la possibilité de corriger.

Je dois entrer dans quelques explications à ce sujet; pour déterminer la hauteur à laquelle était due la vitesse, je prenais la différence existant entre la cote du manomètre n° 5 placé sur le réservoir et celle du manomètre n° 4 ajusté sur le tuyau à quelques centimètres de l'orifice de ce dernier; puis de cette différence je soustrayais, pour arriver à la charge effective, la hauteur absorbée par les frottements dans l'intervalle situé entre l'orifice et le manomètre n° 4.

Pour calculer cette dernière, on considérait les manomètres 4 et 3, et de la différence de leurs cotes divisée par la distance résultait la pente par mètre, qui, multipliée par la longueur de l'intervalle compris entre le manomètre n° 4 et le réservoir, donnait la quantité à retrancher de la différence existant entre les manomètres n° 5 et n° 4.

Le résultat trouvé était la hauteur en vertu de laquelle naissait la vitesse moyenne dans le tuyau.

Or on comprend que cette manière d'opérer pouvait faire naître une objection.

En effet, les manomètres n'indiquent point la charge entière d'une conduite aux points où ils sont ajustés, mais cette charge diminuée d'une certaine hauteur, diminution due à la vitesse du fluide à la base des piézomètres : l'eau, en vertu de sa cohésion, agit en effet sur la colonne manométrique dont elle affaiblit l'élévation.

Lorsque deux piézomètres sont placés à la surface d'un liquide animé de la même vitesse, la succion reste la même et la différence des cotes des deux manomètres donne bien la différence des charges, et telle est la condition dans laquelle j'ai toujours opéré dans les expériences précédemment décrites[1].

Lorsqu'au contraire l'un des manomètres était disposé sur le cylindre-réservoir où la vitesse du fluide était très-faible relativement à celle de l'eau dans la conduite, on voit qu'en pareille circonstance l'*abaissement par succion* du manomètre sur le réservoir devait être moindre que l'*abaissement par succion* du manomètre sur le tuyau; il devait donc y avoir, par ce motif, augmentation dans la hauteur expérimentale due à la vitesse dans le tuyau.

Il y avait dès lors une rectification à faire, mais je n'avais pas à cette époque les moyens de l'effectuer; dans les expériences relatives aux canaux découverts, dont je m'occupe en ce moment, je chercherai à déterminer la loi suivie par ces abaissements, suivant le diamètre de l'orifice en communication avec un courant et suivant la vitesse de ce dernier.

Quoi qu'il en soit, il paraît que dans les circonstances où j'ai opéré la rectification dont il est question elle aurait eu peu d'importance, puisque j'ai obtenu un coefficient qui résulte d'expé-

[1] Voir la note 1 de l'appendice, où j'entre à ce sujet dans des explications détaillées.

riences antérieures aux miennes et dans lesquelles sans doute on avait évité l'inconvénient que je viens de signaler.

Voici, du reste, quelles sont les valeurs déduites, pour le coefficient de correction, de quarante-trois expériences faites sur les tuyaux dont la nomenclature suit :

Diamètres.	Coefficients.	Nombre d'expériences.
$0^m,0364$	0,83	5
0 ,137	0,79	9
0 ,188	0,83	7
0 ,2432	0,82	8
0 ,2447	0,87	7
0 ,297	0,81	7
		43 [1]

La moyenne générale des coefficients trouvés est donc égale à 0,825, soit 0,82, coefficient généralement adopté.

On a donc enfin, lorsque l'on croit devoir tenir compte de la contraction à l'entrée des conduites, à recourir aux équations suivantes :

1° Formule dans laquelle entrent la 1re et la 2e puissance de la vitesse,

$$Ri = \left(\frac{R}{4Lm^2g} + b\right) v^2 + av,$$

dans laquelle

$$a = 0{,}000.031.635 + \frac{0{,}000.000.003.755.6}{R^2},$$

$$b = 0{,}000.442.939 + \frac{0{,}000.006.201}{R^2},$$

$$m = 0{,}82.$$

[1] J'indiquais dans mon Mémoire manuscrit les motifs qui m'ont déterminé à ne présenter que les résultats offerts par ces quarante-trois expériences; dans les autres conduites le raccordement avec le cylindre-réservoir n'était point effectué dans des conditions qui permissent de compter sur les résultats obtenus en ce qui concernait le coefficient de correction à adopter pour la contraction du fluide à son entrée dans la conduite.

2° Formule dans laquelle entre seulement la seconde puissance de la vitesse,

$$Ri = \left(\frac{R}{4Lm^2g} + b_1\right) v^2,$$

dans laquelle

$$b_1 = 0{,}000.51 + \frac{0{,}000.006.5}{R},$$

$$m = 0{,}82.$$

La composition de ces deux équations montre d'ailleurs que l'on peut généralement faire disparaître le terme où figure le coefficient $m = 0{,}82$.

Quant à la formule exprimant la vitesse relative des filets fluides, elle est, comme on se rappelle :

$$V - v = K\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R}\sqrt{i},$$

dans laquelle $K = 11{,}30$.

Ces équations permettent de résoudre, avec les précautions indiquées dans le cours de ce Mémoire, toutes les questions relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite.

APPENDICE.

NOTE I.

DES MANOMÈTRES OU TUBES PIÉZOMÉTRIQUES.

On a pu faire une observation au sujet du procédé employé pour mesurer les pertes de charge.

Les manomètres expriment-ils en réalité les pressions exercées par un liquide en mouvement et, par conséquent, les différences manométriques donnent-elles bien les pertes de charge dues à la résistance des parois?

La cohésion de l'eau, coulant à la base d'un tube piézométrique, a pour effet de diminuer la hauteur du liquide dans ce dernier, suivant une loi résultant de la vitesse d'écoulement. Je m'occupe en ce moment d'expériences ayant pour objet la détermination de cette loi.

Il faut donc, pour que la différence de deux colonnes piézométriques donne la perte de charge due à la résistance des parois dans l'intervalle que l'on considère, que la vitesse du fluide coulant à la base des piézomètres soit la même; circonstance qui se présentait nécessairement dans mes expériences sur les tuyaux de conduite, puisque le tuyau avait un diamètre uniforme; la vitesse à la paroi était la même sur tout son développement. l'espèce de succion qui s'exerce à la base des piézomètres ne pouvait donc pas altérer les résultats.

Mais il est très-important que toute saillie soit évitée : si elle existe à l'aval de l'orifice, la hauteur manométrique comprend une partie de la hauteur due à la vitesse; si elle se trouve à l'amont, la hauteur manométrique est diminuée de la non-pression.

J'ai fait une série d'expériences relatives aux effets résultant des diverses positions données au petit ajutage de l'appareil destiné à mesurer la vitesse des filets fluides.

J'ai placé cet ajutage au centre du tuyau :

1° Contre le courant;

2° Dans le sens du courant;

3° Rectangulairement au courant; et j'ai obtenu les résultats consignés dans le tableau suivant :

DIAMÈTRES.	VITESSES MOYENNES.	VITESSES AU CENTRE CALCULÉES d'après la formule $V - u = 11,30.0,689\sqrt{Ri.}$ (*)	HAUTEURS AU-DESSUS DE ZÉRO du tube de Pitot, contre le courant.	HAUTEURS AU-DESSUS DE ZÉRO du tube de Pitot, dans le sens du courant.	HAUTEURS AU-DESSUS DE ZÉRO du tube de Pitot, perpendiculairement au courant.	HAUTEURS du manomètre.	DIFFÉRENCES ENTRE LA COLONNE (7) et celles (4.)	DIFFÉRENCES ENTRE LA COLONNE (7) et celles (5.)	DIFFÉRENCES ENTRE LA COLONNE (7) et celles (6.)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.	mèt.
	0,758	0,878	0,112	0,046	0,042	0,0666	0,0454	0,0206	0,0246
mèt.	1,128	1,305	0,205	0,060	0,040	0,1039	0,1011	0,0439	0,0639
0,188	1,488	1,716	0,310	0,075	0,026	0,1432	0,1668	0,0682	0,1172
	1,933	2,229	0,490	0,100	0,020	0,2050	0,2850	0,1050	0,1850
	2,506	2,891	0,775	0,115	0,020	0,3118	0,4632	0,1968	0,2918
	4,323	4,976	2,095	"	0,240	0,7100	1,3850	"	0,9500
	0,452	0,556	0,082	"	"	0,066	0,016	"	"
	0,707	0,867	0,130	"	"	0,095	0,035	"	"
0,2432	1,547	1,899	0,405	0,120	0,090	0,218	0,187	0,098	0,128
	1,833	2,249	0,535	0,167	0,094	0,268	0,267	0,101	0,168
	3,833	4,702	1,925	0,345	"	0,770	1,155	0,425	"
	0,537	0,625	0,097	0,067	0,060	0,073	0,024	0,006	0,013
0,2447	0,949	1,102	0,182	"	0,085	0,124	0,058	"	0,039
	1,904	2,214	0,517	"	"	0,270	0,247	"	"
	0,355	0,417	0,067	0,053	"	0,058	0,009	0,005	"
0,297	1,236	1,421	0,277	0,110	0,100	0,160	0,117	0,050	0,060
	1,665	1,915	0,425	0,114	0,105	0,210	0,215	0,096	0,105
	2,365	2,718	0,720	0,120	0,085	0,310	0,410	0,190	0,225
	0,4752	0,568	0,260	0,237	0,233	0,2434	0,0166	0,0064	0,0104
0,50	0,7951	0,929	0,550	0,480	"	0,49375	0,05625	0,01375	"
	1,1197	1,313	0,845	0,720	0,715	0,7574	0,0876	0,0374	0,0424

(*) La justification de cette formule se trouve dans le chapitre V.

Si l'on appelle

h' les hauteurs dues aux vitesses de la colonne (3) (colonne (8));

h'' les dépressions exprimées dans la colonne (9);

h''' celles données la colonne (10);

V les vitesses centrales indiquées dans la colonne (3), et qu'on pose les équations :

$$V = a' \frac{h'}{V},$$

$$V = a'' \frac{h''}{V},$$

$$V = a''' \frac{h'''}{V},$$

qu'on prenne ensuite les valeurs de V pour abscisses et celles de

$$\frac{h'}{V} \cdots \frac{h''}{V} \cdots \frac{h'''}{V}$$

pour ordonnées, on aura trois droites (planche XII) qui serviront à déterminer les valeurs des coefficients

$$a', \quad a'', \quad a''',$$

et qui donneront

$$a' = 18{,}36,$$
$$a'' = 45{,}17,$$
$$a''' = 28{,}91,$$

les résultats du tableau ci-dessus peuvent donc être liés par les formules suivantes :

1° Lorsque l'orifice du tube de Pitot est dirigé contre le courant,

$$V^2 = 18{,}36\, h'.$$

2° Lorsque l'orifice du tube de Pitot est dirigé dans le sens du courant,

$$V^2 = 45{,}17\, h''.$$

3° Lorsque l'orifice du tube de Pitot est dirigé rectangulairement au courant,

$$V^2 = 28{,}91\, h'''\ ^1.$$

Or, la formule théorique qui donne la vitesse d'après la hauteur de charge du liquide est :

$$V^2 = 19{,}62\, h.$$

La comparaison des expressions expérimentales et théoriques $V^2 = 18{,}36\, h'$ et $V^2 = 19{,}62\, h$ suggère une première réflexion : Si nous posons $V^2 = k.19{,}62\, h$, k étant un coefficient de tarage pour le tube de Pitot, on voit qu'ici k a été plus petit que l'unité, tandis que l'on aurait dû parvenir pour k à une valeur au moins égale à l'unité : ce résultat, singulier en apparence, tient à la succion qui s'opère à la base du tube manométrique, d'où il résulte que

[1] h'' et h''' étaient, je n'ai pas besoin de le dire, des quantités négatives relativement à h'.

la hauteur due à la vitesse est mesurée par une différence trop grande, ce qui conduit pour k à une valeur plus petite que l'unité.

On voit, en second lieu, que la dépression due à la vitesse rectangulaire à l'orifice du tube est à celle due à la vitesse dirigée dans le sens de ce tube comme

$$\frac{1}{28,91} : \frac{1}{45,17},$$

ou comme

$$1 - \frac{1}{2} : 1;$$

cette dépression est donc une fois et demie plus considérable dans le premier cas que dans le second.

On voit, enfin, que la hauteur due à la vitesse dans le tube Pitot est à très-peu près égale à la somme des deux dépressions que l'on obtient :

1° En plaçant le tube dans le sens du courant;

2° En tournant son orifice rectangulairement à la direction de ce même courant.

Les dépressions si notables produites par un courant perpendiculaire à la direction d'un tube plongé dans ce courant, dépressions dont nous venons de donner les lois, offrent une explication très-simple de l'abaissement qu'on peut observer quelquefois dans le niveau d'un réservoir naturel, ou d'un lac, au-dessous de celui de la masse fluide avec laquelle il communique.

Il suffit, pour se rendre compte de cette dérogation apparente aux lois naturelles, de supposer ce réservoir alimenté par un canal souterrain qui, d'une part, se rendrait à la masse fluide, et d'autre part, au réservoir au moyen d'une branche artésienne.

En effet, si le courant inférieur a quelque rapidité, et si la masse fluide n'est pas très-éloignée du réservoir, il pourra arriver que la hauteur nécessaire pour surmonter les frottements que le liquide souterrain rencontrera entre le réservoir et la masse fluide, soit plus petite que la dépression produite par la rencontre du courant souterrain et du conduit naturel qui se relève pour alimenter le réservoir.

Le niveau de celui-ci sera donc nécessairement inférieur au niveau de la masse fluide.

Sur les bords de la mer, où il existe souvent des courants de rive présentant une grande vitesse, l'action de ces courants sur l'embouchure du conduit qui met en communication le réservoir avec la mer suffira pour produire le même phénomène.

J'ai eu occasion, dans le cours de mes expériences, de réaliser tous les phénomènes que je viens de décrire.

NOTE 2.

TUBE JAUGEUR.

Les faits expérimentaux établis dans la note 1 de l'appendice n'offrent pas seulement un intérêt théorique; il m'a paru qu'ils pouvaient recevoir une application utile dans le jaugeage des eaux courantes.

Le tube de Pitot, qui dispense de l'emploi des compteurs à seconde, serait sans contredit l'instrument le plus simple pour opérer ces jaugeages, s'il n'était resté à l'état de principe à raison de certaines difficultés que présentait son usage.

Comment, en effet, mesurer la différence de niveau entre l'eau de l'intérieur du tube vertical et la surface agitée dans laquelle il est plongé? Cette différence est parfois très-faible et disparaît en présence des oscillations du liquide contre les parois extérieures et dans l'intérieur du tube.

Les résultats obtenus dans la note 1 peuvent se résumer ainsi qu'il suit :

Si, dans une eau courante, en un point du fluide animé d'une vitesse v, on place un tube vertical recourbé horizontalement, dont l'orifice soit disposé d'abord contre le courant, ensuite dans le sens de ce dernier, enfin rectangulairement à sa direction; si on appelle h' la hauteur dont le niveau de l'eau s'élève dans la tranche verticale au-dessus de la surface du courant dans la première hypothèse, et h'' et h''' les quantités dont le niveau s'abaisse au-dessous de la surface du même courant dans les deux autres hypothèses; il existera entre $\frac{v^2}{2g}$, ou la hauteur théorique due à la vitesse du filet que l'on considère, et les hauteurs h', h'', h''' des rapports constants m, m', m''. Nous pourrons donc poser

$$\frac{v^2}{2g} = m\,h', \quad \frac{v^2}{2g} = m'\,h'', \quad \frac{v^2}{2g} = m''\,h'''.$$

On tirera des deux premières équations, que nous considérerons d'abord seules,

$$v = \sqrt{\frac{m\,m'}{m+m'}}\ \sqrt{2g\,(h'+h'')}.$$

Supposons maintenant que nous ayons à notre disposition un instrument composé de deux tubes accolés dont les branches horizontales, exposées à l'action de l'eau courante, soient dirigées l'une contre le courant, l'autre dans le sens de ce dernier; la différence de niveau de l'eau renfermée dans ces tubes donnera évidemment $h' + h''$, sans qu'il soit nécessaire de déterminer le niveau de l'eau du courant.

J'ajouterai d'ailleurs, qu'au moyen de la fermeture d'un robinet inférieur, on pourrait conserver indéfiniment les indications fournies par l'instrument et constater à loisir les différences à observer.

Je ne donnerai ici aucun détail sur les précautions à prendre dans l'emploi du tube jaugeur, dont je me sers depuis plus d'une année pour des expériences de précision relatives au mouvement de l'eau dans les canaux découverts.

Lorsque l'on a déterminé, au moyen de quelques expériences, le coefficient de tarage $\sqrt{\frac{m\,m'}{m+m'}} = \mu$, on voit qu'il est très-facile d'obtenir la vitesse cherchée à l'aide de la formule $V = \mu\sqrt{2\,g\,(h' + h'')} = \mu v'$ et des tables qui donnent immédiatement la vitesse v' due à la hauteur $h' + h''$.

En combinant la première et la troisième équation, on serait arrivé à l'expression $V = \mu'\sqrt{2\,g\,(h' + h''')} = \mu'\,v''$ qui aurait pu servir également à déterminer la vitesse cherchée en disposant, conformément à l'hypothèse faite, les ajutages de l'appareil.

L'appareil dont il s'agit est décrit dans un ouvrage récemment publié, et qui a pour titre : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.*

NOTE 3.

VALEURS DE ε TROUVÉES DANS LES TUYAUX CIRCULAIRES ET DANS LES CANAUX RECTANGULAIRES.

J'ai déterminé, en m'appuyant sur les principes qui résultent de mes expériences sur les tuyaux, les formules relatives au mouvement de l'eau dans les canaux rectangulaires.

Je m'occupe en ce moment de la rédaction d'un Mémoire qui a pour objet la justification de ces formules, justification directement basée, d'ailleurs, sur une série d'expériences spéciales que j'avais commencées avec le concours de MM. les ingénieurs Baumgarten et Charles Ritter, et que j'achève avec celui de M. Bazin, ingénieur attaché au canal de Bourgogne.

Mais je crois utile de faire connaître, dès à présent, que ces expériences et les formules qui en sont la conséquence m'ont donné des valeurs analogues pour ε, c'est-à-dire pour le coefficient qui représente l'intervention des actions mutuelles des molécules fluides dans le mouvement de l'eau. Cette similitude des valeurs de ε trouvées dans des circonstances expérimentales si différentes achèvera de justifier, je l'espère, l'équation d'équilibre

$$2\pi r\varepsilon R^2\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 = \pi r^2 i.$$

NOTE 4.

CLASSIFICATION DES EXPÉRIENCES.

Le tableau ci-contre a pour objet d'indiquer les numéros d'ordre des expériences qui ont servi à déterminer les coefficients des formules représentant la loi de l'écoulement de l'eau dans chaque conduite, et dans chaque système de formules d'interpolation.

On s'est, en général, abstenu de faire concourir à la recherche de ces coefficients les vitesses au-dessous de $0^{m},10$ par seconde, attendu que la loi qui lie ces dernières à la pente ne pouvait être représentée par les formules adoptées.

DIAMÈTRES.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences employées pour la détermination des coefficients des formules	
	1-2 et 3-4.	5 et 6.
	6	6
	7	7
mèt.	8	8
0,0122	9	9
	10	10
	11	11
	12	12
	13	13
	15	15
	16	16
	17	17
	18	18
	19	19
0,0266	20	20
	21	21
	22	22
	23	23
	24	24
	25	25
	26	26
	27	27
	28	28
	29	29
	30	30
	31	31
0,0395	32	32
	33	33
	34	34
	35	35
	36	36
	37	37
	38	38
	40	40
	41	41
0,014	42	42
	43	43
	44	44
	45	45
	46	46
	47	47
	48	48
0,027	49	49
	50	50
	51	51
	52	52
	53	53
	54	54
	55	55
0,041	56	56
	57	57
	58	58
	59	59

DIAMÈTRES.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences employées pour la détermination des coefficients des formules	
	1-2 et 3-4.	5 et 6.
	60	60
	61	61
	62	62
	63	63
mèt.	64	64
0,0268	65	65
	66	66
	67	67
	68	68
	69	69
	70	70
	71	71
	72	72
	73	73
	74	74
	75	75
	76	76
	77	77
0,0826	78	78
	79	79
	80	80
	81	81
	82	82
	83	83
	84	84
	85	85
	86	86
	87	87
	88	88
0,196	89	89
	90	90
	91	91
	92	92
	93	93
	94	94
	95	95
	96	96
	97	97
0,285	98	98
	99	99
	100	100
	101	101
	102	102
	103	103
	104	104
0,04968	105	105
	106	106
	107	107

DIAMÈTRES.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences employées pour la détermination des coefficients des formules	
	1-2 et 3-4.	5 et 6.
	108	"
	109	109
mèt.	110	110
0,0359	111	111
	112	112
	113	113
	114	114
	115	115
	116	116
	117	117
0,0364	118	118
	119	119
	120	120
	121	121
	122	122
	123	123
	124	124
0,0795	125	125
	126	126
	127	127
	128	128
	129	129
	129 *bis.*	129 *bis.*
0,0801	130	130
	131	131
	132	132
	133	133
	134	134
	135	135
	136	136
	137	137
	138	138
	139	139
0,0819	140	140
	141	141
	142	142
	143	143
	144	144
	145	145
	146	146
	147	147
	148	148
	149	149
	150	150
0,137	151	151
	152	152
	153	153
	154	154
	155	155
	156	156

DIAMÈTRES.	NUMÉROS D'ORDRE des expériences employées pour la détermination des coefficients des formules	
	1-2 et 3-4.	5 et 6.
	157	157
	158	158
	159	159
mèt.	160	160
0,188	161	161
	162	162
	163	163
	164	164
	165	165
	166	166
	167	167
	168	168
	169	169
0,2432	170	170
	171	171
	172	172
	173	173
	174	174
	175	175
	176	176
	177	177
0,2447	178	178
	179	179
	180	180
	181	181
	182	182
	183	183
	184	184
	185	185
0,297	186	186
	187	187
	188	188
	189	189
	190	190
	191	191
	192	192
	193	193
0,50	194	194
	195	195
	196	196

TABLE

RELATIVE AU DÉBIT DES TUYAUX DE CONDUITE

Elle concerne, comme on l'a vu dans le chapitre IV, les conduites *en fonte neuve.*

Si l'on veut en faire usage pour des conduites déjà anciennes dans lesquelles le poli des surfaces est altéré par de légers dépôts ou par l'oxydation de la fonte, il faudra avoir égard aux observations faites dans le chapitre IV.

Première observation. — Lorsque l'on recherchera la pente correspondant à une vitesse déterminée, il conviendra de doubler cette pente, ou, si la pente est donnée, de la diviser par deux et de ne compter que la vitesse correspondant au quotient de cette division.

L'on aura ainsi égard au retard que le manque de poli des surfaces fait éprouver à la vitesse.

Deuxième observation. — Mais, indépendamment de ce retard provenant des aspérités des parois, il existe une autre cause qui affaiblit le volume de l'écoulement; elle est due à l'épaisseur de la couche déposée.

Pour y remédier, il importe, suivant la nature des eaux à conduire, d'augmenter les diamètres trouvés d'une certaine quantité, d'autant plus nécessaire à ajouter que les diamètres sont plus faibles.

Il est évident que, dans le calcul du diamètre des conduites à établir pour une fourniture d'eau, il faudra agir comme si les conduites étaient déjà recouvertes de dépôts, puisque ce résultat aura lieu infailliblement au bout d'un certain nombre d'années.

Les tables comprennent les 68 tuyaux de divers diamètres énumérés dans le chapitre IV et dont les $b_1 \ldots \frac{b_1}{R} \cdots \sqrt{\frac{R}{b_1}}$ ont été calculés dans ce même chapitre et graphiquement représentés dans la planche X.

Les vitesses varient de 1 en 1 centimètre entre les vitesses de $0^m,10$ et $0^m,50$ par seconde;

De 2 en 2 centimètres entre les vitesses de $0^m,50$ et 2 mètres par seconde;

De 5 en 5 centimètres entre les vitesses de 2 mètres et 3 mètres par seconde; le plus petit diamètre est d'un centimètre, le plus grand d'un mètre.

Les calculs ont été effectués au moyen de la formule

$$Ri = \left(0{,}000507 + \frac{0.00000647}{R}\right) u^2.$$

mais on pourra dans les calculs directs que l'on voudrait effectuer se borner à recourir à l'expression plus simple

$$R\,i = \left(0{,}000.51 + \frac{0{,}000.006.5}{R}\right) v^2,$$

On s'est donné les vitesses; les charges par 100 mètres inscrites dans les colonnes ainsi désignées, ont été déduites de l'expression

$$100^m \frac{\left(0{,}000.507 + \frac{0{,}000.006.47}{R}\right) v^2}{R} = \left(\frac{0{,}0507}{R} + \frac{0{,}000647}{R^2}\right) v^2.$$

On aurait pu réduire sans doute le nombre des décimales de la colonne des charges; si je ne l'ai pas fait, mon motif principal a été de permettre d'apercevoir la loi numérique qui régit la diminution de charge, pour une même vitesse, au fur et à mesure que le diamètre de la conduite augmente. On sera toujours libre dans les applications de s'en tenir au degré d'approximation que l'on jugera convenable.

Je n'ai point d'observation à faire au sujet de la colonne qui donne les volumes, et dans laquelle le litre a été pris pour unité.

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'entrer dans aucune explication nouvelle ou de donner des exemples en ce qui concerne l'usage des tables suivantes : il était convenable seulement d'indiquer la manière dont elles avaient été établies et les précautions à prendre en s'en servant.

TUYAUX NEUFS.		10 CENTIMÈTRES.		11 CENTIMÈTRES.		12 CENTIMÈTRES.		13 CEN
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	0,360,200	0,008	0,435,84	0,009	0,518,69	0,009	0,608,7
0,02	0,000,314	0,115,400	0,031	0,139,64	0,035	0,166,18	0,038	0,195,63
0,027	0,000,573	0,073,056	0,057	0,088,398	0,063	0,105,20	0,069	0,123,47
0,03	0,000,707	0,062,555	0,071	0,075,692	0,078	0,090,080	0,085	0,105,7
0,04	0,001,257	0,041,525	0,126	0,050,245	0,138	0,059,796	0,151	0,070,1
0,05	0,001,964	0,030,632	0,196	0,037,065	0,216	0,044,110	0,236	0,051,7
0,054	0,002,290	0,027,653	0,229	0,033,461	0,252	0,039,820	0,275	0,046,7
0,06	0,002,827	0,024,089	0,283	0,029,148	0,311	0,034,688	0,339	0,040,7
0,07	0,003,848	0,019,767	0,385	0,023,919	0,423	0,028,465	0,462	0,033,4
0,08	0,005,027	0,016,719	0,503	0,020,230	0,553	0,024,075	0,603	0,028,2
0,081	0,005,153	0,016,463	0,515	0,019,920	0,567	0,023,707	0,618	0,027,8
0,09	0,006,362	0,014,462	0,636	0,017,499	0,700	0,020,825	0,763	0,024,4
0,10	0,007,854	0,012,728	0,785	0,015,401	0,864	0,018,328	0,943	0,021,5
0,108	0,009,161	0,011,608	0,916	0,014,045	1,008	0,016,715	1,099	0,019,6
0,11	0,009,503	0,011,357	0,950	0,013,742	1,045	0,016,354	1,140	0,019,1
0,12	0,011,310	0,010,247	1,131	0,012,399	1,244	0,014,756	1,357	0,017,3
0,13	0,013,273	0,009,331	1,327	0,011,291	1,460	0,013,437	1,593	0,015,7
0,135	0,014,314	0,008,931	1,431	0,010,807	1,575	0,012,861	1,718	0,015,0
0,14	0,015,391	0,008,563	1,539	0,010,362	1,693	0,012,331	1,847	0,014,4
0,15	0,017,672	0,007,910	1,767	0,009,571	1,944	0,011,391	2,121	0,013,3
0,16	0,020,106	0,007,349	2,011	0,008,892	2,212	0,010,582	2,413	0,012,4
0,162	0,020,612	0,007,245	2,061	0,008,767	2,267	0,010,433	2,473	0,012,2
0,17	0,022,698	0,006,860	2,270	0,008,301	2,497	0,009,879	2,724	0,011,5
0,18	0,025,447	0,006,432	2,545	0,007,783	2,799	0,009,262	3,054	0,010,8
0,19	0,028,353	0,006,054	2,835	0,007,325	3,119	0,008,718	3,402	0,010,1
0,20	0,031,416	0,005,717	3,142	0,006,918	3,456	0,008,233	3,770	0,009,6
0,21	0,034,636	0,005,415	3,464	0,006,553	3,810	0,007,798	4,156	0,009,1
0,216	0,036,644	0,005,249	3,664	0,006,352	4,031	0,007,559	4,397	0,008,8
0,22	0,038,013	0,005,144	3,801	0,006,224	4,182	0,007,407	4,562	0,008,6
0,23	0,041,548	0,004,898	4,155	0,005,927	4,570	0,007,053	4,986	0,008,2
0,24	0,045,239	0,004,674	4,524	0,005,656	4,976	0,006,731	5,429	0,007,9
0,25	0,049,088	0,004,470	4,909	0,005,409	5,400	0,006,437	5,091	0,007,5
0,26	0,053,093	0,004,283	5,309	0,005,182	5,840	0,006,167	6,371	0,007,2
0,27	0,057,256	0,004,111	5,726	0,004,974	6,298	0,005,919	6,871	0,006,9
0,28	0,061,575	0,003,952	6,158	0,004,781	6,773	0,005,690	7,389	0,006,6
0,29	0,066,052	0,003,804	6,605	0,004,603	7,266	0,005,478	7,926	0,006,3
0,30	0,070,686	0,003,668	7,069	0,004,438	7,776	0,005,281	8,482	0,006,0
0,31	0,075,477	0,003,540	7,548	0,004,284	8,303	0,005,098	9,057	0,005,7
0,32	0,080,425	0,003,422	8,043	0,004,140	8,847	0,004,927	9,651	0,005,5
0,325	0,082,958	0,003,365	8,296	0,004,072	9,125	0,004,846	9,955	0,005,4
0,33	0,085,530	0,003,310	8,553	0,004,006	9,408	0,004,767	10,264	0,005,2
0,34	0,090,792	0,003,206	9,079	0,003,880	9,987	0,004,617	10,895	0,005,0
0,35	0,096,212	0,003,108	9,621	0,003,761	10,583	0,004,476	11,545	0,005,0
0,36	0,101,788	0,003,016	10,179	0,003,650	11,197	0,004,344	12,215	0,005,0
0,37	0,107,521	0,002,930	10,752	0,003,545	11,827	0,004,219	12,903	0,004,8
0,38	0,113,412	0,002,848	11,341	0,003,446	12,475	0,004,101	13,609	0,004,6
0,39	0,119,459	0,002,770	11,946	0,003,352	13,141	0,003,989	14,335	0,004,4
0,40	0,125,664	0,002,697	12,566	0,003,263	13,823	0,003,883	15,080	0,004,3
0,41	0,132,026	0,002,627	13,203	0,003,179	14,523	0,003,783	15,843	0,004,1
0,42	0,138,545	0,002,561	13,855	0,003,099	15,240	0,003,688	16,625	0,004,0
0,43	0,145,221	0,002,498	14,522	0,003,023	15,974	0,003,597	17,427	0,003,9
0,44	0,152,053	0,002,438	15,205	0,002,950	16,726	0,003,511	18,246	0,003,8
0,45	0,159,043	0,002,381	15,904	0,002,881	17,495	0,003,429	19,085	0,003,6
0,46	0,166,191	0,002,327	16,619	0,002,815	18,281	0,003,350	19,943	0,003,5
0,47	0,173,495	0,002,275	17,350	0,002,752	19,084	0,003,275	20,819	0,003,4
0,48	0,180,956	0,002,225	18,096	0,002,692	19,905	0,003,204	21,715	0,003,3
0,49	0,188,575	0,002,177	18,858	0,002,634	20,743	0,003,135	22,629	0,003,2
0,50	0,196,350	0,002,132	19,635	0,002,579	21,599	0,003,069	23,562	0,003,1
0,55	0,237,583	0,001,929	23,758	0,002,334	26,134	0,002,778	28,510	0,003,0
0,60	0,282,744	0,001,762	28,274	0,002,132	31,102	0,002,537	33,929	0,002,8
0,65	0,331,832	0,001,621	33,183	0,001,962	36,502	0,002,335	39,820	0,002,6
0,70	0,384,846	0,001,501	38,485	0,001,817	42,333	0,002,162	46,182	0,002,5
0,75	0,441,788	0,001,398	44,179	0,001,692	48,597	0,002,013	53,015	0,002,3
0,80	0,502,656	0,001,308	50,266	0,001,583	55,292	0,001,883	60,319	0,002,1
0,85	0,567,451	0,001,229	56,745	0,001,487	62,420	0,001,769	68,094	0,002,0
0,90	0,636,174	0,001,159	63,617	0,001,402	69,979	0,001,668	76,341	0,001,9
0,95	0,708,823	0,001,096	70,882	0,001,326	77,971	0,001,578	85,059	0,001,8
1,00	0,785,400	0,001,040	78,540	0,001,258	86,394	0,001,497	94,248	0,001,7

ESSES.

ıES.	14 CENTIMÈTRES.		15 CENTIMÈTRES.		16 CENTIMÈTRES.		17 CENTIMÈTRES.	
VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,010	0,705,99	0,011	0,810,45	0,012	0,922,11	0,013	1,041,0	0,013
0,011	0,226,18	0,044	0,259,65	0,047	0,295,42	0,050	0,333,51	0,053
0,074	0,143,19	0,080	0,164,38	0,086	0,187,03	0,092	0,211,13	0,097
0,092	0,122,61	0,099	0,140,75	0,106	0,160,14	0,113	0,180,78	0,120
0,163	0,081,139	0,176	0,093,431	0,189	0,106,30	0,201	0,120,01	0,214
0,255	0,060,039	0,275	0,068,922	0,295	0,078,418	0,314	0,088,527	0,334
0,298	0,054,200	0,321	0,062,219	0,344	0,070,792	0,366	0,079,917	0,389
0,368	0,047,214	0,396	0,054,200	0,424	0,061,668	0,452	0,069,617	0,481
0,500	0,038,744	0,539	0,044,477	0,577	0,050,605	0,616	0,057,128	0,654
0,654	0,032,769	0,704	0,037,617	0,754	0,042,800	0,804	0,048,317	0,855
0,670	0,032,267	0,721	0,037,042	0,773	0,042,145	0,825	0,047,578	0,876
0,827	0,028,345	0,891	0,032,539	0,954	0,037,022	1,018	0,041,795	1,082
1,021	0,024,947	1,100	0,028,638	1,178	0,032,584	1,257	0,036,784	1,335
1,191	0,022,751	1,283	0,026,118	1,374	0,029,716	1,466	0,033,546	1,557
1,235	0,022,260	1,330	0,025,553	1,425	0,029,074	1,521	0,032,822	1,616
1,470	0,020,080	1,583	0,023,056	1,696	0,026,233	1,810	0,029,614	1,923
1,726	0,018,290	1,858	0,020,996	1,991	0,023,888	2,124	0,026,968	2,257
1,861	0,017,505	2,004	0,020,095	2,147	0,022,864	2,290	0,025,811	2,433
2,001	0,016,780	2,155	0,019,267	2,309	0,021,922	2,463	0,024,748	2,617
2,297	0,015,504	2,474	0,017,798	2,651	0,020,250	2,827	0,022,861	3,004
2,614	0,014,403	2,815	0,016,534	3,016	0,018,812	3,217	0,021,237	3,418
2,680	0,014,201	2,886	0,016,302	3,092	0,018,548	3,298	0,020,939	3,504
2,951	0,013,446	3,178	0,015,436	3,405	0,017,562	3,632	0,019,826	3,859
3,308	0,012,607	3,563	0,014,472	3,817	0,016,466	4,072	0,018,589	4,326
3,686	0,011,865	3,969	0,013,621	4,253	0,015,498	4,536	0,017,495	4,820
4,084	0,011,205	4,398	0,012,863	4,712	0,014,636	5,027	0,016,522	5,341
4,503	0,010,614	4,849	0,012,185	5,195	0,013,863	5,542	0,015,651	5,888
4,764	0,010,288	5,130	0,011,811	5,497	0,013,438	5,863	0,015,170	6,229
4,942	0,010,082	5,322	0,011,574	5,702	0,013,168	6,082	0,014,866	6,462
5,401	0,009,600	5,817	0,011,020	6,232	0,012,539	6,648	0,014,155	7,063
5,881	0,009,162	6,333	0,010,517	6,786	0,011,966	7,238	0,013,509	7,691
6,381	0,008,761	6,872	0,010,058	7,363	0,011,443	7,854	0,012,919	8,345
6,902	0,008,394	7,433	0,009,636	7,964	0,010,964	8,495	0,012,377	9,026
7,443	0,008,057	8,016	0,009,249	8,588	0,010,523	9,161	0,011,880	9,733
8,005	0,007,745	8,621	0,008,891	9,236	0,010,116	9,852	0,011,420	10,468
8,587	0,007,456	9,247	0,008,560	9,908	0,009,739	10,568	0,010,994	11,229
9,189	0,007,188	9,896	0,008,252	10,603	0,009,389	11,310	0,010,599	12,017
9,812	0,006,939	10,567	0,007,966	11,322	0,009,063	12,076	0,010,231	12,831
10,455	0,006,706	11,259	0,007,698	12,064	0,008,759	12,868	0,009,888	13,672
10,785	0,006,596	11,614	0,007,571	12,444	0,008,615	13,273	0,009,725	14,103
11,119	0,006,488	11,974	0,007,448	12,830	0,008,475	13,685	0,009,567	14,540
11,803	0,006,284	12,711	0,007,214	13,619	0,008,208	14,527	0,009,266	15,435
12,507	0,006,093	13,470	0,006,994	14,432	0,007,958	15,394	0,008,983	16,356
13,232	0,005,912	14,250	0,006,787	15,268	0,007,722	16,286	0,008,717	17,304
13,978	0,005,742	15,053	0,006,592	16,128	0,007,500	17,203	0,008,466	18,279
14,744	0,005,581	15,878	0,006,407	17,012	0,007,290	18,146	0,008,230	19,280
15,530	0,005,430	16,724	0,006,233	17,919	0,007,092	19,113	0,008,006	20,308
16,336	0,005,286	17,593	0,006,068	18,850	0,006,904	20,106	0,007,794	21,363
17,163	0,005,149	18,484	0,005,911	19,804	0,006,725	21,124	0,007,592	22,444
18,011	0,005,020	19,396	0,005,762	20,782	0,006,556	22,167	0,007,401	23,553
18,879	0,004,860	20,331	0,005,621	21,783	0,006,395	23,235	0,007,220	24,688
19,767	0,004,779	21,287	0,005,486	22,808	0,006,242	24,328	0,007,047	25,849
20,676	0,004,667	22,266	0,005,358	23,856	0,006,096	25,446	0,006,882	27,037
21,605	0,004,560	23,267	0,005,235	24,929	0,005,956	26,591	0,006,724	28,252
22,554	0,004,458	24,289	0,005,118	26,024	0,005,823	27,759	0,006,574	29,494
23,524	0,004,361	25,334	0,005,006	27,143	0,005,696	28,953	0,006,430	30,763
24,515	0,004,267	26,401	0,004,899	28,286	0,005,574	30,172	0,006,292	32,058
25,526	0,004,178	27,489	0,004,796	29,453	0,005,457	31,416	0,006,160	33,380
30,886	0,003,781	33,262	0,004,341	35,637	0,004,939	38,013	0,005,575	40,389
36,757	0,003,453	39,584	0,003,964	42,412	0,004,511	45,239	0,005,092	48,066
43,138	0,003,178	46,456	0,003,648	49,775	0,004,150	53,093	0,004,685	56,411
50,030	0,002,943	53,878	0,003,378	57,727	0,003,844	61,575	0,004,339	65,424
57,432	0,002,740	61,850	0,003,146	66,268	0,003,579	70,686	0,004,040	75,104
65,345	0,002,564	70,372	0,002,943	75,398	0,003,348	80,425	0,003,780	85,452
73,769	0,002,408	79,443	0,002,765	85,118	0,003,146	90,792	0,003,551	96,467
82,703	0,002,271	89,064	0,002,607	95,426	0,002,966	101,788	0,003,348	108,150
92,147	0,002,148	99,235	0,002,466	106,323	0,002,806	113,412	0,003,168	120,500
102,102	0,002,038	109,956	0,002,340	117,810	0,002,662	125,664	0,003,005	133,518

TUYAUX NEUFS.		18 CENTIMÈTRES.		19 CENTIMÈTRES.		20 CENTIMÈTRES.		21 CI
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 mè
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	1,167,0	0,014	1,300,3	0,015	1,440,80	0,016	1,588,5
0,02	0,000,314	0,373,90	0,057	0,416,59	0,060	0,461,60	0,063	0,508,9
0,027	0,000,573	0,236,70	0,103	0,263,73	0,109	0,292,23	0,115	0,322,1
0,03	0,000,707	0,202,68	0,127	0,225,82	0,134	0,250,22	0,141	0,275,8
0,04	0,001,257	0,134,54	0,226	0,149,91	0,239	0,166,10	0,251	0,183,1
0,05	0,001,964	0,099,248	0,353	0,110,58	0,373	0,122,53	0,393	0,135,0
0,054	0,002,290	0,089,596	0,412	0,099,827	0,435	0,110,61	0,458	0,121,9
0,06	0,002,827	0,078,048	0,509	0,086,961	0,537	0,096,356	0,566	0,106,2
0,07	0,003,848	0,064,046	0,693	0,071,360	0,731	0,079,070	0,770	0,087,1
0,08	0,005,027	0,054,169	0,905	0,060,355	0,955	0,066,875	1,005	0,073,7
0,081	0,005,153	0,053,340	0,928	0,059,431	0,979	0,065,852	1,031	0,072,6
0,09	0,006,362	0,046,856	1,145	0,052,207	1,209	0,057,847	1,272	0,063,7
0,10	0,007,854	0,041,239	1,414	0,045,948	1,492	0,050,912	1,571	0,056,1
0,108	0,009,161	0,037,609	1,649	0,041,904	1,741	0,046,431	1,832	0,051,1
0,11	0,009,503	0,036,797	1,711	0,040,999	1,806	0,045,428	1,901	0,050,0
0,12	0,011,310	0,033,201	2,036	0,036,992	2,149	0,040,989	2,262	0,045,1
0,13	0,013,273	0,030,234	2,389	0,033,686	2,522	0,037,326	2,655	0,041,1
0,135	0,014,314	0,028,937	2,577	0,032,241	2,720	0,035,724	2,863	0,039,3
0,14	0,015,394	0,027,745	2,771	0,030,913	2,925	0,034,253	3,079	0,037,7
0,15	0,017,672	0,025,629	3,181	0,028,556	3,358	0,031,641	3,534	0,034,8
0,16	0,020,106	0,023,809	3,619	0,026,528	3,820	0,029,394	4,021	0,032,4
0,162	0,020,612	0,023,475	3,710	0,026,156	3,916	0,028,982	4,122	0,031,9
0,17	0,022,698	0,022,227	4,086	0,024,765	4,313	0,027,441	4,540	0,030,2
0,18	0,025,447	0,020,840	4,580	0,023,220	4,835	0,025,728	5,089	0,028,3
0,19	0,028,353	0,019,614	5,104	0,021,854	5,387	0,024,215	5,671	0,026,9
0,20	0,031,416	0,018,523	5,655	0,020,638	5,969	0,022,868	6,283	0,025,2
0,21	0,034,636	0,017,546	6,235	0,019,550	6,581	0,021,662	6,927	0,023,8
0,216	0,036,644	0,017,007	6,596	0,018,949	6,962	0,020,997	7,329	0,023,1
0,22	0,038,013	0,016,666	6,842	0,018,569	7,223	0,020,575	7,603	0,022,6
0,23	0,041,548	0,015,869	7,479	0,017,681	7,894	0,019,592	8,310	0,021,6
0,24	0,045,239	0,015,145	8,143	0,016,874	8,595	0,018,697	9,048	0,020,6
0,25	0,049,088	0,014,483	8,836	0,016,137	9,327	0,017,880	9,818	0,019,7
0,26	0,053,093	0,013,876	9,557	0,015,461	10,088	0,017,131	10,619	0,018,9
0,27	0,057,256	0,013,318	10,306	0,014,839	10,879	0,016,442	11,451	0,018,3
0,28	0,061,575	0,012,803	11,084	0,014,265	11,699	0,015,806	12,315	0,017,4
0,29	0,066,052	0,012,326	11,889	0,013,733	12,550	0,015,217	13,210	0,016,7
0,30	0,070,686	0,011,883	12,723	0,013,240	13,430	0,014,670	14,137	0,016,
0,31	0,075,477	0,011,470	13,586	0,012,780	14,341	0,014,161	15,095	0,015,6
0,32	0,080,425	0,011,086	14,476	0,012,352	15,281	0,013,686	16,085	0,015,0
0,325	0,082,958	0,010,903	14,932	0,012,148	15,762	0,013,460	16,592	0,014,7
0,33	0,085,530	0,010,726	15,395	0,011,950	16,251	0,013,241	17,106	0,014,4
0,34	0,090,792	0,010,388	16,343	0,011,575	17,251	0,012,825	18,158	0,014,0
0,35	0,096,212	0,010,071	17,318	0,011,221	18,280	0,012,434	19,242	0,013,5
0,36	0,101,788	0,009,773	18,322	0,010,889	19,340	0,012,065	20,358	0,013,1
0,37	0,107,521	0,009,492	19,354	0,010,576	20,429	0,011,718	21,504	0,012,7
0,38	0,113,412	0,009,226	20,414	0,010,280	21,548	0,011,391	22,682	0,012,3
0,39	0,119,459	0,008,975	21,503	0,010,000	22,697	0,011,081	23,892	0,012,0
0,40	0,125,664	0,008,738	22,620	0,009,735	23,876	0,010,787	25,133	0,011,6
0,41	0,132,026	0,008,512	23,765	0,009,484	25,085	0,010,508	26,405	0,011,3
0,42	0,138,545	0,008,298	24,938	0,009,245	26,324	0,010,244	27,709	0,011,0
0,43	0,145,221	0,008,094	26,140	0,009,018	27,592	0,009,992	29,044	0,011,7
0,44	0,152,053	0,007,900	27,370	0,008,802	28,890	0,009,753	30,411	0,010,4
0,45	0,159,043	0,007,715	28,628	0,008,596	30,218	0,009,525	31,809	0,010,
0,46	0,166,191	0,007,538	29,914	0,008,399	31,576	0,009,307	33,238	0,010,
0,47	0,173,495	0,007,370	31,229	0,008,211	32,964	0,009,098	34,699	0,010,
0,48	0,180,956	0,007,209	32,572	0,008,032	34,382	0,008,899	36,191	0,009,5
0,49	0,188,575	0,007,054	33,944	0,007,860	35,829	0,008,709	37,715	0,009,
0,50	0,196,350	0,006,906	35,343	0,007,695	37,307	0,008,526	39,270	0,009,
0,55	0,237,583	0,006,251	42,765	0,006,964	45,141	0,007,717	47,517	0,008,
0,60	0,282,744	0,005,709	50,894	0,006,361	53,721	0,007,048	56,549	0,007,
0,65	0,331,832	0,005,253	59,730	0,005,853	63,048	0,006,485	66,366	0,007,
0,70	0,384,846	0,004,865	69,272	0,005,420	73,121	0,006,006	76,969	0,006,
0,75	0,441,788	0,004,530	79,522	0,005,047	83,940	0,005,592	88,358	0,006,
0,80	0,502,656	0,004,238	90,478	0,004,722	95,505	0,005,232	100,531	0,005,
0,85	0,567,451	0,003,981	102,141	0,004,436	107,816	0,004,915	113,490	0,005,
0,90	0,636,174	0,003,754	114,511	0,004,183	120,873	0,004,634	127,235	0,005,
0,95	0,708,823	0,003,551	127,588	0,003,957	134,676	0,004,384	141,765	0,004,
1,00	0,785,400	0,003,369	141,372	0,003,754	149,226	0,004,160	157,080	0,004,

ESSES.

ES.	22 CENTIMÈTRES.		23 CENTIMÈTRES.		24 CENTIMÈTRES.		25 CENTIMÈTRES.	
OLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,016	1,743,4	0,017	1,905,5	0,018	2,074,8	0,019	2,251,2	0,020
0,066	0,558,54	0,069	0,610,47	0,072	0,664,70	0,075	0,721,25	0,079
0,120	0,353,59	0,126	0,386,47	0,132	0,420,80	0,137	0,456,60	0,143
0,148	0,302,77	0,155	0,330,92	0,163	0,360,32	0,170	0,390,97	0,177
0,264	0,200,98	0,277	0,219,67	0,280	0,239,18	0,302	0,259,53	0,314
0,412	0,148,26	0,432	0,162,04	0,452	0,176,44	0,471	0,191,45	0,491
0,481	0,133,84	0,504	0,146,28	0,527	0,159,28	0,550	0,172,83	0,573
0,594	0,116,59	0,622	0,127,43	0,650	0,138,75	0,679	0,150,56	0,707
0,808	0,095,674	0,847	0,104,57	0,885	0,113,86	0,924	0,123,55	0,962
1,056	0,080,919	1,106	0,088,442	1,156	0,096,300	1,206	0,104,49	1,257
1,082	0,079,681	1,134	0,087,089	1,185	0,094,827	1,237	0,102,89	1,288
1,336	0,069,995	1,400	0,076,503	1,463	0,083,300	1,527	0,090,386	1,590
1,649	0,061,603	1,728	0,067,331	1,806	0,073,313	1,885	0,079,550	1,964
1,924	0,056,182	2,015	0,061,405	2,107	0,066,861	2,199	0,072,549	2,290
1,996	0,054,968	2,091	0,060,079	2,186	0,065,417	2,281	0,070,982	2,376
2,375	0,049,596	2,488	0,054,208	2,601	0,059,023	2,714	0,064,045	2,827
2,787	0,045,164	2,920	0,049,363	3,053	0,053,749	3,186	0,058,321	3,318
3,006	0,043,227	3,149	0,047,246	3,292	0,051,443	3,435	0,055,819	3,578
3,233	0,041,446	3,387	0,045,300	3,541	0,049,324	3,695	0,053,521	3,848
3,711	0,038,286	3,888	0,041,845	4,064	0,045,563	4,241	0,049,439	4,418
4,222	0,035,567	4,423	0,038,874	4,624	0,042,327	4,825	0,045,918	5,027
4,329	0,035,068	4,535	0,038,328	4,741	0,041,734	4,947	0,045,284	5,153
4,767	0,033,204	4,994	0,036,291	5,221	0,039,515	5,448	0,042,876	5,675
5,344	0,031,131	5,588	0,034,026	5,843	0,037,049	6,107	0,040,201	6,362
5,954	0,029,300	6,238	0,032,025	6,521	0,034,870	6,805	0,037,836	7,088
6,597	0,027,670	6,912	0,030,243	7,226	0,032,930	7,540	0,035,731	7,854
7,274	0,026,211	7,620	0,028,648	7,966	0,031,193	8,313	0,033,846	8,659
7,695	0,025,406	8,062	0,027,768	8,428	0,030,235	8,794	0,032,807	9,161
7,983	0,024,896	8,363	0,027,211	8,743	0,029,628	9,123	0,032,149	9,503
8,725	0,023,766	9,140	0,025,910	9,556	0,028,212	9,971	0,030,612	10,387
9,500	0,022,624	9,953	0,024,727	10,405	0,026,924	10,857	0,029,215	11,310
0,308	0,021,635	10,799	0,023,647	11,290	0,025,748	11,781	0,027,938	12,272
1,150	0,020,729	11,680	0,022,657	12,211	0,024,669	12,742	0,026,768	13,273
2,024	0,019,895	12,596	0,021,745	13,169	0,023,677	13,741	0,025,691	14,314
2,931	0,019,125	13,547	0,020,903	14,162	0,022,761	14,778	0,024,697	15,394
3,871	0,018,413	14,531	0,020,125	15,192	0,021,913	15,853	0,023,777	16,513
4,844	0,017,751	15,551	0,019,401	16,258	0 021,125	16,965	0,022,922	17,672
5,850	0,017,135	16,605	0,018,728	17,360	0,020,392	18,114	0,022,127	18,869
6,889	0,016,560	17,693	0,018,100	18,498	0,019,708	19,302	0,021,384	20,106
7,421	0,016,287	18,251	0,017,801	19,080	0,019,383	19,910	0,021,032	20,739
7,961	0,016,022	18,817	0,017,512	19,672	0,019,068	20,527	0,020,690	21,383
9,066	0,015,518	19,974	0,016,961	20,882	0,018,468	21,790	0,020,039	22,698
0,204	0,015,045	21,167	0,016,443	22,129	0,017,904	23,091	0,019,427	24,053
1,375	0,014,599	22,393	0,015,956	23,411	0,017,374	24,429	0,018,852	25,447
2,579	0,014,179	23,655	0,015,497	24,730	0,016,874	25,805	0,018,310	26,880
3,816	0,013,783	24,951	0,015,064	26,085	0,016,402	27,219	0,017,798	28,353
5,086	0,013,408	26,281	0,014,654	27,476	0,015,956	28,670	0,017,313	29,865
6,389	0,013,052	27,646	0,014,266	28,903	0,015,533	30,159	0,016,855	31,416
7,725	0,012,715	29,046	0,013,897	30,366	0,015,132	31,686	0,016,420	33,007
9,094	0,012,395	30,480	0,013,548	31,865	0,014,751	33,251	0,016,006	34,636
0,496	0,012,091	31,949	0,013,215	33,401	0,014,389	34,853	0,015,613	36,305
1,931	0,011,801	33,452	0,012,898	34,972	0,014,044	36,493	0,015,239	38,013
3,399	0,011,525	34,989	0,012,596	36,580	0,013,715	38,170	0,014,882	39,761
4,900	0,011,261	36,562	0,012,308	38,224	0,013,402	39,886	0,014,542	41,548
6,434	0,011,009	38,169	0,012,033	39,904	0,013,102	41,639	0,014,216	43,374
8,001	0,010,768	39,810	0,011,769	41,620	0,012,815	43,429	0,013,905	45,239
9,601	0,010,538	41,487	0,011,517	43,372	0,012,541	45,258	0,013,607	47,144
1,234	0,010,317	43,197	0,011,276	45,161	0,012,278	47,124	0,013,322	49,088
9,892	0,009,337	52,268	0,010,205	54,644	0,011,112	57,020	0,012,057	59,396
9,376	0,008,528	62,204	0,009,320	65,031	0,010,149	67,859	0,011,012	70,686
9,685	0,007,847	73,003	0,008,577	76,321	0,009,339	79,640	0,010,133	82,958
0,818	0,007,267	84,666	0,007,942	88,515	0,008,648	92,363	0,009,384	96,212
2,775	0,006,766	97,193	0,007,395	101,611	0,008,053	106,029	0,008,738	110,447
5,558	0,006,331	110,584	0,006,919	115,611	0,007,534	120,637	0,008,175	125,664
9,165	0,005,947	124,839	0,006,500	130,514	0,007,078	136,188	0,007,680	141,863
3,597	0,005,608	139,958	0,006,129	146,320	0,006,674	152,682	0,007,241	159,044
8,853	0,005,305	155,941	0,005,798	163,029	0,006,313	170,118	0,006,850	177,206
4,934	0,005,033	172,788	0,005,501	180,642	0,005,990	188,496	0,006,499	196,350

TUYAUX NEUFS.		26 CENTIMÈTRES.		27 CENTIMÈTRES.		28 CENTIMÈTRES.		29 C
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 m
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	2,435,0	0,020	2,625,9	0,021	2,824,0	0,022	3,029,
0,02	0,000,314	0,780,10	0,082	0,841,27	0,085	0,904,74	0,088	0,970,
0,027	0,000,573	0,493,86	0,149	0,532,58	0,155	0,572,76	0,160	0,614,
0,03	0,000,707	0,422,87	0,184	0,456,03	0,191	0,490,43	0,198	0,526,
0,04	0,001,257	0,280,71	0,327	0,302,72	0,339	0,325,56	0,352	0,349,
0,05	0,001,964	0,207,07	0,511	0,223,31	0,530	0,240,15	0,550	0,257,
0,054	0,002,290	0,186,93	0,595	0,201,59	0,618	0,216,30	0,641	0,232,
0,06	0,002,827	0,162,84	0,735	0,175,61	0,763	0,188,86	0,792	0,202,
0,07	0,003,848	0,133,63	1,001	0,144,10	1,039	0,154,98	1,078	0,166,
0,08	0,005,027	0,113,02	1,307	0,121,88	1,357	0,131,07	1,407	0,140,
0,081	0,005,153	0,111,29	1,340	0,120,01	1,391	0,129,07	1,443	0,138,
0,09	0,006,362	0,097,762	1,654	0,105,43	1,718	0,113,38	1,781	0,121,
0,10	0,007,854	0,086,041	2,042	0,092,787	2,121	0,099,788	2,199	0,107,
0,108	0,009,161	0,078,468	2,382	0,084,621	2,473	0,091,005	2,565	0,097,
0,11	0,009,503	0,076,774	2,471	0,082,793	2,566	0,089,040	2,661	0,095,
0,12	0,011,310	0,069,271	2,941	0,074,702	3,054	0,080,338	3,167	0,086,
0,13	0,013,273	0,063,080	3,451	0,068,026	3,584	0,073,158	3,717	0,078,
0,135	0,014,314	0,060,374	3,722	0,065,108	3,865	0,070,020	4,008	0,075
0,14	0,015,394	0,057,888	4,002	0,062,426	4,156	0,067,136	4,310	0,072
0,15	0,017,672	0,053,473	4,595	0,057,666	4,771	0,062,016	4,948	0,066
0,16	0,020,106	0,049,676	5,228	0,053,571	5,429	0,057,612	5,630	0,061
0,162	0,020,612	0,048,979	5,359	0,052,819	5,565	0,056,804	5,771	0,060
0,17	0,022,698	0,046,375	5,901	0,050,011	6,128	0,053,784	6,355	0,057
0,18	0,025,447	0,043,481	6,616	0,046,890	6,871	0,050,428	7,125	0,054
0,19	0,028,353	0,040,924	7,372	0,044,132	7,655	0,047,462	7,939	0,050
0,20	0,031,416	0,038,647	8,168	0,041,677	8,482	0,044,821	8,796	0,048
0,21	0,034,636	0,036,608	9,005	0,039,478	9,352	0,042,457	9,698	0,045
0,216	0,036,644	0,035,484	9,527	0,038,266	9,894	0,041,153	10,260	0,044
0,22	0,038,013	0,034,772	9,883	0,037,498	10,264	0,040,328	10,644	0,043
0,23	0,041,548	0,033,110	10,802	0,035,706	11,218	0,038,400	11,633	0,041
0,24	0,045,239	0,031,599	11,762	0,034,076	12,215	0,036,647	12,667	0,039
0,25	0,049,088	0,030,218	12,763	0,032,587	13,254	0,035,045	13,745	0,037
0,26	0,053,093	0,028,952	13,804	0,031,222	14,335	0,033,578	14,866	0,036
0,27	0,057,256	0,027,788	14,886	0,029,966	15,459	0,032,227	16,032	0,034
0,28	0,061,575	0,026,712	16,010	0,028,806	16,625	0,030,980	17,241	0,033
0,29	0,066,052	0,025,717	17,174	0,027,733	17,834	0,029,826	18,495	0,031
0,30	0,070,686	0,024,793	18,378	0,026,736	19,085	0,028,753	19,792	0,030
0,31	0,075,477	0,023,932	19,624	0,025,808	20,379	0,027,756	21,134	0,029
0,32	0,080,425	0,023,129	20,910	0,024,943	21,715	0,026,825	22,519	0,027
0,325	0,082,958	0,022,748	21,569	0,024,531	22,399	0,026,382	23,228	0,027
0,33	0,085,530	0,022,378	22,238	0,024,133	23,093	0,025,953	23,948	0,027
0,34	0,090,792	0,021,674	23,606	0,023,373	24,514	0,025,137	25,422	0,026
0,35	0,096,212	0,021,013	25,015	0,022,660	25,977	0,024,370	26,939	0,025
0,36	0,101,788	0,020,390	26,465	0,021,989	27,483	0,023,648	28,501	0,025
0,37	0,107,521	0,019,804	27,956	0,021,357	29,031	0,022,968	30,106	0,025
0,38	0,113,412	0,019,250	29,487	0,020,759	30,621	0,022,325	31,755	0,025
0,39	0,119,459	0,018,726	31,059	0,020,194	32,254	0,021,718	33,449	0,025
0,40	0,125,664	0,018,230	32,673	0,019,659	33,929	0,021,143	35,186	0,025
0,41	0,132,026	0,017,759	34,327	0,019,152	35,647	0,020,597	36,967	0,025
0,42	0,138,545	0,017,312	36,022	0,018,670	37,407	0,020,078	38,793	0,025
0,43	0,145,221	0,016,887	37,757	0,018,211	39,210	0,019,585	40,662	0,025
0,44	0,152,053	0,016,482	39,534	0,017,775	41,054	0,019,116	42,575	0,025
0,45	0,159,043	0,016,097	41,351	0,017,359	42,942	0,018,668	44,532	0,025
0,46	0,166,191	0,015,728	43,210	0,016,961	44,872	0,018,241	46,533	0,01
0,47	0,173,495	0,015,376	45,109	0,016,582	46,844	0,017,833	48,579	0,01
0,48	0,180,956	0,015,040	47,049	0,016,219	48,858	0,017,443	50,668	0,01
0,49	0,188,575	0,014,718	49,030	0,015,872	50,915	0,017,069	52,801	0,01
0,50	0,196,350	0,014,409	51,051	0,015,539	53,015	0,016,711	54,978	0,01
0,55	0,237,583	0,013,041	61,772	0,014,064	64,147	0,015,125	66,523	0,01
0,60	0,282,744	0,011,910	73,513	0,012,844	76,341	0,013,813	79,168	0,01
0,65	0,331,832	0,010,960	86,276	0,011,819	89,595	0,012,711	92,913	0,01
0,70	0,384,846	0,010,150	100,060	0,010,945	103,908	0,011,771	107,757	0,01
0,75	0,441,788	0,009,451	114,865	0,010,191	119,283	0,010,960	123,701	0,01
0,80	0,502,656	0,008,842	130,691	0,009,535	135,717	0,010,254	140,744	0,01
0,85	0,567,451	0,008,306	147,537	0,008,958	153,212	0,009,633	158,886	0,01
0,90	0,636,174	0,007,832	165,405	0,008,446	171,767	0,009,084	178,129	0,00
0,95	0,708,823	0,007,409	184,294	0,007,990	191,382	0,008,593	198,470	0,00
1,00	0,785,400	0,007,030	204,204	0,007,581	212,058	0,008,153	219,912	0,00

SSES.

s.	30 CENTIMÈTRES.		31 CENTIMÈTRES.		32 CENTIMÈTRES.		33 CENTIMÈTRES.	
UMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
it.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,023	3,241,8	0,024	3,461,5	0,024	3,688,5	0,025	3,922,6	0,026
0,091	1,038,6	0,094	1,109,0	0,097	1,181,7	0,101	1,256,7	0,104
0,166	0,657,507	0,172	0,702,07	0,177	0,748,10	0,183	0,795,58	0,189
0,205	0,562,998	0,212	0,601,16	0,219	0,640,57	0,226	0,681,23	0,233
0,364	0,373,725	0,377	0,399,06	0,390	0,425,22	0,402	0,452,21	0,415
0,569	0,275,688	0,589	0,294,37	0,609	0,313,67	0,628	0,333,58	0,648
0,664	0,248,877	0,687	0,265,75	0,710	0,283,17	0,733	0,301,14	0,756
0,820	0,216,801	0,848	0,231,50	0,877	0,246,67	0,905	0,262,33	0,933
1,116	0,177,907	1,155	0,189,97	1,193	0,202,42	1,232	0,215,27	1,270
1,458	0,150,468	1,508	0,160,67	1,558	0,171,20	1,609	0,182,07	1,659
1,494	0,148,167	1,546	0,158,21	1,597	0,168,58	1,649	0,179,28	1,700
1,815	0,130,156	1,909	0,138,98	1,972	0,148,09	2,036	0,157,49	2,099
2,278	0,114,552	2,356	0,122,32	2,435	0,130,33	2,513	0,138,61	2,592
2,657	0,104,470	2,748	0,111,55	2,840	0,118,86	2,931	0,126,41	3,023
2,756	0,102,214	2,851	0,109,14	2,946	0,116,30	3,041	0,123,68	3,136
3,280	0,092,225	3,393	0,098,475	3,506	0,104,93	3,619	0,111,59	3,732
3,849	0,083,983	3,982	0,089,675	4,115	0,095,553	4,247	0,101,62	4,380
4,152	0,080,380	4,294	0,085,828	4,437	0,091,455	4,580	0,097,260	4,724
4,464	0,077,070	4,618	0,082,293	4,772	0,087,688	4,926	0,093,254	5,080
5,125	0,071,192	5,301	0,076,018	5,478	0,081,001	5,655	0,086,143	5,832
5,831	0,066,137	6,032	0,070,619	6,233	0,075,249	6,434	0,080,025	6,635
6,977	0,065,209	6,184	0,069,629	6,390	0,074,193	6,596	0,078,903	6,802
6,582	0,061,742	6,809	0,065,927	7,036	0,070,249	7,263	0,074,708	7,490
7,380	0,057,889	7,634	0,061,813	7,889	0,065,865	8,143	0,070,046	8,398
8,222	0,054,484	8,506	0,058,177	8,789	0,061,991	9,073	0,065,926	9,356
9,111	0,051,453	9,425	0,054,940	9,739	0,058,542	10,053	0,062,258	10,367
10,044	0,048,739	10,391	0,052,042	10,737	0,055,454	11,084	0,058,974	11,430
10,627	0,047,242	10,993	0,050,444	11,360	0,053,751	11,726	0,057,163	12,092
11,024	0,046,294	11,404	0,049,432	11,784	0,052,673	12,164	0,056,016	12,544
12,049	0,044,081	12,464	0,047,069	12,880	0,050,155	13,295	0,053,338	13,711
13,119	0,042,069	13,572	0,044,920	14,024	0,047,865	14,476	0,050,903	14,929
14,235	0,040,231	14,726	0,042,957	15,217	0,045,774	15,708	0,048,679	16,199
15,397	0,038,546	15,928	0,041,158	16,459	0,043,856	16,990	0,046,640	17,521
16,604	0,036,995	17,177	0,039,503	17,749	0,042,092	18,322	0,044,764	18,894
17,857	0,035,564	18,473	0,037,974	19,088	0,040,463	19,704	0,043,032	20,320
19,155	0,034,238	19,816	0,036,559	20,476	0,038,956	21,137	0,041,429	21,797
20,499	0,033,008	21,206	0,035,245	21,913	0,037,556	22,620	0,039,939	23,326
21,888	0,031,862	22,643	0,034,022	23,398	0,036,252	24,153	0,038,553	24,907
23,323	0,030,794	24,127	0,032,881	24,932	0,035,036	25,736	0,037,260	26,540
24,058	0,030,285	24,887	0,032,338	25,717	0,034,458	26,547	0,036,645	27,376
24,804	0,029,793	25,659	0,031,813	26,514	0,033,898	27,370	0,036,050	28,225
25,330	0,028,856	27,238	0,030,812	28,146	0,032,832	29,054	0,034,916	29,961
27,901	0,027,976	28,863	0,029,872	29,826	0,031,830	30,788	0,033,851	31,750
30,518	0,027,147	30,536	0,028,987	31,554	0,030,887	32,572	0,032,848	33,590
31,181	0,026,366	32,256	0,028,153	33,332	0,029,999	34,407	0,031,903	35,482
32,889	0,025,629	34,024	0,027,366	35,158	0,029,160	36,292	0,031,011	37,426
34,643	0,024,931	35,838	0,026,621	37,032	0,028,366	38,227	0,030,167	39,422
36,443	0,024,271	37,699	0,025,916	38,956	0,027,615	40,212	0,029,368	41,469
38,288	0,023,644	39,608	0,025,247	40,928	0,026,902	42,248	0,028,609	43,569
40,178	0,023,049	41,564	0,024,611	42,949	0,026,225	44,334	0,027,889	45,720
42,114	0,022,483	43,566	0,024,007	45,019	0,025,580	46,471	0,027,204	47,923
44,095	0,021,944	45,616	0,023,431	47,136	0,024,967	48,657	0,026,552	50,177
46,122	0,021,430	47,713	0,022,883	49,303	0,024,383	50,894	0,025,931	52,484
48,195	0,020,949	49,857	0,022,359	51,519	0,023,825	53,181	0,025,337	54,843
50,314	0,020,471	52,049	0,021,859	53,783	0,023,292	55,518	0,024,770	57,253
52,477	0,020,023	54,287	0,021,381	56,096	0,022,782	57,906	0,024,228	59,715
54,687	0,019,595	56,573	0,020,923	58,458	0,022,294	60,344	0,023,710	62,230
56,942	0,019,184	58,905	0,020,484	60,869	0,021,827	62,832	0,023,212	64,796
63,899	0,017,363	71,275	0,018,540	73,651	0,019,755	76,027	0,021,009	78,402
71,996	0,015,857	84,823	0,016,932	87,651	0,018,042	90,478	0,019,187	93,306
95,231	0,014,591	99,550	0,015,580	102,868	0,016,602	106,186	0,017,656	109,505
81,605	0,013,513	115,454	0,014,428	119,302	0,015,374	123,151	0,016,350	126,999
93,119	0,012,582	132,536	0,013,435	136,954	0,014,316	141,372	0,015,224	145,790
105,770	0,011,772	150,797	0,012,569	155,823	0,013,393	160,850	0,014,244	165,876
119,561	0,011,059	170,235	0,012,083	175,910	0,012,582	181,584	0,013,381	187,259
134,490	0,010,428	190,852	0,011,134	197,214	0,011,864	203,576	0,012,617	209,937
155,559	0,009,864	212,647	0,010,533	219,735	0,011,223	226,823	0,011,941	233,912
177,766	0,009,359	235,620	0,009,993	243,474	0,010,648	251,328	0,011,324	259,182

TUYAUX NEUFS.		34 CENTIMÈTRES.		35 CENTIMÈTRES.		36 CENTIMÈTRES.		37 C
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 m
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	4,163,9	0,027	4,412,4	0,027	4,668,2	0,028	4,931,7
0,02	0,000,314	1,334,0	0,107	1,413,6	0,110	1,495,6	0,113	1,579,9
0,027	0,000,573	0,844,53	0,195	0,894,94	0,200	0,946,81	0,206	1,000,
0,03	0,000,707	0,723,14	0,240	0,766,30	0,247	0,810,72	0,254	0,856,
0,04	0,001,257	0,480,03	0,427	0,508,68	0,440	0,538,16	0,452	0,568,
0,05	0,001,964	0,354,11	0,668	0,375,24	0,687	0,396,99	0,707	0,419,
0,054	0,002,290	0,319,67	0,779	0,338,75	0,802	0,358,38	0,824	0,378,
0,06	0,002,827	0,278,47	0,961	0,295,09	0,990	0,312,19	1,018	0,329,
0,07	0,003,848	0,228,51	1,308	0,242,15	1,347	0,256,19	1,385	0,270,
0,08	0,005,027	0,193,27	1,709	0,204,80	1,759	0,216,68	1,810	0,228
0,081	0,005,153	0,190,31	1,752	0,201,67	1,804	0,213,36	1,855	0,225,
0,09	0,006,362	0,167,18	2,163	0,177,16	2,227	0,187,42	2,290	0,197,
0,10	0,007,854	0,147,14	2,670	0,155,92	2,749	0,164,95	2,827	0,174,
0,108	0,009,161	0,134,19	3,115	0,142,20	3,206	0,150,51	3,298	0,158
0,11	0,009,503	0,131,29	3,231	0,139,12	3,326	0,147,19	3,421	0,155
0,12	0,011,310	0,118,46	3,845	0,125,53	3,958	0,132,80	4,072	0,140
0,13	0,013,273	0,107,87	4,513	0,114,31	4,646	0,120,93	4,778	0,127
0,135	0,014,314	0,103,24	4,867	0,109,41	5,010	0,115,75	5,153	0,122
0,14	0,015,394	0,098,992	5,234	0,104,90	5,388	0,110,98	5,542	0,117
0,15	0,017,672	0,091,443	6,008	0,096,901	6,185	0,102,52	6,362	0,108
0,16	0,020,106	0,084,949	6,836	0,090,019	7,037	0,095,237	7,238	0,100
0,162	0,020,612	0,083,757	7,008	0,088,757	7,214	0,093,901	7,420	0,099
0,17	0,022,698	0,079,304	7,717	0,024,038	7,944	0,088,909	8,171	0,093
0,18	0,025,447	0,074,355	8,652	0,078,793	8,906	0,083,360	9,161	0,088
0,19	0,028,353	0,069,982	9,640	0,074,159	9,924	0,078,457	10,207	0,082
0,20	0,031,416	0,066,089	10,681	0,070,033	10,996	0,074,092	11,310	0,078
0,21	0,034,636	0,062 602	11,776	0,066,339	12,123	0,070,184	12,469	0,074
0,216	0,036,644	0,060,680	12,459	0,064,302	12,825	0,068,029	13,192	0,071
0,22	0,038,013	0,059,463	12,925	0,063,012	13,305	0,066,664	13,685	0,070
0,23	0,041,548	0,056,620	14,126	0,059,999	14,542	0,063,477	14,957	0,067
0,24	0,045,239	0,054,035	15,381	0,057,961	15,834	0,060,579	16,286	0,063
0,25	0,049,088	0,051,674	16,690	0,054,759	17,181	0,057,932	17,672	0,06
0,26	0,053,093	0,049,510	18,052	0,052,465	18,583	0,055,506	19,114	0,05
0,27	0,057,256	0,047,518	19,467	0,050,355	20,039	0,053,273	20,612	0,05
0,28	0,061,575	0,045,679	20,936	0,048,406	21,551	0,051,211	22,167	0,05
0,29	0,066,052	0,043,977	22,458	0,046,602	23,118	0,049,303	23,779	0,05
0,30	0,070,686	0,042,397	24,033	0,044,927	24,740	0,047,531	25,447	0,05
0,31	0,075,477	0,040,925	25,662	0,043,368	26,417	0,045,882	27,172	0,04
0,32	0,080,425	0,039,553	27,344	0,041,913	28,149	0,044,343	28,953	0,04
0,325	0,082,958	0,038,900	28,206	0,041,222	29,035	0,043,611	29,865	0,04
0,33	0,085,530	0,038,268	29,080	0,040,552	29,936	0,042,902	30,791	0,04
0,34	0,090,792	0,037,064	30,869	0,039,276	31,777	0,041,553	32,685	0,04
0,35	0,096,212	0,035,933	32,712	0,038,078	33,674	0,040,285	34,636	0,04
0,36	0,101,788	0,034,869	34,608	0,036,950	35,626	0,039,092	36,644	0,04
0,37	0,107,521	0,033,866	36,557	0,035,887	37,632	0,037,967	38,708	0,04
0,38	0,113,412	0,032,919	38,560	0,034,883	39,694	0,036,905	40,828	0,03
0,39	0,119,459	0,032,023	40,616	0,033,934	41,811	0,035,901	43,005	0,03
0,40	0,125,664	0,031,174	42,726	0,033,035	43,982	0,034,950	45,239	0,03
0,41	0,132,026	0,030,370	44,889	0,032,182	46,209	0,034,047	47,529	0,03
0,42	0,138,545	0,029,605	47,105	0,031,372	48,491	0,033,191	49,876	0,03
0,43	0,145,221	0,028,878	49,375	0,030,602	50,827	0,032,375	52,280	0,03
0,44	0,152,053	0,028,186	51,698	0,029,868	53,219	0,031,599	54,739	0,03
0,45	0,159,043	0,027,526	54,075	0,029,169	55,665	0,030,860	57,255	0,03
0,46	0,166,191	0,026,896	56,505	0,028,501	58,167	0,030,153	59,829	0,03
0,47	0,173,495	0,026,294	58,988	0,027,864	60,723	0,029,479	62,458	0,03
0,48	0,180,956	0,025,719	61,525	0,027,254	63,335	0,028,834	65,144	0,0
0,49	0,188,575	0,025,168	64,116	0,026,670	66,001	0,028,216	67,887	0,0
0,50	0,196,350	0,024,640	66,759	0,026,111	68,723	0,027,624	70,686	0,0
0,55	0,237,583	0,022,302	80,778	0,023,633	83,154	0,025,002	85,530	0,0
0,60	0,282,744	0,020,368	96,133	0,021,583	98,960	0,022,834	101,788	0,0
0,65	0,331,832	0,018,742	112,823	0,019,860	116,141	0,021,012	119,460	0,0
0,70	0,384,846	0,017,356	130,848	0,018,392	134,696	0,019,458	138,545	0,0
0,75	0,441,788	0,016,161	150,208	0,017,125	154,626	0,018,118	159,044	0,0
0,80	0,502,656	0,015,120	170,903	0,016,022	175,930	0,016,951	180,956	0,0
0,85	0,567,451	0,014,204	192,933	0,015,052	198,608	0,015,925	204,282	0,0
0,90	0,636,174	0,013,394	216,299	0,014,193	222,661	0,015,016	229,023	0,0
0,95	0,708,823	0,012,670	241,000	0,013,426	248,088	0,014,205	255,176	0,0
1,00	0,785,400	0,012,021	267,036	0,012,739	274,890	0,013,477	282,744	0,0

ASSES.

ES.	38 CENTIMÈTRES.		39 CENTIMÈTRES.		40 CENTIMÈTRES.		41 CENTIMÈTRES.	
OLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,029	5,201,3	0,030	5,478,6	0,031	5,763,20	0,031	6,055,0	0,032
0,116	1,666,4	0,119	1,755,2	0,123	1,846,40	0,126	1,939,9	0,129
0,212	1,054,9	0,218	1,111,2	0,223	1,168,90	0,229	1,228,1	0,235
0,262	0,903,30	0,269	0,951,47	0,270	1,000,88	0,283	1,051,6	0,290
0,465	0,599,62	0,478	0,631,59	0,490	0,664,40	0,503	0,698,04	0,515
0,726	0,442,33	0,746	0,465,91	0,766	0,490,11	0,785	0,514,92	0,805
0,847	0,399,31	0,870	0,420,60	0,893	0,442,45	0,916	0,464,85	0,939
1,046	0,347,85	1,074	0,366,39	1,103	0,385,42	1,131	0,404,94	1,159
1,424	0,285,44	1,462	0,300,66	1,501	0,316,28	1,539	0,332,29	1,578
1,860	0,241,42	1,910	0,254,29	1,960	0,267,50	2,011	0,281,04	2,061
1,907	0,237,73	1,958	0,250,40	2,010	0,263,41	2,061	0,276,74	2,113
2,354	0,208,83	2,417	0,219,96	2,481	0,231,30	2,545	0,243,10	2,608
2,906	0,183,79	2,985	0,193,59	3,063	0,203,65	3,142	0,213,96	3,220
3,390	0,167,62	3,481	0,176,55	3,573	0,185,72	3,664	0,195,13	3,756
3,516	0,164,00	3,611	0,172,74	3,706	0,181,71	3,801	0,190,91	3,896
4,185	0,147,97	4,298	0,155,86	4,411	0,163,96	4,524	0,172,25	4,637
4,911	0,134,75	5,044	0,141,93	5,177	0,149,30	5,309	0,156,86	5,442
5,296	0,128,97	5,439	0,135,84	5,582	0,142,90	5,726	0,150,13	5,869
5,696	0,123,65	5,850	0,130,25	6,004	0,137,01	6,158	0,143,95	6,311
6,538	0,114,22	6,715	0,120,32	6,892	0,126,56	7,069	0,132,97	7,245
7,439	0,106,11	7,640	0,111,77	7,841	0,117,58	8,042	0,123,53	8,244
7,626	0,104,62	7,833	0,110,20	8,039	0,115,93	8,245	0,121,80	8,451
8,398	0,099,062	8,625	0,104,34	8,852	0,109,76	9,079	0,115,32	9,306
9,415	0,092,880	9,670	0,097,832	9,924	0,102,91	10,179	0,108,12	10,433
10,491	0,087,417	10,774	0,092,078	11,058	0,096,86	11,341	0,101,76	11,625
11,624	0,082,553	11,938	0,086,956	12,252	0,091,47	12,566	0,096,103	12,881
12,815	0,078,199	13,162	0,082,369	13,508	0,086,65	13,854	0,091,033	14,201
13,558	0,075,798	13,925	0,079,840	14,291	0,083,99	14,657	0,088,238	15,024
14,065	0,074,277	14,445	0,078,237	14,825	0,082,30	15,205	0,086,468	15,585
15,373	0,070,726	15,788	0,074,497	16,204	0,078,37	16,619	0,082,334	17,035
16,738	0,067,497	17,191	0,071,097	17,643	0,074,79	18,096	0,078,576	18,548
18,162	0,064,548	18,653	0,067,990	19,144	0,071,52	19,635	0,075,142	20,126
19,644	0,061,844	20,175	0,065,142	20,706	0,068,53	21,237	0,071,995	21,768
21,185	0,059,357	21,757	0,062,522	22,330	0,065,77	22,902	0,069,099	23,475
22,783	0,057,060	23,399	0,060,102	24,014	0,063,22	24,630	0,066,425	25,246
24,439	0,054,934	25,100	0,057,863	25,760	0,060,868	26,421	0,063,950	27,081
26,154	0,052,959	26,861	0,055,783	27,568	0,058,680	28,274	0,061,651	28,981
27,926	0,051,121	28,681	0,053,847	29,436	0,056,644	30,191	0,059,512	30,946
29,757	0,049,406	30,561	0,052,041	31,366	0,054,744	32,170	0,057,515	32,974
30,694	0,048,591	31,524	0,051,182	32,354	0,053,841	33,183	0,056,566	34,013
31,646	0,047,802	32,501	0,050 351	33,357	0,052,966	34,212	0,055,647	35,067
33,593	0,046,298	34,501	0,048,767	35,409	0,051,300	36,317	0,053,897	37,225
35,598	0,044,885	36,560	0,047,279	37,522	0,049,734	38,485	0,052,252	39,447
37,662	0,043,556	38,679	0,045,878	39,697	0,048,261	40,715	0,050,705	41,733
39,783	0,042,303	40,858	0,044,559	41,933	0,046,873	43,008	0,049,246	44,084
41,962	0,041,120	43,096	0,043,312	44,231	0,045,562	45,365	0,047,869	46,499
44,200	0,040 001	45,395	0,042,134	46,589	0,044,322	47,784	0,046,566	48,978
46,496	0,038,941	47,752	0,041,018	49,009	0,043,148	50,266	0,045,332	51,522
48,850	0,037,936	50,170	0,039,959	51,490	0,042,034	52,810	0,044,162	54,131
51,262	0,036,981	52,647	0,038,953	54,033	0,040,976	55,418	0,043,050	56,803
53,732	0,036,072	55,184	0,037,996	56,636	0,039,970	58,088	0,041,993	59,541
56,260	0,035,208	57,780	0,037,085	59,301	0,039,012	60,821	0,040,987	62,342
58,846	0,034,384	60,436	0,036,217	62,027	0,038,099	63,617	0,040,027	65,208
61,491	0,033,597	63,153	0,035,388	64,814	0,037,226	66,476	0,039,111	68,138
64,193	0,032,845	65,928	0,034,597	67,663	0,036,394	69,398	0,038,236	71,133
66,954	0,032,127	68,763	0,033,840	70,573	0,035,597	72,382	0,037,399	74,192
69,773	0,031,439	71,659	0,033,115	73,544	0,034,835	75,430	0,036,598	77,316
72,650	0,030,779	74,613	0,032,420	76,577	0,034,104	78,540	0,035,831	80,504
87,906	0,027,858	90,282	0,029,343	92,657	0,030,867	95,033	0,032,430	97,409
04,615	0,025,442	107,443	0,026,798	110,270	0,028,190	113,098	0,029,618	115,925
22,773	0,023,411	126,096	0,024,659	129,414	0,025,940	132,733	0,027,253	136,051
42,393	0,021,680	146,241	0,022,836	150,090	0,024,022	153,938	0,025,239	157,787
63,462	0,020,187	167,879	0,021,264	172,297	0,022,368	176,715	0,023,500	181,133
85,983	0,018,887	191,009	0,019,894	196,036	0,020,927	201,062	0,021,987	206,089
09,957	0,017,743	215,631	0,018,689	221,306	0,019,660	226,980	0,020,655	232,655
35,384	0,016,731	241,746	0,017,623	248,108	0,018,538	254,470	0,019,476	260,831
62,265	0,015,827	269,353	0,016,671	276,441	0,017,537	283,529	0,018,424	290,617
90,598	0,015,016	298,452	0,015,817	306,306	0,016,638	314,160	0,017,480	322,014

TUYAUX NEUFS.		42 CENTIMÈTRES.		43 CENTIMÈTRES.		44 CENTIMÈTRES.		45 CEN
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	6,353,9	0,033	6,660,1	0,034	6,973,5	0,035	7,294,0
0,02	0,000,314	2,035,7	0,132	2,133,7	0,135	2,234,1	0,138	2,336,9
0,027	0,000,573	1,288,7	0,240	1,350,8	0,246	1,414,4	0,252	1,479,4
0,03	0,000,707	1,103,5	0,297	1,156,6	0,304	1,211,1	0,311	1,266,7
0,04	0,001,257	0,732,50	0,528	0,767,80	0,540	0,803,92	0,553	0,840,88
0,05	0,001,964	0,540,35	0,825	0,566,39	0,844	0,593,04	0,864	0,620,30
0,054	0,002,290	0,487,80	0,962	0,511,30	0,985	0,535,36	1,008	0,559,97
0,06	0,002,827	0,424,93	1,188	0,445,41	1,216	0,466,36	1,244	0,487,80
0,07	0,003,848	0,348,70	1,616	0,365,50	1,655	0,381,70	1,693	0,400,24
0,08	0,005,027	0,294,92	2,111	0,309,13	2,161	0,323,67	2,212	0,338,55
0,081	0,005,153	0,290,41	2,164	0,304,40	2,216	0,318,72	2,267	0,333,38
0,09	0,006,362	0,255,11	2,672	0,267,40	2,736	0,279,98	2,799	0,292,8
0,10	0,007,854	0,221,52	3,299	0,235,34	3,377	0,246,41	3,456	0,257,7
0,108	0,009,161	0,204,76	3,848	0,214,63	3,939	0,224,73	4,031	0,235,0
0,11	0,009,503	0,200,34	3,991	0,209,99	4,086	0,219,87	4,181	0,229,9
0,12	0,011,310	0,180,76	4,750	0,189,47	4,863	0,198,39	4,976	0,207,5
0,13	0,013,273	0,164,61	5,575	0,172,54	5,708	0,180,66	5,840	0,188,9
0,135	0,014,314	0,157,54	6,012	0,165,14	6,155	0,172,91	6,298	0,180,8
0,14	0,015,394	0,151,06	6,465	0,158,34	6,619	0,165,79	6,773	0,173,4
0,15	0,017,672	0,139,54	7,422	0,146,26	7,599	0,153,14	7,775	0,160,1
0,16	0,020,106	0,129,63	8,445	0,135,87	8,646	0,142,27	8,847	0,148,8
0,162	0,020,612	0,127,81	8,657	0,133,97	8,863	0,140,27	9,069	0,146,7
0,17	0,022,698	0,121,01	9,533	0,126,85	9,780	0,132,81	9,987	0,138,9
0,18	0,025,447	0,113,46	10,688	0,118,93	10,942	0,124,53	11,177	0,130,2
0,19	0,028,353	0,106,79	11,908	0,111,93	12,192	0,117,20	12,475	0,122,5
0,20	0,031,416	0,100,85	13,195	0,105,71	13,509	0,110,68	13,823	0,115,7
0,21	0,034,636	0,095,528	14,547	0,100,13	14,894	0,104,84	15,240	0,109,6
0,216	0,036,644	0,092,595	15,390	0,097,057	15,757	0,101,62	16,123	0,106,3
0,22	0,038,013	0,090,737	15,966	0,095,109	16,346	0,099,584	16,726	0,104,1
0,23	0,041,548	0,086,399	17,450	0,090,562	17,865	0,094,824	18,281	0,099,1
0,24	0,045,239	0,082,455	19,000	0,086,428	19,453	0,090,495	19,905	0,094,6
0,25	0,049,088	0,078,852	20,617	0,082,652	21,108	0,086,541	21,599	0,090,3
0,26	0,053,093	0,075,549	22,299	0,079,190	22,830	0,082,916	23,361	0,086,7
0,27	0,057,256	0,072,511	24,047	0,076,005	24,620	0,079,581	25,193	0,083,4
0,28	0,061,575	0,069,704	25,862	0,073,063	26,477	0,076,501	27,093	0,080,4
0,29	0,066,052	0,067,107	27,742	0,070,341	28,402	0,073,651	29,063	0,077,6
0,30	0,070,686	0,064,695	29,688	0,067,813	30,395	0,071,003	31,102	0,074,2
0,31	0,075,477	0,062,450	31,700	0,065,459	32,455	0,068,539	33,210	0,071,4
0,32	0,080,425	0,060,355	33,778	0,063,264	34,583	0,066,240	35,387	0,069,7
0,325	0,082,958	0,059,359	34,842	0,062,220	35,672	0,065,147	36,501	0,068,
0,33	0,085,530	0,058,395	35,923	0,061,209	36,778	0,064,089	37,633	0,067,
0,34	0,090,792	0,056,558	38,133	0,059,283	39,041	0,062,073	39,949	0,064,
0,35	0,096,212	0,054,832	40,409	0,057,474	41,371	0,060,179	42,333	0,062,
0,36	0,101,788	0,053,208	42,751	0,055,772	43,769	0,058,396	44,787	0,061,
0,37	0,107,521	0,051,678	45,159	0,054,168	46,234	0,056,716	47,309	0,059,
0,38	0,113,412	0,050,232	47,633	0,052,653	48,767	0,055,130	49,901	0,057,
0,39	0,119,459	0,048,866	50,173	0,051,220	51,367	0,053,630	52,562	0,056,
0,40	0,125,664	0,047,571	52,779	0,049,863	54,036	0,052,209	55,292	0,054,
0,41	0,132,026	0,046,342	55,451	0,048,575	56,771	0,050,861	58,091	0,053,
0,42	0,138,545	0,045,176	58,189	0,047,353	59,574	0,049,581	60,960	0,051,
0,43	0,145,221	0,044,066	60,993	0,046,190	62,445	0,048,363	63,897	0,050,
0,44	0,152,053	0,043,010	63,862	0,045,083	65,383	0,047,204	66,903	0,049,
0,45	0,159,043	0,042,004	66,798	0,044,028	68,388	0,046,099	69,979	0,048,
0,46	0,166,191	0,041,042	69,800	0,043,020	71,462	0,045,044	73,124	0,047,
0,47	0,173,495	0,040,124	72,868	0,042,057	74,603	0,044,036	76,338	0,046,
0,48	0,180,956	0,039,246	76,002	0,041,137	77,811	0,043,073	79,621	0,045,
0,49	0,188,575	0,038,406	79,202	0,040,256	81,087	0,042,150	82,973	0,044,
0,50	0,196,350	0,037,600	82,467	0,039,412	84,431	0,041,266	86,394	0,043,
0,55	0,237,583	0,034,031	99,785	0,035,671	102,161	0,037,349	104,537	0,039,
0,60	0,282,744	0,031,080	118,752	0,032,578	121,580	0,034,110	124,407	0,035
0,65	0,331,832	0,028,599	139,369	0,029,977	142,688	0,031,388	146,006	0,032
0,70	0,384,846	0,026,485	161,635	0,027,761	165,484	0,029,067	169,332	0,030
0,75	0,441,788	0,024,661	185,551	0,025,849	189,969	0,027,065	194,387	0,028
0,80	0,502,656	0,023,072	211,116	0,024,184	216,142	0,025,322	221,169	0,026
0,85	0,567,451	0,021,675	238,329	0,022,720	244,004	0,023,789	249,678	0,024
0,90	0,636,174	0,020,438	267,193	0,021,423	273,555	0,022,431	279,917	0,023
0,95	0,708,823	0,019,334	297,706	0,020,266	304,794	0,021,219	311,882	0,022
1,00	0,785,400	0,018,343	329,868	0,019,227	337,722	0,020,132	345,576	0,021

SSES.

ES.	46 CENTIMÈTRES.		47 CENTIMÈTRES.		48 CENTIMÈTRES.		49 CENTIMÈTRES.	
LUMES Dbités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,035	7,621,8	0,036	7,956,8	0,037	8,299,0	0,038	8,648,4	0,038
0,141	2,441,9	0,145	2,549,2	0,148	2,658,8	0,151	2,770,8	0,154
0,258	1,545,9	0,263	1,613,8	0,269	1,683,2	0,275	1,754,1	0,281
0,318	1,323,7	0,325	1,381,8	0,332	1,441,3	0,339	1,502,0	0,347
0,565	0,878,67	0,578	0,917,29	0,591	0,956,74	0,603	0,997,02	0,616
0,884	0,648,17	0,903	0,676,66	0,923	0,705,76	0,942	0,735,47	0,962
1,031	0,585,14	1,054	0,610,85	1,076	0,637,12	1,099	0,663,95	1,122
1,272	0,509,72	1,301	0,532,13	1,329	0,555,01	1,357	0,578,38	1,385
1,732	0,418,28	1,770	0,436,66	1,809	0,455,44	1,847	0,474,62	1,886
2,262	0,353,77	2,312	0,369,32	2,362	0,385,20	2,413	0,401,42	2,463
2,319	0,348,36	2,370	0,363,67	2,422	0,379,31	2,473	0,395,28	2,525
2,863	0,306,01	2,926	0,319,46	2,990	0,333,20	3,054	0,347,23	3,117
3,534	0,269,32	3,613	0,281,16	3,691	0,293,25	3,770	0,305,60	3,848
4,122	0,245,62	4,214	0,256,42	4,306	0,267,44	4,397	0,278,70	4,489
4,277	0,240,32	4,372	0,250,88	4,467	0,261,67	4,562	0,272,68	4,657
5,089	0,216,83	5,202	0,226,36	5,316	0,236,09	5,429	0,246,03	5,542
5,973	0,197,00	6,106	0,206,13	6,238	0,214,99	6,371	0,224,05	6,504
6,441	0,188,98	6,584	0,197,29	6,728	0,205,77	6,871	0,214,44	7,014
6,927	0,181,20	7,081	0,189,16	7,235	0,197,30	7,389	0,205,60	7,543
7,952	0,167,38	8,129	0,174,74	8,306	0,182,25	8,482	0,189,93	8,659
9,048	0,155,49	9,249	0,162,33	9,450	0,169,31	9,651	0,176,44	9,852
9,275	0,153,31	9,482	0,160,05	9,688	0,166,93	9,894	0,173,96	10,100
10,214	0,145,16	10,441	0,151,54	10,668	0,158,06	10,895	0,164,71	11,122
11,431	0,136,10	11,686	0,142,09	11,940	0,148,20	12,215	0,154,43	12,469
12,759	0,128,10	13,042	0,133,73	13,326	0,139,48	13,609	0,145,35	13,893
14,137	0,120,97	14,451	0,126,29	14,766	0,131,72	15,080	0,137,27	15,394
15,586	0,114,59	15,933	0,119,63	16,279	0,124,77	16,625	0,130,02	16,972
16,490	0,111,07	16,856	0,115,95	17,223	0,120,94	17,589	0,126,03	17,955
17,106	0,108,84	17,486	0,113,63	17,866	0,118,51	18,246	0,123,50	18,627
18,696	0,103,64	19,112	0,108,19	19,527	0,112,85	19,943	0,117,60	20,358
20,358	0,098,909	20,810	0,103,26	21,262	0,107,70	21,715	0,112,23	22,167
22,089	0,094,587	22,580	0,098,744	23,071	0,102,99	23,562	0,107,33	24,053
23,892	0,090,625	24,423	0,094,608	24,954	0,098,677	25,485	0,102,83	26,016
25,765	0,086,980	26,338	0,090,803	26,910	0,094,708	27,483	0,098,695	28,055
27,709	0,083,614	28,325	0,087,289	28,940	0,091,043	29,556	0,094,876	30,172
29,723	0,080,498	30,384	0,084,036	31,044	0,087,651	31,705	0,091,341	32,366
31,809	0,077,605	32,516	0,081,016	33,222	0,084,500	33,929	0,088,057	34,636
33,965	0,074,912	34,719	0,078,204	35,474	0,081,568	36,229	0,085,002	36,984
36,191	0,072,399	36,995	0,075,581	37,800	0,078,831	38,604	0,082,150	39,408
37,331	0,071,204	38,161	0,074,334	38,990	0,077,531	39,820	0,080,795	40,649
38,489	0,070,047	39,344	0,073,126	40,199	0,076,271	41,054	0,079,482	41,910
40,856	0,067,844	41,764	0,070,826	42,672	0,073,872	43,580	0,076,982	44,488
43,295	0,065,774	44,257	0,068,665	45,219	0,071,618	46,182	0,074,633	47,144
45,805	0,063,826	46,822	0,066,631	47,840	0,069,496	48,858	0,072,422	49,876
48,385	0,061,990	49,460	0,064,714	50,535	0,067,497	51,610	0,070,339	52,685
51,035	0,060,256	52,169	0,062,904	53,304	0,065,609	54,438	0,068,372	55,572
53,757	0,058,616	54,951	0,061,193	56,146	0,063,824	57,340	0,066,511	58,535
56,549	0,057,063	57,805	0,059,571	59,062	0,062,133	60,319	0,064,749	61,575
59,412	0,055,590	60,732	0,058,033	62,052	0,060,529	63,372	0,063,077	64,693
62,345	0,054,191	63,731	0,056,573	65,116	0,059,005	66,502	0,061,490	67,887
65,349	0,052,860	66,802	0,055,183	68,254	0,057,556	69,706	0,059,979	71,158
68,424	0,051,593	69,944	0,053,860	71,465	0,056,177	72,985	0,058,542	74,506
71,569	0,050,385	73,160	0,052,600	74,750	0,054,862	76,341	0,057,172	77,931
74,786	0,049,232	76,448	0,051,396	78,110	0,053,606	79,772	0,055,863	81,434
78,073	0,048,130	79,808	0,050,246	81,543	0,052,407	83,278	0,054,613	85,013
81,430	0,047,077	83,240	0,049,147	85,049	0,051,260	86,859	0,053,418	88,668
84,859	0,046,069	86,745	0,048,094	88,630	0,050,162	90,516	0,052,274	92,402
88,358	0,045,103	90,321	0,047,085	92,285	0,049,110	94,248	0,051,178	96,212
106,912	0,040,822	109,288	0,042,616	111,664	0,044,449	114,040	0,046,320	116,416
127,235	0,037,282	130,062	0,038,034	132,890	0,040,594	135,717	0,042,303	138,545
149,324	0,034,306	152,643	0,035,814	155,961	0,037,354	159,279	0,038,926	162,598
173,181	0,031,770	177,029	0,033,166	180,878	0,034,592	184,726	0,036,049	188,575
198,805	0,029,582	203,222	0,030,882	207,640	0,032,210	212,058	0,033,566	216,476
226,195	0,027,676	231,222	0,028,893	236,248	0,030,135	241,275	0,031,404	246,301
255,353	0,026,000	261,027	0,027,143	266,702	0,028,310	272,376	0,029,502	278,051
286,278	0,024,516	292,640	0,025,594	299,002	0,026,695	305,364	0,027,819	311,725
318,970	0,023,192	326,059	0,024,212	333,147	0,025,253	340,235	0,026,316	347,323
353,430	0,022,004	361,284	0,022,971	369,138	0,023,959	376,992	0,024,968	384,846

TUYAUX NEUFS.		50 CENTIMÈTRES.		52 CENTIMÈTRES.		54 CENTIMÈTRES.		56 CE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	9,005	0,039	9,739,8	0,041	10,503	0,042	11,296
0,02	0,000,314	2,885	0,157	3,120,4	0,163	3,365,1	0,170	3,618,9
0,027	0,000,573	1,826,4	0,286	1,975,4	0,298	2,130,3	0,309	2,291,0
0,03	0,000,707	1,563,9	0,353	1,691,5	0,368	1,824,1	0,382	1,961,7
0,04	0,001,257	1,038,1	0,628	1,122,8	0,653	1,210,9	0,679	1,302,2
0,05	0,001,964	0,765,8	0,982	0,828,29	1,021	0,893,23	1,060	0,960,6
0,054	0,002,290	0,691,3	1,145	0,747,74	1,191	0,806,36	1,237	0,867,2
0,06	0,002,827	0,602,2	1,414	0,651,37	1,470	0,702,44	1,527	0,755,1
0,07	0,003,848	0,494,2	1,924	0,534,51	2,001	0,576,42	2,078	0,619,9
0,08	0,005,027	0,418,0	2,513	0,452,07	2,613	0,487,52	2,714	0,524,3
0,081	0,005,153	0,411,6	2,577	0,445,16	2,679	0,480,06	2,783	0,516,2
0,09	0,006,362	0,361,6	3,181	0,391,05	3,308	0,421,71	3,435	0,453,5
0,10	0,007,854	0,318,2	3,927	0,344,17	4,084	0,371,15	4,241	0,399,1
0,108	0,009,161	0,290,20	4,580	0,313,87	4,763	0,338,48	4,947	0,364,(
0,11	0,009,503	0,283,93	4,752	0,307,10	4,941	0,331,17	5,131	0,356,1
0,12	0,011,310	0,256,18	5,655	0,277,08	5,881	0,298,81	6,107	0,321,2
0,13	0,013,273	0,233,29	6,637	0,252,32	6,902	0,272,10	7,167	0,292,(
0,135	0,014,314	0,223,28	7,157	0,241,50	7,443	0,260,43	7,729	0,280,(
0,14	0,015,394	0,214,08	7,697	0,231,55	8,005	0,249,71	8,313	0,268,7
0,15	0,017,672	0,197,76	8,836	0,213,89	9,189	0,230,66	9,543	0,248,(
0,16	0,020,106	0,183,71	10,053	0,198,70	10,455	0,214,28	10,857	0,230,
0,162	0,020,612	0,181,14	10,306	0,195,92	10,718	0,211,28	11,130	0,227,2
0,17	0,022,698	0,171,51	11,349	0,185,50	11,803	0,200,04	12,257	0,215,
0,18	0,025,447	0,160,80	12,723	0,173,92	13,232	0,187,56	13,741	0,201,
0,19	0,028,353	0,151,35	14,176	0,163,69	14,743	0,176,53	15,310	0,189,
0,20	0,031,416	0,142,93	15,708	0,154,59	16,336	0,166,71	16,965	0,179,
0,21	0,034,636	0,135,39	17,318	0,146,43	18,011	0,157,91	18,703	0,169,
0,216	0,036,644	0,131,25	18,322	0,141,94	19,055	0,153,07	19,787	0,164,
0,22	0,038,013	0,128,60	19,007	0,139,09	19,767	0,149,99	20,527	0,161,
0,23	0,041,548	0,122,45	20,774	0,132,44	21,605	0,142,82	22,435	0,153,
0,24	0,045,239	0,116,86	22,620	0,126,39	23,524	0,136,50	24,429	0,146,
0,25	0,049,088	0,111,75	24,544	0,120,87	25,525	0,130,35	26,507	0,140,
0,26	0,053,093	0,107,07	26,547	0,115,81	27,608	0,124,89	28,670	0,134,
0,27	0,057,256	0,102,77	28,628	0,111,15	29,773	0,119 86	30,918	0,128,
0,28	0,061,575	0,098,788	30,788	0,106,85	32,019	0,115,23	33,251	0,123,
0,29	0,066,052	0,095,107	33,026	0,102,87	34,347	0,110,93	35,668	0,119,
0,30	0,070,686	0,091,688	35,343	0,099,170	36,757	0,106,95	38,170	0,115,
0,31	0,075,477	0,088,507	37,738	0,095,729	39,248	0,103,23	40,757	0,111,
0,32	0,080,425	0,085,54	40,212	0,092,517	41,821	0,099,771	43,429	0,107,
0,325	0,082,958	0,084,126	41,479	0,090,991	43,138	0,098,125	44,797	0,105,
0,33	0,085,530	0,082,759	42,765	0,089,512	44,475	0,096,530	46,186	0,103,
0,34	0,090,792	0,080,156	45,396	0,086,697	47,211	0,093,494	49,027	0,100,
0,35	0,096,212	0,077,710	48,106	0,084,051	50,029	0,090,641	51,954	0,097,
0,36	0,101,788	0,075,408	50,894	0,081,562	52,929	0,087,956	54,965	0,094,
0,37	0,107,521	0,073,239	53,761	0,079,216	55,911	0,085,426	58,061	0,091
0,38	0,113,412	0,071,191	56,706	0,077,000	58,974	0,083,037	61,242	0,089
0,39	0,119,459	0,069,254	59,730	0,074,905	62,119	0,080,778	64,508	0,086
0,40	0,125,664	0,067,419	62,832	0,072,920	65,345	0,078,637	67,858	0,084
0,41	0,132,026	0,065,678	66,013	0,071,037	68,653	0,076,607	71,294	0,082
0,42	0,138,545	0,064,025	69,273	0,069,249	72,043	0,074,679	74,814	0,080
0,43	0,145,221	0,062,450	72,611	0,067,548	75,515	0,072,844	78,419	0,078
0,44	0,152,053	0,060,956	76,027	0,065,930	79,067	0,071,099	82,109	0 076
0,45	0,159,043	0,059,529	79,522	0,064,386	82,702	0,069,435	85,883	0,074
0,46	0,166,191	0 058,166	83,096	0,062,913	86,419	0,067,845	89,743	0,072
0,47	0,173,495	0,056,865	86,748	0,061,505	90,217	0,066,327	93,687	0,071
0,48	0,180,956	0,055,621	90,478	0,060,159	94,097	0,064,876	97,716	0,069
0,49	0,188,575	0,054,430	94,288	0,058,871	98,059	0,063,487	101,830	0,068
0,50	0,196,350	0,053,288	98,175	0,057,636	102,102	0,062,155	106,029	0,066
0,55	0,237,583	0,048,230	118,792	0,052,166	123,543	0,056,255	128,295	0,060
0,60	0,282,744	0,044,050	141,372	0,047,642	147,027	0,051,377	152,681	0,055
0,65	0,331,832	0,040,531	165,916	0,043,839	172,553	0,047,276	179,189	0,050
0,70	0,384,846	0,037,530	192,423	0,040,598	200,119	0,043,781	207,817	0,047
0,75	0,441,788	0,034,950	220,894	0,037,802	229,720	0,040,766	238,565	0,043
0,80	0,502,656	0,032,699	251,328	0,035,367	261,381	0,038,140	271,434	0,041
0,85	0,567,451	0,030,719	283,726	0,033,225	295,074	0,035,830	306,423	0,038
0,90	0,636,174	0,028,965	318,087	0,031,329	330,810	0,033,785	343,533	0,036
0,95	0,708,823	0,027,401	354,412	0,029,637	368,587	0,031,961	382,764	0,031
1,00	0,785,400	0,025,997	392,700	0,028,118	408,408	0,030,323	424,116	0,032

SSES.

ES.	58 CENTIMÈTRES.		60 CENTIMÈTRES.		62 CENTIMÈTRES.		64 CENTIMÈTRES.	
OLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,011	12,117	0,046	12,967	0,047	13,846	0,049	14,754	0,050
0,176	3,882,1	0,182	4,154	0,188	4,436,0	0,195	4,726,8	0,201
0,321	2,457,6	0,332	2,630	0,344	2,808,3	0,355	2,992,4	0,366
0,396	2,104,4	0,410	2,252	0,424	2,404,6	0,438	2,562,3	0,452
0,704	1,396,9	0,729	1,494,9	0,754	1,596,2	0,779	1,700,9	0,804
1,100	1,030,5	1,139	1,102,75	1,178	1,177,5	1,217	1,254,7	1,257
1,283	0,930,25	1,328	0,995,51	1,374	1,063,0	1,420	1,132,7	1,466
1,583	0,810,35	1,640	0,867,20	1,696	0,925,98	1,753	0,986,69	1,810
2,155	0,664,98	2,232	0,711,63	2,309	0,759,86	2,386	0,809,67	2,463
2,815	0,562,42	2,915	0,601,87	3,016	0,642,67	3,116	0,684,80	3,217
2,885	0,553,81	2,989	0,592,67	3,092	0,632,84	3,195	0,674,32	3,297
3,562	0,486,49	3,689	0,520,62	3,817	0,555,91	3,944	0,592,35	4,071
4,398	0,428,17	4,555	0,458,21	4,712	0,489,26	4,869	0,521,34	5,026
5,130	0,390,49	5,313	0,417,88	5,497	0,446,20	5,679	0,475,45	5,863
5,321	0,382,05	5,511	0,408,86	5,702	0,436,57	5,892	0,465,19	6,082
6,333	0,344,71	6,559	0,368,90	6,786	0,393,90	7,012	0,419,72	7,238
7,433	0,313,91	7,698	0,335,93	7,964	0,358,70	8,229	0,382,21	8,495
8,015	0,300,44	8,304	0,321,52	8,588	0,343,31	8,875	0,365,82	9,161
8,620	0,288,07	8,928	0,308,28	9,236	0,329,17	9,544	0,350,75	9,852
9,596	0,266,10	10,249	0,284,77	10,603	0,304,07	10,956	0,324,00	11,309
1,259	0,247,20	11,661	0,264,55	12,064	0,282,48	12,465	0,300,99	12,867
1,543	0,243,74	11,955	0,260,84	12,367	0,278,51	12,779	0,296,77	13,191
2,711	0,230,78	13,165	0,246,97	13,619	0,263,71	14,073	0,281,00	14,527
4,250	0,216,38	14,759	0,231,56	15,268	0,247,25	15,777	0,263,46	16,286
5,877	0,203,65	16,445	0,217,94	17,012	0,232,71	17,579	0,247,96	18,145
7,593	0,192,32	18,221	0,205,81	18,850	0,219,76	19,477	0,234,17	20,106
9,396	0,182,18	20,089	0,194,96	20,782	0,208,17	21,474	0,221,82	22,167
0,520	0,176,58	21,253	0,188,97	21,986	0,201,78	22,719	0,215,01	23,451
1,287	0,173,04	22,047	0,185,18	22,808	0,197,73	23,568	0,210,69	24,328
3,267	0,164,77	24,097	0,176,32	24,929	0,188,28	25,759	0,200,62	26,590
5,333	0,157,24	26,239	0,168,28	27,143	0,179,68	28,048	0,191,46	28,953
7,489	0,150,37	28,471	0,160,92	29,453	0,171,83	30,434	0,183,09	31,416
9,732	0,144,07	30,793	0,154,18	31,856	0,164,63	32,917	0,175,43	33,979
2,063	0,138,28	33,208	0,147,98	34,353	0,158,01	35,498	0,168,37	36,643
4,482	0,132,93	35,713	0,142,25	36,945	0,151,90	38,177	0,161,85	39,408
6,989	0,127,98	38,310	0,136,95	39,631	0,146,24	40,952	0,155,82	42,273
9,584	0,123,38	40,997	0,132,03	42,412	0,140,98	43,825	0,150,22	45,239
2,267	0,119,09	43,777	0,127,45	45,286	0,136,09	46,795	0,145,01	48,305
5,037	0,115,10	46,646	0,123,17	48,255	0,131,52	49,863	0,140,14	51,471
6,456	0,113,20	48,115	0,121,14	49,775	0,129,35	51,433	0,137,83	53,093
7,897	0,111,36	49,607	0,119,17	51,318	0,127,25	53,029	0,135,59	54,739
0,843	0,107,86	52,659	0,115,42	54,475	0,123,25	56,291	0,131,33	58,107
3,878	0,104,57	55,803	0,111,90	57,727	0,119,49	59,651	0,127,32	61,575
7,001	0,101,47	59,037	0,108,59	61,073	0,115,95	63,108	0,123,55	65,144
0,211	0,098,551	62,362	0,105,46	64,513	0,112,61	66,663	0,120,00	68,813
3,510	0,095,794	65,779	0,102,51	68,047	0,109,46	70,315	0,116,64	72,583
6,897	0,093,188	69,286	0,099,725	71,676	0,106,48	74,065	0,113,47	76,453
0,371	0,090,719	72,885	0,097,083	75,398	0,103,66	77,911	0,110,46	80,425
3,934	0,088,376	76,575	0,094,576	79,216	0,100,99	81,856	0,107,61	84,497
7,585	0,086,152	80,356	0,092,196	83,127	0,098,445	85,897	0,104,90	88,669
1,323	0,084,036	84,228	0,089,932	87,133	0,096,027	90,037	0,102,32	92,941
5,149	0,082,022	88,191	0,087,776	91,232	0,093,725	94,273	0,099,870	97,313
9,064	0,080,102	92,245	0,085,722	95,426	0,091,532	98,607	0,097,532	101,787
3,067	0,078,269	96,391	0,083,759	99,715	0,089,437	103,038	0,095,300	106,362
7,157	0,076,517	100,627	0,081,886	104,097	0,087,435	107,567	0,093,167	111,037
1,335	0,074,843	104,954	0,080,094	108,574	0,085,523	112,193	0,091,129	115,811
5,602	0,073,240	109,373	0,078,378	113,145	0,083,691	116,916	0,089,177	120,688
9,956	0,071,704	113,883	0 076,735	117,810	0,081,936	121,737	0,087,307	125,664
3,046	0,064,898	137,798	0,069,451	142,550	0,074,158	147,301	0,079,020	152,053
8,337	0,059,270	163,991	0,063,428	169,646	0,067,727	175,301	0,072,167	180,956
5,825	0,054,539	192,462	0,058,365	199,099	0,062,321	205,735	0,066,407	212,372
5,513	0,050,507	223,211	0,054,050	230,908	0,057,714	238,604	0,061,497	246,301
7,401	0,047,029	256,237	0,050,328	265,073	0,053,739	273,908	0,057,262	282,744
1,487	0,043,999	291,540	0,047,086	301,594	0,050,278	311,647	0,053,574	321,699
7,772	0,041,335	329,121	0,044,235	340,471	0,047,233	351,819	0,050,330	363,169
6,257	0,038,976	368,981	0,041,710	381,704	0,044,537	394,427	0,047,457	407,151
6,941	0,036,871	411,117	0,039,457	425 294	0,042,132	439,470	0,044,894	453,647
9,824	0,034,982	455,532	0,037,436	471,240	0,039,973	486,948	0,042,593	502,656

TUYAUX NEUFS.		66 CENTIMÈTRES.		68 CENTIMÈTRES.		70 CENTIMÈTRES.		72 CE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	15,690	0,052	16,656	0,053	17,650	0,055	18,673
0,02	0,000,314	5,026,8	0,207	5,336,1	0,214	5,654,6	0,220	5,982,3
0,027	0,000,573	3,182,3	0,378	3,378,1	0,389	3,579,8	0,401	3,787,2
0,03	0,000,707	2,724,9	0,467	2,892,6	0,481	3,065,2	0,495	3,242,9
0,04	0,001,257	1,808,8	0,829	1,920,1	0,855	2,034,7	0,880	2,152,7
0,05	0,001,964	1,334,3	1,296	1,416,4	1,335	1,501,0	1,374	1,588,0
0,054	0,002,290	1,204,6	1,512	1,278,7	1,557	1,355,0	1,603	1,433,5
0,06	0,002,827	1,049,3	1,866	1,113,9	1,923	1,180,4	1,979	1,248,8
0,07	0,003,848	0,861,07	2,540	0,914,05	2,617	0,968,60	2,694	1,024,7
0,08	0,005,027	0,728,27	3,317	0,773,08	3,418	0,819,22	3,519	0,866,7
0,081	0,005,153	0,717,13	3,401	0,761,25	3,504	0,806,69	3,607	0,853,4
0,09	0,006,362	0,629,95	4,199	0,668,71	4,325	0,708,63	4,453	0,749,7
0,10	0,007,854	0,554,43	5,183	0,588,54	5,341	0,623,67	5,498	0,659,8
0,108	0,009,161	0,505,63	6,046	0,536,74	6,229	0,568,78	6,413	0,601,7
0,11	0,009,503	0,494,71	6,272	0,525,15	6,462	0,556,50	6,652	0,588,7
0,12	0,011,310	0,446,37	7,464	0,473,83	7,691	0,502,11	7,917	0,531,2
0,13	0,013,273	0,406,47	8,760	0,431,48	9,025	0,457,24	9,291	0,483,7
0,135	0,014,314	0,389,04	9,447	0,412,97	9,733	0,437,62	10,020	0,462,4
0,14	0,015,394	0,373,02	10,159	0,395,97	10,467	0,419,60	10,776	0,443,5
0,15	0,017,672	0,344,57	11,663	0,365,77	12,017	0,387,60	12,370	0,410,0
0,16	0,020,106	0,320,10	13,270	0,339,79	13,672	0,360,08	14,074	0,380,9
0,162	0,020,612	0,315,61	13,603	0,335,03	14,016	0,355,03	14,428	0,375,0
0,17	0,022,698	0,298,83	14,981	0,317,22	15,435	0,336,15	15,889	0,355,0
0,18	0,025,447	0,280,18	16,795	0,297,42	17,303	0,315,17	17,813	0,333,3
0,19	0,028,353	0,263,70	18,713	0,279,93	19,279	0,296,64	19,847	0,313,7
0,20	0,031,416	0,249,03	20,734	0,264,29	21,363	0,280,13	21,991	0,296,3
0,21	0,034,636	0,235,90	22,859	0,250,41	23,552	0,265,36	24,245	0,280,7
0,216	0,036,644	0,228,65	24,185	0,242,72	24,917	0,257,21	25,651	0,272,1
0,22	0,038,013	0,224,06	25,089	0,237,85	25,849	0,252,05	26,609	0,266,4
0,23	0,041,548	0,213,35	27,421	0,226,48	28,252	0,240,00	29,083	0,253,7
0,24	0,045,239	0,203,61	29,857	0,216,14	30,762	0,229,04	31,667	0,242,1
0,25	0,049,088	0,194,72	32,397	0,206,70	33,379	0,219,03	34,361	0,231,7
0,26	0,053,093	0,186,56	35,041	0,198,04	36,103	0,209,86	37,165	0,222,1
0,27	0,057,256	0,179,06	37,789	0,190,07	38,933	0,201,42	40,079	0,213,4
0,28	0,061,575	0,172,13	40,639	0,182,72	41,871	0,193,62	43,103	0,204,7
0,29	0,066,052	0,165,71	43,594	0,175,91	44,915	0,186,41	46,236	0,197,1
0,30	0,070,686	0,159,76	46,653	0,169,59	48,066	0,179,71	49,480	0,190,4
0,31	0,075,477	0,154,21	49,815	0,163,70	51,324	0,173,48	52,834	0,183,7
0,32	0,080,425	0,149,04	53,080	0,158,21	54,689	0,167,65	56,297	0,177,1
0,325	0,082,958	0,146,58	54,752	0,155,60	56,411	0,164,89	58,071	0,174,1
0,33	0,085,530	0,144,20	56,449	0,153.07	58,160	0,162,21	59 871	0,171,1
0,34	0,090,792	0,139,66	59,923	0,148,26	61,739	0,157,11	63,555	0 166,
0,35	0,096,212	0,135,40	63,499	0,143,73	65,423	0,152,31	67,348	0,161,
0,36	0,101,788	0,131,39	67,179	0,139,48	69,215	0,147,80	71,251	0,156,
0,37	0,107,521	0,127,61	70,964	0,135,46	73,114	0,143,55	75,265	0,151,
0,38	0,113,412	0,124,04	74,851	0,131,67	77,119	0,139,53	79,388	0,147,
0,39	0,119,459	0,120,67	78,843	0,128,09	81,232	0,135,74	83,622	0,143
0,40	0,125,664	0,117,47	82,938	0,124,70	85,451	0,132,14	87,965	0,139
0,41	0,132,026	0,114,44	87,137	0,121,48	89,777	0,128,73	92,418	0,136
0,42	0,138,545	0,111,56	91,439	0,118,42	94,211	0,125,49	96,982	0,132
0,43	0,145,221	0,108,82	95,845	0,115,51	98,750	0,122,41	101,655	0,129
0,44	0,152,053	0,106,21	100,355	0,112,74	103,396	0,119,47	106,437	0,126
0,45	0,159,043	0,103,72	104,968	0,110,10	108,149	0,116,68	111,330	0,123
0,46	0,166,191	0,101,35	109,686	0,107,58	113,009	0,114,01	116,334	0,120
0,47	0,173,495	0,099,081	114,507	0,105,18	117,977	0,111,46	121,447	0,117
0,48	0,180,956	0,096,914	119,431	0,102,88	123,050	0,109,02	126,669	0,115
0,49	0,188,575	0,094,838	124,459	0,100,67	128,231	0,106,68	132,003	0,112
0,50	0,196,350	0,092,849	129,591	0,098,561	133,518	0,104,44	137,445	0,110
0,55	0,237,583	0,084,036	156,805	0,089,206	161,556	0,094,531	166,308	0,100
0,60	0,282,744	0,076,748	186,611	0,081,470	192,265	0,086,333	197,921	0,091
0,65	0,331,832	0,070,622	219,009	0,074,967	225,645	0,079,442	232,282	0,084
0,70	0,384,846	0,065,401	253,998	0,069,425	261,695	0,073,569	269,392	0,077
0,75	0,441,788	0,060,897	291,580	0,064,641	309,415	0,068,502	309,252	0,072
0,80	0,502,656	0,056,974	331,753	0,060,480	341,806	0,064,090	351,859	0,067
0,85	0,567,451	0,053,524	374,517	0,056,818	385,867	0,060,209	397,216	0,063
0,90	0,636,174	0,050,470	419,875	0,053,575	432,598	0,056,772	445,322	0,060
0,95	0,708,823	0,047,744	467,823	0,050,681	481,999	0,053,706	496,176	0,056
1,00	0,785,400	0,045,297	518,364	0,048,084	534,072	0,050,954	549,780	0,053

SSES.

s.	74 CENTIMÈTRES.		76 CENTIMÈTRES.		78 CENTIMÈTRES.		80 CENTIMÈTRES.	
UMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
it.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,057	19,725	0,059	20,805	0,060	21,915	0,061	23,053	0,063
0,226	6,319,3	0,232	6,665,5	0,239	7,020,9	0,245	7,385,6	0,251
0,412	4,000,6	0,424	4,219,7	0,435	4,444,7	0,447	4,675,6	0,458
0,309	3,425,5	0,523	3,613,2	0,537	3,805,9	0,551	4,003,5	0,565
0,905	2,273,9	0,930	2,398,5	0,955	2,526,4	0,980	2,657,6	1,005
0,414	1,677,4	1,453	1,769,3	1,492	1,863,7	1,532	1,960,4	1,571
0,649	1,514,3	1,695	1,597,2	1,741	1,682,4	1,786	1,769,8	1,832
0,036	1,319,1	2,092	1,394,6	2,149	1,465,6	2,205	1,541,7	2,262
0,771	1,082,5	2,848	1,141,8	2,925	1,202,7	3,002	1,265,1	3,079
0,619	0,915,52	3,719	0,965,68	3,820	1,017,2	3,921	1,070,0	4,021
0,710	0,901,51	3,813	0,950,90	3,916	1,001,6	4,019	1,053,6	4,122
0,580	0,791,93	4,707	0,835,31	4,835	0,879,85	4,962	0,925,56	5,089
0,655	0,696,99	5,811	0,735,17	5,969	0,774,37	6,126	0,824,59	6,283
0,595	0,635,64	6,779	0,670,47	6,962	0,706,22	7,145	0,742,90	7,329
0,842	0,621,91	7,032	0,655,99	7,222	0,690,97	7,412	0,726,85	7,603
0,143	0,561,13	8,369	0,591,88	8,595	0,623,44	8,821	0,655,82	9,048
0,557	0,510,99	9,822	0,538,98	10,087	0,567,72	10,353	0,597,21	10,619
0,306	0,489,07	10,592	0,515,86	10,878	0,543,37	11,165	0,571,59	11,451
0,083	0,468,93	11,391	0,494,62	11,699	0,520,99	12,007	0,548,05	12,315
0,723	0,433,17	13,077	0,456,90	13,430	0,481,26	13,783	0,506,26	14,137
0,476	0,402,40	14,879	0,424,45	15,280	0,447,08	15,683	0,470,30	16,085
0,811	0,396,76	15,253	0,418,50	15,665	0,440,81	16,077	0,463,71	16,490
0,343	0,375,67	16,796	0,396,25	17,250	0,417,38	17,704	0,419,06	18,158
0,321	0,352,22	18,831	0,371,52	19,339	0,391,33	19,849	0,411,66	20,358
0,414	0,331,51	20,981	0,349,67	21,548	0,368,31	22,115	0,387,44	22,682
0,619	0,313,06	23,247	0,330,21	23,876	0,347,82	24,504	0,365,89	25,133
0,938	0,296,55	25,631	0,312,80	26,323	0,329,47	27,016	0,346,59	27,709
0,383	0,287,44	27,116	0,303,19	27,849	0,319,36	28,582	0,335,95	29,315
0,369	0,281,68	28,129	0,297,11	28,890	0,312,95	29,650	0,329,20	30,411
0,914	0,268,21	30,745	0,282,90	31,576	0,297,99	32,407	0,313,47	33,238
0,572	0,255,97	33,477	0,269,99	34,381	0,284,39	35,286	0,299,16	36,191
0,343	0,244,78	36,325	0,258,19	37,306	0,271,96	38,288	0,286,09	39,270
0,227	0,234,53	39,289	0,247,38	40,351	0,260,57	41,412	0,274,10	42,474
0,224	0,225,10	42,369	0,237,43	43,514	0,250,09	44,659	0,263,08	45,805
0,334	0,216,38	45,565	0,228,24	46,797	0,240,41	48,029	0,252,90	49,260
0,557	0,208,32	48,878	0,219,73	50,199	0,231,45	51,521	0,243,47	52,842
0,893	0,200,83	52,307	0,211,84	53,721	0,223,13	55,135	0,234,72	56,549
0,343	0,193,86	55,853	0,204,49	57,362	0,215,39	58,871	0,226,58	60,382
0,905	0,187,36	59,514	0,197,63	61,123	0,208,16	62,731	0,218,98	64,340
0,729	0,184,27	61,389	0,194,37	63,048	0,204,73	64,707	0,215,36	66,366
0,581	0,181,28	63,292	0,191,21	65,003	0,201,40	66,713	0,211,86	68,424
0,370	0,175,57	67,186	0,185,19	69,002	0,195,07	70,817	0,205,20	72,634
0,272	0,170,22	71,196	0,179,54	73,121	0,189,12	75,045	0,198,94	76,969
0,287	0,165,17	75,323	0,174,22	77,359	0,183,51	79,394	0,193,05	81,430
0,415	0,160,42	79,565	0,169,21	81,716	0,178,23	83,866	0,187,49	86,017
0,656	0,155,94	83,925	0,164,48	86,193	0,173,25	88,461	0,182,25	90,729
0,011	0,151,69	88,399	0,160,00	90,789	0,168,54	93,178	0,177,29	95,567
0,478	0,147,67	92,991	0,155,76	95,505	0,164,07	98,017	0,172,59	100,531
0,059	0,143,86	97,699	0,151,74	100,339	0,159,83	102,980	0,168,14	105,621
0,752	0,140,24	102,523	0,147,92	105,294	0,155,81	108,065	0,163,90	110,836
0,559	0,136,80	107,463	0,144,29	110,367	0,151,98	113,272	0,159,88	116,177
0,478	0,133,52	112,519	0,140,83	115,560	0,148,34	118,601	0,156,05	121,642
0,511	0,130,39	117,691	0,137,54	120,873	0,144,87	124,053	0,152,39	127,234
0,657	0,127,41	122,981	0,134,39	126,305	0,141,55	129,629	0,148,91	132,953
0,916	0,124,56	128,386	0,131,38	131,856	0,138,39	135,326	0,145,57	138,796
0,288	0,121,83	133,907	0,128,51	137,526	0,135 36	141,145	0,142,39	144,765
0,774	0,119,22	139,545	0,125,75	143,317	0,132,46	147,088	0,139,34	150,860
0,372	0,116,72	145,299	0,123,12	149,226	0,129,68	153,153	0,136,42	157,080
0,059	0,105,64	175,811	0,111,43	180,563	0,117,37	185,315	0,123,47	190,066
0,575	0,096,482	209,230	0,101,77	214,885	0,107,19	220,540	0,112,76	226,195
0,919	0,088,780	245,555	0,093,644	252,192	0,098,638	258,829	0,103,76	265,466
0,089	0,082,217	284,786	0,086,721	292,483	0,091,345	300,179	0,096,090	307,877
0,087	0,076,554	326,923	0,080,748	335,759	0,085,054	344,595	0,089,472	353,430
0,012	0,071,623	371,965	0,075,547	382,018	0,079,576	392,071	0,083,709	402,125
0,565	0,067,287	419,913	0,070,973	431,263	0,074,757	442,611	0,078,640	453,961
0,015	0,063,446	470,769	0,066,922	483,492	0,070,491	496,215	0,074,152	508,939
0,352	0,060,019	524,529	0,063,307	538,705	0,066,683	552,881	0,070,147	567,058
0,483	0,056,044	581,196	0,060,063	596,904	0,063,266	612,612	0,066,552	628,320

TUYAUX NEUFS.		82 CENTIMÈTRES.		84 CENTIMÈTRES.		86 CENTIMÈTRES.		88 c
DIAMETRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 m
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	met.
0,01	0,000,079	24,220	0,064	25,416	0,066	26,640	0,068	27,894
0,02	0,000,314	7,759,5	0,258	8,142,6	0,264	8,535,0	0,270	8,936,
0,027	0,000,573	4,912,3	0,470	5,154,9	0,481	5,403,2	0,492	5,657,
0,03	0,000,707	4,206,2	0,580	4,413,9	0,594	4.626,6	0,608	4,844,
0,04	0,001,257	2,792,1	1,030	2,930,0	1,056	3,071,2	1,081	3,215,
0,05	0,001,964	2,059,7	1,610	2,161,4	1,649	2,265,5	1,689	2,372.
0,054	0,002,290	1,859,4	1,878	1,951,2	1,924	2,045,2	1,970	2,141.
0,06	0,002,827	1,619,7	2,319	1,699,7	2,375	1,781,6	2,432	1,865
0,07	0,003,848	1,329,2	3,156	1,394,8	3,233	1,462,0	3,310	1,530
0,08	0,005,027	1,124,2	4,121	1,179,7	4,222	1,236,5	4,323	1,294
0,081	0,005,153	1,107,0	4,225	1,161,6	4,328	1,217,6	4,431	1,274
0,09	0,006,362	0,972,41	5,217	1,020,4	5,343	1,069,6	5,471	1,119
0,10	0,007,854	0,855,83	6,440	0,898,09	6,597	0,941,36	6,754	0,985
0,108	0,009,161	0,780,51	7,511	0,819,04	7,695	0,858,51	7,878	0,898
0,11	0,009,503	0,763,65	7,793	0,801,36	7,983	0,839,97	8,173	0,879
0,12	0,011,310	0,689,02	9,274	0,723,04	9,500	0,757,88	9,726	0,793
0,13	0,013,273	0,627,44	10,884	0,658,42	11,149	0,690,15	11,415	0,722
0,135	0,014,314	0,600,53	11,737	0,630,18	12,023	0,660,55	12,309	0,691
0,14	0,015,394	0,575,80	12,623	0,604,23	12,931	0,633,33	13,239	0,663
0,15	0,017,672	0,531,89	14,491	0,558,15	14,844	0,585,04	15,197	0,613
0,16	0,020,106	0,494,11	16,487	0,518,51	16,889	0,543,49	17,291	0,569
0,162	0,020,612	0,487,18	16,901	0,511,24	17,314	0,535,87	17,720	0,561
0,17	0,022,698	0,461,28	18,612	0,484,06	19,066	0,507,38	19,520	0,531
0,18	0,025,447	0,432,50	20,866	0,453,85	21,375	0,475,72	21,884	0,499
0,19	0,028,353	0,407,06	23,249	0,427,16	23,816	0,447,74	24,383	0,467
0,20	0,031,416	0,384,41	25,761	0,403,39	26,389	0,422,83	27,017	0,443
0,21	0,034,636	0,364,13	28,401	0,382,11	29,094	0,400,53	29,787	0,41
0,216	0,036,644	0,352,95	30,047	0,370,38	30,781	0,388,23	31,513	0,40
0,22	0,038,013	0,345,87	31,171	0,362,95	31,931	0,380,44	32,691	0,39
0,23	0,041,548	0,329,34	34,069	0,345,60	34,900	0,362,25	35,731	0,37
0,24	0,045,239	0,314,30	37,096	0,329,82	38,001	0,345,71	38,905	0,36
0,25	0,049,088	0,300,57	40,251	0,315,41	41,233	0,330,61	42,215	0,34
0,26	0,053,093	0,287,98	43,536	0,302,20	44,598	0,316,76	45,660	0,33
0,27	0,057,256	0,276,40	46,949	0,290,04	48,095	0,304,02	49,239	0,31
0,28	0,061,575	0,265,70	50,491	0,278,82	51,723	0,292,25	52,955	0,30
0,29	0,066,052	0,255,80	54,163	0,268,43	55,483	0,281,36	56,805	0,29
0,30	0,070,686	0,246,60	57,962	0,258,78	59,376	0,271,25	60,789	0,28
0,31	0,075,477	0,238,05	61,891	0,249,80	63,401	0,261,84	64,910	0,27
0,32	0,080,425	0,230,06	65,948	0,241,42	67,557	0,253,05	69,165	0,26
0,325	0,082,958	0,226,27	68,025	0,237,44	69,685	0,248,88	71,343	0,26
0,33	0,085,530	0,222,59	70,135	0,233,58	71,845	0,244,83	73,555	0,25
0,34	0,090,792	0,215,59	74,449	0,226,23	76,265	0,237,13	78,081	0,24
0,35	0,096,212	0,209,01	78,893	0,219,33	80,817	0,229,90	82,741	0,24
0,36	0,101,788	0,202,82	83,466	0,212,83	85,501	0,223,09	87,537	0,23
0,37	0,107,521	0,196,98	88,167	0,206,71	90,317	0,216,67	92,468	0,22
0,38	0,113,412	0,191,47	92,997	0,200,93	95,265	0,210,61	97,534	0,22
0,39	0,119,459	0,186,27	97,957	0,195,46	100,345	0,204,88	102,735	0,21
0,40	0,125,664	0,181,33	103,044	0,190,28	105,557	0,199,45	108,071	0,21
0,41	0,132,026	0,176,65	108,261	0,185,37	110,901	0,194,30	113,542	0,20
0,42	0,138,545	0,172,20	113,607	0,180,70	116,377	0,189,41	119,149	0,19
0,43	0,145,221	0,167,97	119,081	0,176,27	121,985	0,184,76	124,890	0,19
0,44	0,152,053	0,163,95	124,683	0,172,04	127,724	0,180,33	130,765	0,19
0,45	0,159,043	0,160,11	130,415	0,168,01	133,596	0,176,11	136,777	0,18
0,46	0,166,191	0,156,44	136,277	0,164,17	139,600	0,172,08	142,924	0,18
0,47	0,173,495	0,152,94	142,265	0,160,50	145,735	0,168,23	149,205	0,17
0,48	0,180,956	0,149,60	148,383	0,156,98	152,003	0,164,55	155,622	0,17
0,49	0,188,575	0,146,39	154,631	0,153,62	158,403	0,161,02	162,174	0,17
0,50	0,196,350	0,143,32	161,007	0,150,40	164,934	0,157,65	168,861	0,17
0,55	0,237,583	0,129,72	194,818	0,136,12	199,569	0,142,68	204,321	0,15
0,60	0,282,744	0,118,47	231,850	0,124,32	237,505	0,130,31	243,159	0,13
0,65	0,331,832	0,109,01	272,102	0,114,40	278,739	0,119,91	285,375	0,12
0,70	0,384,846	0,100,95	315,573	0,105,94	323,271	0,111,04	330,967	0,11
0,75	0,441,788	0,094,002	362,266	0,098,643	371,101	0,103,40	379,937	0,10
0,80	0,502,656	0,087,947	412,177	0,092,289	422,231	0,096,736	432,284	0,10
0,85	0,567,451	0,082,621	465,309	0,086,701	476,659	0,090,879	488,007	0,09
0,90	0,636,174	0,077,906	521,663	0,081,752	534,386	0,085,692	547,109	0,09
0,95	0,708,823	0,073,608	581,235	0,077,337	595,411	0,081,063	609,587	0,08
1,00	0,785,400	0,069,922	644,028	0,073,374	659,736	0,076,910	675,444	0,08

SSES.

S.	90 CENTIMÈTRES.		92 CENTIMÈTRES.		94 CENTIMÈTRES.		96 CENTIMÈTRES.	
UMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
it.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
),069	29,176	0,071	30,487	0,072	31,827	0,074	33,196	0,075
),276	9,347,4	0,283	9,767,5	0,289	10,197	0,295	10,635	0,302
),504	5,917,6	0,515	6,183,5	0,527	6,455,3	0,538	6,732,9	0,550
),022	5,067,0	0,636	5,294,7	0,650	5,527,4	0,664	5,765,1	0,679
,106	3,363,5	1,131	3,514,7	1,156	3,669,1	1,181	3,826,9	1,206
,728	2,481,2	1,767	2,592,7	1,806	2,706,6	1,846	2,823,0	1,885
,015	2,239,9	2,061	2,340,5	2,107	2,443,4	2,153	2,548,5	2,199
,488	1,951,2	2,545	2,038,9	2,601	2,128,5	2,658	2.220,0	2,714
,387	1,601,2	3,464	1,673,1	3,541	1,746,7	3,618	1,821,8	3,695
,423	1,354,2	4,524	1,415,1	4,624	1,477,3	4,725	1,540,8	4,825
,535	1,333,5	4,638	1,393,4	4,741	1,454,7	4,844	1,517,2	4,947
,598	1,171,4	5,726	1,224,0	5.853	1,277,8	5,980	1,332,8	6,107
,911	1,031,0	7,069	1,077,3	7,225	1,124,6	7,383	1,173,0	7,539
,061	0,940,23	8,245	0,982,48	8,428	1,025,7	8,611	1,069,8	8,794
,363	0,919,93	8,553	0,961,26	8,743	1,003,5	8,933	1,046,7	9,123
,952	0,830,02	10,179	0,867,32	10,405	0,905,44	10,631	0,944,38	10,857
,680	0,755,84	11,946	0,789,81	12,211	0,824,52	12,477	0,859,98	12,742
,596	0,723,42	12,883	0,755,93	13,169	0,789,15	13,455	0,823,09	13,741
,546	0,693,63	13,854	0,724,80	14,162	0,756,65	14,470	0,789,19	14,778
,551	0,640,73	15,904	0,669,52	16,257	0,698,95	16,611	0,729,01	16,965
,693	0,595,23	18,096	0,621,98	18,497	0,649,31	18,899	0,677,24	19,301
,138	0,586,88	18,551	0,613,25	18,963	0,640,21	19,375	0,667,74	19,787
,974	0,555,68	20,428	0,580,65	20,882	0,606,17	21,336	0,632,24	21,790
,353	0,521,00	22,902	0,544,41	23,371	0,568,34	23,880	0,592,78	24,429
,950	0,490,36	25,518	0,512,39	26,085	0,534,91	26,651	0,557,92	27,219
,646	0,463,08	28,274	0,483,89	28,903	0,505,15	29,531	0,526,88	30,159
,479	0,438,65	31,173	0,458,36	31,865	0,478,51	32,557	0,499,03	33,251
,246	0,425,18	32,979	0,444,29	33,712	0,463,82	34,445	0,483,76	35,177
,451	0,416,65	34,212	0,435,37	34,972	0,454,51	35,732	0,474,05	36,493
,561	0,396,73	37,393	0,414,56	38,223	0,432,78	39,055	0,451,39	39,885
,810	0,378,62	40,715	0,395,64	41,619	0,413,02	42,525	0,430,79	43,429
,197	0,362,08	44,179	0,378,35	45,160	0,394,98	46,142	0,411,96	47,124
,721	0,346,91	47,784	0,362,50	48,845	0,378,43	49,907	0,394,71	50,969
,385	0,332,96	51,530	0,347,92	52,675	0,363,21	53,820	0,378,83	54,965
,186	0,320,07	55,418	0,334,45	56,649	0,349,15	57,881	0,364,17	59,112
,125	0,308,15	59,447	0,321,99	60,767	0,336,15	62,089	0,350,60	63,410
,203	0,297,07	63,617	0,310,42	65,031	0,324,06	66,445	0,338,00	67,858
,419	0,286,76	67,929	0,299,65	69,439	0,312,82	70,948	0,326,27	72,457
,773	0,277,14	72,382	0,289,60	73,991	0,302,32	75,599	0,315,33	77,207
,003	0,272,57	74,662	0,284,82	76,321	0,297,34	77,980	0,310,12	79,639
,266	0,268,14	76,977	0,280,19	78,687	0,292,50	80,398	0,305,08	82,109
,897	0,259,71	81,713	0,271,38	83,529	0,283,30	85,345	0,295,49	87,160
,666	0,251,78	86,590	0,263,09	88,514	0,274,66	90,439	0,286,47	92,363
,573	0,244,32	91,609	0,255,30	93,615	0,266,52	95,680	0,277,99	97,716
,619	0,237,30	96,769	0,247,96	98,919	0,258,86	101,069	0,269,99	103,220
,802	0,230,66	102,071	0,241,02	104,339	0,251,62	106,607	0,262,44	108,875
,124	0,224,38	107,513	0,234,47	109,902	0,244,77	112,291	0,255,30	114,681
,584	0,218,44	113,098	0,228,25	115,611	0,238,28	118,124	0,248,53	120,637
,183	0,212,80	118,823	0,222,36	121,463	0,232,13	124,104	0,242,12	126,745
,919	0,207,44	124,691	0,216,76	127,461	0,226,29	130,232	0,236,02	133,003
,791	0,202,39	130,699	0,211,44	133,603	0,220,73	136,507	0,230,22	139,412
,807	0,197,50	136,848	0,206,37	139,889	0,215,44	142,929	0,224,71	145,971
,957	0,192,87	143,139	0,201,54	146,319	0,210,40	149,500	0,219,45	152,681
,248	0,188,46	149,572	0,196,93	152,895	0,205,58	156,219	0,214,42	159,543
,675	0,184,24	156,146	0,192,52	159,615	0,200,98	163,085	0,209,63	166,555
,241	0,180,21	162,860	0,188,31	166,479	0,196,59	170,099	0,205,04	173,717
,946	0,176,35	169,718	0,184,28	173,489	0,192,38	177,260	0,200,65	181,032
,788	0,172,65	176,715	0,180,41	180,642	0,188,34	184,569	0,196,44	188,496
,073	0,156,27	213,825	0,163,29	218,576	0,170,46	223,328	0,177,80	228,079
,815	0,142,71	254,470	0,149,13	260,124	0,155,68	265,779	0,162,38	271,434
,012	0,131,32	298,649	0,137,22	305,285	0,143,25	311,922	0,149,42	318,559
,661	0,121,61	346,361	0,127,08	354,058	0,132,66	361,755	0,138,37	369,452
,773	0,113,24	397,609	0,118,33	406,445	0,123,53	415,281	0,128,84	424,116
,337	0,105,94	452,390	0,110,70	462,443	0,115,57	472,497	0,120,54	482,549
,357	0,099,53	510,706	0,104,00	522,055	0,108,57	533,403	0,113,24	544,753
,833	0,093,85	572,557	0,098,07	595,280	0,102,38	598,003	0,106,78	610,727
,764	0,088,78	637,941	0,092,77	652,117	0,096,85	666,293	0,101,01	680,470
,152	0,084,23	706,860	0,088,02	722,568	0,091,88	738,276	0,095,84	753,984

TUYAUX NEUFS.		98 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE.		1 MÈTRE 2 CENTIMÈTRES.		1 MÈ
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARG par 100
met		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	34,594	0,077	36,020	0,079	37,475	0,080	38,95
0,02	0,000,314	11,083	0,308	11,540	0,314	12,006	0,320	12,48
0,027	0,000,573	7,016,3	0,561	7,305,6	0,573	7,600,8	0,584	7,90
0,03	0,000,707	6,007,8	0,693	6,255,5	0,707	6,508,3	0,721	6,76
0,04	0,001,257	3,988,1	1,232	4,152,5	1,257	4,320,3	1,282	4,49
0,05	0,001,964	2,941,9	1,924	3,063,2	1,964	3,187,0	2,003	3,31
0,054	0,002,290	2,655,3	2,244	2,765,3	2,290	2,877,0	2,336	2,99
0,06	0,002,827	2,313,5	2,771	2,408,9	2,827	2,506,2	2,884	2,60
0,07	0,003,848	1,898,5	3,771	1,976,7	3,848	2,056,6	3,925	2,13
0,08	0,005,027	1,605,7	4,926	1,671,9	5,027	1,739,4	5,128	1,80
0,081	0,005,153	1,581,1	5,049	1,646,3	5,153	1,712,8	5,256	1,78
0,09	0,006,362	1,388,9	6,234	1,446,2	6,362	1,504,6	6,489	1,56
0,10	0,007,854	1,222,4	7,697	1,272,8	7,854	1,324,2	8,011	1,37
0,108	9,009,161	1,114,8	8,977	1,160,8	9,161	1,207,7	9,344	1,25
0,11	0,009,503	1,090,7	9,313	1,135,7	9,503	1,181,6	9,693	1,22
0,12	0,011,310	0,984 14	11,083	1,024,7	11,310	1,066,1	11,536	1,10
0,13	0,013,273	0,896,19	13,007	0,933,14	13,273	0,970,84	13,538	1,00
0,135	0,014,314	0,857,74	14,027	0,893,11	14,314	0,929,19	14,600	0,96
0,14	0,015,394	0,822,42	15,085	0,856,33	15,394	0,890,93	15,702	0,92
0,15	0,017,672	0,759,70	17,318	0,791,03	17,672	0,822,98	18,025	0,85
0,16	0,020,106	0,705,75	19,704	0,734,85	20,106	0,764,54	20,508	0,79
0,162	0,020,612	0,695,85	20,199	0,724,54	20,612	0,753,81	21,024	0,78
0,17	0,022,698	0,658,86	22,244	0,686,02	22,698	0,713,74	23,152	0,74
0,18	0,025,447	0,617,74	24,938	0,643,21	25,447	0,669,20	25,956	0,69
0,19	0,028,353	0,581,41	27,785	0,605,38	28,353	0,629,84	28,920	0,65
0,20	0,031,416	0,549,06	30,787	0,571,70	31,416	0,594,80	32,044	0,61
0,21	0,034,636	0,520,10	33,943	0,541,54	34,636	0,563,42	35,329	0,58
0,216	0,036,644	0,504,13	35,911	0,524,92	36,644	0,546,12	37,377	0,56
0,22	0,038,013	0,494,01	37,253	0,514,38	38,013	0,535,16	38,773	0,55
0,23	0,041,548	0,470,40	40,717	0,489,79	41,548	0,509,58	42,379	0,52
0,24	0,045,239	0,448,92	44,334	0,467,43	45,239	0,486,32	46,144	0,50
0,25	0,049,088	0,429,31	48,105	0,447,01	49,088	0,465,07	50,070	0,48
0,26	0,053,093	0,411,32	52,031	0,428,29	53,093	0,445,59	54,155	0,46
0,27	0,057,256	0,394,78	56,110	0,411,06	57,256	0,427,67	58,401	0,44
0,28	0,061,575	0,379,50	60,343	0,395,15	61,575	0,411,11	62,807	0,42
0,29	0,066,052	0,365,36	64,731	0,380,43	66,052	0,395,80	67,373	0,41
0,30	0,070,686	0,352,23	69,272	0,366,75	70,686	0,381,57	72,100	0,39
0,31	0,075,477	0,340,01	73,967	0,354,03	75,477	0,368,33	76,987	0,3
0,32	0,080,425	0,328,60	78,816	0,342,15	80,425	0,355,97	82,033	0,3
0,325	0,082,958	0,323,18	81,299	0,336,50	82,958	0,350,10	84,617	0,3
0,33	0,085,530	0,317,93	83,819	0,331,04	85,530	0,344,41	87,241	0,3
0,34	0,090,792	0,307,93	88,976	0,320,62	90,792	0,333,58	92,608	0,3
0,35	0,096,212	0,298,53	94,287	0,310,84	96,212	0,323,40	98,136	0,3
0,36	0,101,788	0,289,69	99,752	0,301,63	101,788	0,313,82	103,824	0,3
0,37	0,107,521	0,281,36	105,371	0,292,96	107,521	0,304,79	109,671	0,3
0,38	0,113,412	0,273,49	111,143	0,284,76	113,412	0,296,27	115,680	0,3
0,39	0,119,459	0,266,05	117,070	0,277,02	119,459	0,288,21	121,848	0,3
0,40	0,125,664	0,259,00	123,151	0,269,68	125,664	0,280,57	128,177	0,3
0,41	0,132,026	0,252,31	129,385	0,262,71	132,026	0,273,33	134,667	0,3
0,42	0,138,545	0,245,96	135,774	0,256,10	138,545	0,266,45	141,316	0,3
0,43	0,145,221	0,239,92	142,316	0,249,81	145,221	0,259,90	148,125	0,3
0,44	0,152,053	0,234,17	149,011	0,243,82	152,053	0,253,67	155,094	0,3
0,45	0,159,043	0,228,69	155,862	0,238,12	159,043	0,247,74	162,224	0,3
0,46	0,166,191	0,223,45	162,867	0,232,67	166,191	0,242,07	169,515	0,3
0,47	0,173,495	0,218,45	170,025	0,227,46	173,495	0,236,65	176,965	0,3
0,48	0,180,956	0,213,67	177,337	0,222,48	180,956	0,231,47	184,575	0,3
0,49	0,188,575	0,209,10	184,803	0,217,72	188,575	0,226,51	192,347	0,3
0,50	0,196,350	0,204,71	192,423	0,213,15	196,350	0,221,76	200,277	0,3
0,55	0,237,583	0,185,28	232,831	0,192,92	237,583	0,200,71	242,335	0,3
0,60	0,282,744	0,169,21	277,089	0,176,19	282,744	0,183,31	288,399	0,3
0,65	0,331,832	0,155,71	325,195	0,162,13	331,832	0,168,68	338,469	0,3
0,70	0,384,846	0,144,19	377,149	0,150,14	384,846	0,156,21	392,543	0,3
0,75	0,441,788	0,134,26	432,952	0,139,80	441,788	0,145,45	450,624	0,1
0,80	0,502,656	0,125,62	492,603	0,130,80	502,656	0,136,08	512,709	0,1
0,85	0,567,451	0,118,01	556,101	0,122,88	567,451	0,127,84	578,300	0,2
0,90	0,636,174	0,111,27	623,450	0,115,86	636,174	0,120,54	648,897	0,2
0,95	0,708,823	0,105,26	694,646	0,109,60	708,823	0,114,03	722,999	0,2
1,00	0,785,400	0,099,87	769,692	0,103,99	785,400	0,108,19	801,108	0,2

SSES.

ÈTRES.	1 MÈTRE 6 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 8 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 10 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 12 CENTIMÈTRES.	
LUMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,082	40,472	0,083	42,014	0,085	43,584	0,086	45,183	0,088
0,327	12,966	0,333	13,460	0,339	13,964	0,346	14,813	0,352
0,595	8,208,6	0,607	8,521,3	0,618	8,839,8	0,630	9,164,2	0,641
0,735	7,028,7	0,749	7,296,5	0,763	7,569,2	0,778	7,846,9	0,792
1,307	4,665,8	1,332	4,843,5	1,357	5,024,5	1,382	5,208,9	1,407
2,042	3,441.8	2,081	3,572,9	2,121	3,706,5	2,160	3,842,5	2,199
2,382	3,107,1	2,428	3,225,4	2,473	3,346,1	2,519	3,468,8	2,565
2,941	2,706,6	2,997	2,809,7	3,054	2,914,8	3,110	3,021,7	3,167
4,002	2,221,1	4,079	2,305,7	4,156	2,391,9	4,233	2,479,6	4,310
5,226	1,878,5	5,327	1,950,1	5,428	2,023,0	5,529	2,097,2	5,630
5,358	1,849,8	5,461	1,920,2	5,566	1,992,0	5,668	2,065,1	5,770
5,616	1,624,9	6,743	1,686,8	6,870	1,749,9	6,998	1,814,1	7,124
8,168	1,430.1	8,325	1,484,6	8,482	1,540,1	8,639	1,596,6	8,796
9,526	1,304,2	9,709	1,353,9	9,894	1,404,5	10,077	1,456,1	10,260
9,882	1,276,1	10,072	1,324,7	10,262	1,374,2	10,454	1,424,6	10,642
1,762	1,151,4	11,988	1,195,2	12,214	1,239,9	12,441	1,285,4	12,666
3,804	1,048,5	14,069	1,088,4	14,334	1,129,1	14,601	1,170,5	14,866
4,886	1,003,5	15,172	1,041,7	15,458	1,080,7	15,745	1,120,3	16,030
5,010	0,962,17	16,318	0,998,82	16,626	1,036,2	16,933	1,074,2	17,240
3,378	0,888,80	18,731	0,922,65	19,086	0,957,14	19,439	0,992,26	19,792
0,910	0,825,68	21,312	0,857,13	21,714	0,889,17	22,117	0,921,80	22,518
1,436	0,814,10	21,848	0,845,11	22,260	0,876,70	22,673	0,908,87	23,086
3,006	0,770,82	24,060	0,800,18	24,514	0,830,09	24,968	0,860,55	25,422
5,464	0,722,71	26,973	0,750,24	27,482	0,778,29	27,992	0,806,84	28,500
0,486	0,680,20	30,053	0,706,11	30,620	0,732,51	31,188	0,759,39	31,754
2,672	0,642,36	33,300	0,666,83	33,930	0,691,76	34,558	0,717,14	35,186
5,022	0,608,48	36,715	0,631,66	37,406	0,655,27	38,100	0,679,31	38,792
5,110	0,589,80	38,843	0,612,26	39,574	0,635,15	40,308	0,658,46	41,040
0,534	0,577,96	40,294	0,599,08	41,054	0,622,40	41,815	0,645,24	42,574
4,210	0,550,33	44,041	0,571,29	44,870	0,592,65	45,702	0,614,39	46,534
7,048	0,525,21	47,953	0,545,21	48,858	0,565,59	49,763	0,586,35	50,666
3,050	0,502,26	52,032	0,521,39	53,014	0,540,88	53,996	0,560,73	54,978
6,216	0,481,22	56,278	0,499,55	57,340	0,518,22	58,402	0,537,24	59,464
4,546	0,461,87	60,691	0,479,46	61,836	0,497,38	62,981	0,515,63	64,126
4,038	0,443,99	65,270	0,460,90	66,502	0,478,13	67,733	0,495,68	68,964
5,604	0,427,45	70,015	0,443,73	71,336	0,460,32	72,657	0,477,21	73,978
3,514	0,412,08	74,928	0,427,78	76,340	0,443,77	77,755	0,460,06	79,168
3,496	0,397,78	80,006	0,412,94	81,514	0,428,37	83,025	0,444,09	84,534
3,642	0,384,44	85,250	0,399,08	86,858	0,414,00	88,467	0,429,19	90,074
5,276	0,378,10	87,935	0,392,50	89,594	0,407,17	91,254	0,422,11	92,912
9,950	0,371,95	90,661	0,386,12	92,372	0,400,56	94,083	0,415,25	95,794
1,422	0,360,25	96,238	0,373,98	98,054	0,387,96	99,871	0,402,19	101,686
0,058	0,349,26	101,082	0,362,56	103,908	0,376,12	105,833	0,389,92	107,756
5,858	0,338,92	107,894	0,351,83	109,930	0,364,98	111,967	0,378,37	114,002
1,822	0,329,17	113,972	0,341,70	116,122	0,354 48	118,273	0,367,48	120,422
7,948	0,319,96	120,216	0,332,15	122,484	0,344,56	124,753	0,357,21	127,020
4,238	0,311,25	126,627	0,323,11	129,016	0,335,19	131,405	0,347,49	133,794
0,690	0,303,01	133,203	0,314,55	135,716	0,326,31	138,230	0,338,28	140,742
7,306	0,295,18	139,947	0,306,43	142,588	0,317,88	145,229	0,329,55	147,868
4,086	0,287,75	146,857	0,298,72	149,628	0,309,88	152,400	0,321,25	155,170
1,030	0,280,69	153,934	0,291,38	156,838	0,302,27	159,743	0,313,36	162,646
8,134	0,273,96	161,175	0,284,39	164,218	0,295,03	167,258	0,305,85	170,298
5,404	0,267,55	168,585	0,277,74	171,766	0,288,12	174,947	0,298,69	178,128
2,838	0,261,42	176,162	0,271,38	179,486	0,281,53	182,810	0,291,86	186,134
0,434	0,255,57	183,904	0,265,31	187,374	0,275,23	190,845	0,285,33	194,314
8,194	0,249,98	191,813	0,259,50	195,432	0,269,20	199,052	0,279,08	202,670
6,118	0,244,63	199,890	0,253,95	203,660	0,263,44	207,433	0,273,11	211,204
4,204	0,239,50	208,131	0,248,62	212,058	0,257,91	215,985	0,267,38	219,912
7,086	0,216,76	251,838	0,225,02	256,590	0,233,43	261,341	0,242,00	266,092
4,054	0,197,97	299,709	0,205,51	305,362	0,213,19	311,018	0,221,01	316,674
5,106	0,182,16	351,743	0,189,10	358,378	0,196,17	365,015	0,203,37	371,650
0,238	0,168,70	407,935	0,175,12	415,634	0,181,67	423,331	0,188,34	431,026
9,458	0,157,08	468,294	0,163,06	477,130	0,169,16	485,967	0,175,36	494,802
2,762	0,146,96	532,815	0,152,56	542,868	0,158,26	552,922	0,164,07	562,974
9,148	0,138,06	601,497	0,143,32	612,846	0,148,68	624,196	0,154,13	635,544
1,620	0,130,18	674,343	0,135,14	687,066	0,140,19	699,791	0,145,34	712,514
7,174	0,123,15	751,350	0,127,84	765,528	0,132,62	779,705	0,137,49	793,882
3,816	0,116,84	832,524	0,121,29	848,232	0,125,83	863,940	0,130,44	879,648

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 14 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 16 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 18 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètr
mèt		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	46,812	0,090	48,469	0,091	50,154	0,093	51,860
0,02	0,000,314	14,997	0,358	15,528	0,364	16,068	0,371	16,618
0,027	0,000,573	9,494,4	0,653	9,830,5	0,664	10,172	0,676	10,520
0,03	0,000,707	8,129,7	0,806	8,417,4	0,820	8,710,2	0,834	9,008
0,04	0,001,257	5,396,6	1,433	5,587,6	1,458	5,781,9	1,483	5,979,6
0,05	0,001,964	3,980,9	2,238	4,121,8	2,278	4,265,2	2,317	4,411,0
0,054	0,002,290	3,593,8	2,611	3,721,0	2,657	3,850,4	2,702	3,982,0
0,06	0,002,827	3,130,6	3,223	3,241,4	3,280	3,354,2	3,336	3,468,8
0,07	0,003,848	2,569,0	4,387	2,659,9	4,464	2,752,4	4,541	2,846,5
0,08	0,005,027	2,172,8	5,731	2,249,7	5,830	2,327,9	5,931	2,407,5
0,081	0,005,153	2,139,5	5,873	2,215,3	5,978	2,292,3	6,081	2,370,7
0,09	0,006,362	1,879,5	7,251	1,946,0	7,378	2,013,7	7,505	2,082,5
0,10	0,007,854	1,654,1	8,953	1,712,7	9,110	1,772,2	9,267	1,832,8
0,108	0,009,161	1,508,5	10,443	1,561,9	10,626	1,616,3	10,809	1,671,8
0,11	0,009,503	1,476,0	10,832	1,528,2	11,022	1,581,4	11,212	1,635,4
0,12	0,011,310	1,331,7	12,892	1,378,9	13,118	1,426,8	13,344	1,475,6
0,13	0,013,273	1,212,7	15,131	1,255,6	15,396	1,299,3	15,661	1,343,7
0,135	0,014,314	1,160,7	16,316	1,201,8	16,608	1,243,6	16,894	1,286,1
0,14	0,015,394	1,112,9	17,548	1,152,3	17,856	1,192,4	18,164	1,233,1
0,15	0,017,672	1,028,0	20,145	1,064,4	20,498	1,101,4	20,851	1,139,1
0,16	0,020,106	0,955,01	22,920	0,988,81	23,322	1,023,2	23,724	1,058,2
0,162	0,020,612	0,941,62	23,498	0,974,95	23,910	1,008,9	24,322	1,043,3
0,17	0,022,698	0,891,56	25,876	0,923,11	26,330	0,955,22	26,784	0,987,8
0,18	0,025,447	0,835,92	29,009	0,865,50	29,518	0,895,61	30,027	0,926,2
0,19	0,028,353	0,786,75	32,321	0,814,60	32,890	0,842,93	33,457	0,871,7
0,20	0,031,416	0,742,98	35,814	0,769,28	36,442	0,796,04	37,070	0,823,2
0,21	0,034,636	0,703,79	39,485	0,728,70	40,178	0,754,04	40,871	0,779,8
0,216	0,036,644	0,682,18	41,773	0,706,33	42,506	0,730,89	43,239	0,755,4
0,22	0,038,013	0,668,49	43,334	0,692,15	44,094	0,716,23	44,854	0,740,7
0,23	0,041,548	0,636,53	47,365	0,659,06	48,194	0,681,99	49,025	0,705,7
0,24	0,045,239	0,607,48	51,571	0,628,98	52,478	0,650,85	53,383	0,673,1
0,25	0,049,088	0,580,93	55,960	0,601,49	56,942	0,622,41	57,924	0,643,9
0,26	0,053,093	0,556,60	60,526	0,576,30	61,586	0,596,34	62,648	0,616,7
0,27	0,057,256	0,534,21	65,271	0,553,12	66,416	0,572,35	67,561	0,591,9
0,28	0,061,575	0,513,54	70,196	0,531,71	71,426	0,550,21	72,658	0,569,4
0,29	0,066,052	0,494,40	75,299	0,511,90	76,620	0,529,71	77,941	0,547,7
0,30	0,070,686	0,476,63	80,582	0,493,50	81,994	0,510,67	83,408	0,528,1
0,31	0,075,477	0,460,09	86,044	0,476,38	87,554	0,492,95	89,064	0,509,6
0,32	0,080,425	0,444,66	91,682	0,460,40	93,292	0,476,41	94,900	0,492,4
0,325	0,082,958	0,437,32	94,571	0,452,80	96,230	0,468,55	97,889	0,484,3
0,33	0,085,530	0,430,21	97,505	0,445,44	99,214	0,460,94	100,925	0,476,4
0,34	0,090,792	0,416,68	103,502	0,431,43	105,318	0,446,44	107,134	0,461,5
0,35	0,096,212	0,403,97	109,680	0,418,27	111,606	0,432,81	113,530	0,447,3
0,36	0,101,788	0,392,00	116,038	0,405,88	118,074	0,419,99	120,110	0,434,1
0,37	0,107,521	0,380,73	122,572	0,394,20	124,724	0,407,91	126,874	0,421,6
0,38	0,113,412	0,370,08	129,288	0,383,18	131,558	0,396,50	133,826	0,410,0
0,39	0,119,459	0,360,01	136,183	0,372,75	138,572	0,385,72	140,961	0,398,7
0,40	0,125,664	0,350,47	143,255	0,362,87	145,770	0,375,50	148,283	0,388,1
0,41	0,132,026	0,341,42	150,509	0,353,51	153,150	0,365,80	155,791	0,378,0
0,42	0,138,545	0,332,83	157,941	0,344,61	160,712	0,356,59	163,483	0,368,3
0,43	0,145,221	0,324,65	165,550	0,336,14	168,456	0,347,83	171,360	0,359,1
0,44	0,152,053	0,316,87	173,339	0,328,09	176,382	0,339,50	179,423	0,350,4
0,45	0,159,043	0,309,46	181,309	0,320,41	184,490	0,331,55	187,671	0,342,1
0,46	0,166,191	0,302,37	189,458	0,313,07	192,782	0,323,96	196,106	0,335,1
0,47	0,173,495	0,295,61	197,784	0,306,07	201,254	0,316,71	204,724	0,327,3
0,48	0,180,956	0,289,14	206,289	0,299,37	209,908	0,309,79	213,527	0,320,1
0,49	0,188,575	0,282,95	214,976	0,292,96	218,746	0,303,15	222,518	0,313,3
0,50	0,196,350	0,277,01	223,839	0,286,82	227,766	0,296,79	231,693	0,306,6
0,55	0,237,583	0,250,72	270,844	0,259,59	275,596	0,268,62	280,348	0,277,3
0,60	0,282,744	0,228,98	322,329	0,237,08	327,982	0,245,33	333,637	0,253,7
0,65	0,331,832	0,210,70	378,287	0,218,16	384,924	0,225,75	391,561	0,233,3
0,70	0,384,846	0,195,12	438,723	0,202,03	446,422	0,209,05	454,119	0,216,0
0,75	0,441,788	0,181,68	503,638	0,188,11	512,474	0,194,66	521,310	0,201,2
0,80	0,502,656	0,169,98	573,027	0,176,00	583,080	0,182,12	593,133	0,188,2
0,85	0,567,451	0,159,69	646,893	0,165,34	658,242	0,171,09	669,591	0,176,8
0,90	0,636,174	0,150,57	725,237	0,155,90	737,962	0,161,33	750,685	0,167,0
0,95	0,708,823	0,142,44	808,058	0,147,48	822,234	0,152,61	836,410	0,157,7
1,00	0,785,400	0,135,14	895,356	0,139,93	911,064	0,144,79	926,772	0,149,6

SSES.

ÈTRES.	1 MÈTRE 22 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 24 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 26 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 28 CENTIMÈTRES.	
LUMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
it.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
0,094	53,612	0,096	55,384	0,097	57,185	0,099	59,015	0,101
0,377	17,176	0,383	17,744	0,390	18,321	0,396	18,907	0,402
0,687	10,874	0,699	11,233	0,710	11,598	0,721	11,970	0,733
0,848	9,310,7	0,862	9,618,5	0,877	9,931,3	0,891	10,249	0,905
1,508	6,180,6	1,533	6,384,9	1,558	6,592,5	1,583	6,803,5	1,608
2,356	4,559,3	2,395	4,710,0	2,435	4,863,1	2,474	5,018,7	2,513
2,748	4,115,9	2,794	4,251,9	2,840	4,390,2	2,886	4,530,7	2,931
3,393	3,585,4	3,449	3,703,9	3,506	3,824,4	3,563	3,946,7	3,619
4,618	2,942,2	4,695	3,039,4	4,772	3,138,3	4,849	3,238,7	4,926
6,031	2,488,4	6,132	2,570,7	6,232	2,654,3	6,333	2,739,2	6,434
7,183	2,450,3	6,286	2,531,3	6,390	2,613,7	6,493	2,697,3	6,594
7,634	2,152,5	7,761	2,223,6	7,888	2,296,0	8,015	2,369,4	8,142
9,425	1,894,4	9,582	1,957,1	9,738	2,020,7	9,895	2,085,4	10,052
9,993	1,727,7	11,176	1,784,8	11,358	1,842,9	11,541	1,901,8	11,726
11,404	1,690,4	11,594	1,746,3	11,784	1,803,1	11,974	1,860,7	12,164
13,571	1,525,2	13,797	1,575,6	14,024	1,626,8	14,250	1,678,9	14,476
14,927	1,388,9	16,192	1,434,8	16,458	1,481,5	16,723	1,528,8	16,990
17,177	1,329,3	17,463	1,373,2	17,750	1,417,9	18,036	1,463,3	18,322
18,473	1,274,6	18,781	1,316,7	19,088	1,359,5	19,396	1,403,0	19,704
22,205	1,177,4	21,558	1,216,3	21,912	1,255,8	22,265	1,296,0	22,618
24,127	1,093,8	24,529	1,129,9	24,930	1,166,6	25,332	1,204,0	25,734
26,731	1,078,4	25,146	1,114,1	25,558	1,150,3	25,970	1,187,1	26,382
27,237	1,021,1	27,691	1,054,8	28,146	1,089,1	28,600	1,124,0	29,054
30,536	0,957,36	31,045	0,989,00	31,554	1,021,2	32,063	1,053,8	32,572
34,023	0,901,05	34,590	0,930,83	35,158	0,961,10	35,725	0,991,85	36,290
37,099	0,850,92	38,327	0,879,05	38,954	0,907,63	39,582	0,936,67	40,212
42,563	0,806,03	42,256	0,832,68	42,948	0,859,75	43,641	0,887,26	44,334
43,972	0,781,29	44,705	0,807,11	45,438	0,833,36	46,171	0,860,02	46,902
45,616	0,765,61	46,376	0,790,91	47,136	0,816,63	47,896	0,842,76	48,656
49,857	0,729,01	50,688	0,753,10	51,518	0,777,59	52,349	0,802,47	53,180
54,287	0,695,73	55,192	0,718,73	56,096	0,742,10	57,001	0,765,84	57,906
58,905	0,665,33	59,887	0,687,32	60,868	0,709,67	61,850	0,732,38	62,832
63,711	0,637,46	64,773	0,658,53	65,834	0,679,94	66,896	0,701,70	67,958
73,707	0,611,82	69,852	0,632,04	70,996	0,652,60	72,141	0,673,48	73,286
73,890	0,588,14	75,122	0,607,58	76,354	0,627,34	77,586	0,647,41	78,816
79,262	0,566,23	80,583	0,584,95	81,904	0,603,97	83,225	0,623,29	84,546
84,823	0,545,87	86,237	0,563,92	87,650	0,582,26	89,064	0,600,89	90,478
89,572	0,526,93	92,082	0,544,35	93,590	0,562,05	95,100	0,580,04	96,610
95,509	0,509,26	98,117	0,526,09	99,726	0,543,20	101,334	0,560,58	102,942
99,549	0,500,85	101,208	0,517,41	102,866	0,534,23	104,525	0,551,33	106,186
102,636	0,492,71	104,347	0,509,00	106,058	0,525,55	107,769	0,542,37	109,478
108,951	0,477,22	110,767	0,492,99	112,582	0,509,02	114,398	0,525,31	116,214
114,453	0,462,65	117,377	0,477,95	119,302	0,493,49	121,226	0,509,28	123,150
122,145	0,448,95	124,181	0,463,79	126,216	0,478,85	128,252	0,494,20	130,288
134,025	0,436,04	131,175	0,450,45	133,326	0,465,10	135,476	0,479,98	137,626
136,094	0,423,84	138,362	0,437,85	140,630	0,452,09	142,898	0,466,56	145,166
143,351	0,412,31	145,740	0,425,94	148,130	0,439,79	150,519	0,453,86	152,906
150,797	0,401,38	153,310	0,414,65	155,822	0,428,14	158,335	0,441,84	160,850
158,431	0,391,02	161,072	0,403,95	163,712	0,417,08	166,353	0,430,43	168,994
165,254	0,381,18	169,025	0,393,78	171,794	0,406,58	174,565	0,419,59	177,338
174,265	0,371,82	177,169	0,384,11	180,074	0,396,60	182,978	0,409,29	185,882
192,463	0,362,91	185,504	0,374,90	188,546	0,387,09	191,587	0,399,48	194,626
200,851	0,354,41	194,032	0,366,13	197,214	0,378,03	200,395	0,390,13	203,574
209,429	0,346,30	202,753	0,357,75	206,076	0,369,38	209,400	0,381,20	212,724
218,194	0,338,55	211,664	0,349,74	215,134	0,361,11	218,604	0,372,67	222,074
227,147	0,331,14	220,766	0,342,09	224,386	0,353,21	228,005	0,364,52	231,622
236,290	0,324,05	230,062	0,334,76	233,832	0,345,65	237,604	0,356,71	241,376
245,620	0,317,26	239,547	0,327,74	243,474	0,338,40	247,401	0,349,23	251,328
255,099	0,287,14	289,851	0,296,63	294,602	0,306,28	299,354	0,316,08	304,106
339,293	0,262,24	344,948	0,270,91	350,602	0,279,72	356,257	0,288,67	361,912
408,198	0,241,31	404,835	0,249,29	411,470	0,257,39	418,107	0,265,63	424,744
481,815	0,223,47	469,512	0,230,86	477,208	0,238,36	484,905	0,245,99	492,602
560,145	0,208,08	538,981	0,214,96	547,816	0,221,95	556,652	0,229,05	565,488
633,187	0,194,68	613,240	0,201,11	623,294	0,207,65	633,347	0,214,29	643,398
700,941	0,182,89	692,290	0,188,93	703,638	0,195,08	714,987	0,201,32	726,338
763,409	0,172,45	776,132	0,178,15	788,854	0,183,94	801,577	0,189,83	814,302
870,587	0,163,13	864,763	0,168,53	878,940	0,174,01	893,116	0,179,58	907,294
972,480	0,154,78	958,188	0,159,89	973,896	0,165,09	989,604	0,170,37	1,005,312

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 30 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 32 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 34 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
met.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	60,874	0,102	62,761	0,104	64,678	0,105	66,623
0,02	0,000,314	19,503	0,408	20,107	0,415	20,721	0,421	21,344
0,027	0,000,573	12,347	0,744	12,729	0,756	13,118	0,767	13,512
0,03	0,000,707	10,572	0,919	10,900	0,933	11,232	0,947	11,570
0,04	0,001,257	7,017,7	1,634	7,235,3	1,659	7,456,2	1,684	7,680,5
0,05	0,001,964	5,176,8	2,553	5,337,3	2,592	5,500,3	2,631	5,665,7
0,054	0,002,290	4,673,4	2,977	4,818,3	3,023	4,965,4	3,069	5,114,7
0,06	0,002,827	4,071,0	3,676	4,197,3	3,732	4,325,4	3,789	4,455,8
0,07	0,003,848	3,340,7	5,003	3,444,3	5,080	3,549,4	5,157	3,656,2
0,08	0,005,027	2,825,5	6,535	2,913,1	6,634	3,002,0	6,735	3,092,3
0,081	0,005,153	2,782,2	6,699	2,868,5	6,802	2,956,1	6,905	3,045,0
0,09	0,006,362	2,444,0	8,270	2,519,8	8,398	2,596,8	8,525	2,674,9
0,10	0,007,854	2,151,0	10,210	2,217,7	10,366	2,285,4	10,523	2,354,2
0,108	0,009,161	1,961,7	11,909	2,022,6	12,092	2,084,3	12,275	2,147,6
0,11	0,009,503	1,919,3	12,354	1,978,9	12,544	2,039,3	12,734	2,100,6
0,12	0,011,310	1,731,8	14,703	1,785,5	14,928	1,840,0	15,154	1,895,3
0,13	0,013,273	1,577,0	17,255	1,625,9	17,520	1,675,5	17,785	1,725,9
0,135	0,014,314	1,509,4	18,608	1,556,2	18,894	1,603,7	19,180	1,651,9
0,14	0,015,394	1,447,2	20,012	1,492,1	20,318	1,537,6	20,626	1,583,4
0,15	0,017,672	1,336,8	22,973	1,378,3	23,326	1,420,4	23,679	1,463,1
0,16	0,020,106	1,241,9	26,138	1,280,4	26,540	1,319,5	26,942	1,359,5
0,162	0,020,612	1,224,5	26,796	1,262,4	27,206	1,301,0	27,618	1,340,1
0,17	0,022,698	1,159,4	29,507	1,195,3	29,962	1,231,8	30,416	1,268,5
0,18	0,025,447	1,087,0	33,081	1,120,7	33,590	1,154,9	34,099	1,189,2
0,19	0,028,353	1,023,1	36,859	1,054,8	37,426	1,087,0	37,993	1,119,7
0,20	0,031,416	0,966,17	40,841	0,996,13	41,468	1,026,5	42,096	1,057,7
0,21	0,034,636	0,915,21	45,027	0,943,58	45,718	0,972,39	46,411	1,001,6
0,216	0,036,644	0,887,11	47,637	0,914,61	48,370	0,942,54	49,103	0,970,8
0,22	0,038,013	0,869,31	49,417	0,896,26	50,178	0,923,62	50,938	0,951,7
0,23	0,041,548	0,827,75	54,012	0,853,41	54,842	0,879,47	55,673	0,905,7
0,24	0,045,239	0,789,96	58,811	0,814,46	59,714	0,839,32	60,619	0,864,3
0,25	0,049,088	0,755,44	63,814	0,778,87	64,794	0,802,65	65,776	0,826,7
0,26	0,053,093	0,723,80	69,021	0,746,24	70,082	0,769,03	71,144	0,792.
0,27	0,057,256	0,694,69	74,432	0,716,23	75,578	0,738,10	76,723	0,760,7
0,28	0,061,575	0,667,80	80,048	0,688,51	81,278	0,709,53	82,510	0,730,
0,29	0,066,052	0,642,92	85,868	0,662,86	87,188	0,683,10	88,509	0,703,
0,30	0,070,686	0,619,81	91,892	0,639,03	93,306	0,658,54	94,720	0,678,
0,31	0,075,477	0,598,30	98,120	0,616,85	99,630	0,635,69	101,140	0,654.
0,32	0,080,425	0,578,23	104,552	0,596,16	106,160	0,614,36	107,768	0,632.
0,325	0,082,958	0,568,69	107,845	0,586,33	109,504	0,604,23	111,163	0,622,
0,33	0,085,530	0,559,45	111,189	0,576,80	112,898	0,594,41	114,609	0,612.
0,34	0,090,792	0,541,85	118,030	0,558,65	119,846	0,575,71	121,662	0,593.
0,35	0,096,212	0,525,32	125,075	0,541,61	126,998	0,558,14	128,922	0,574,
0,36	0,101,788	0,509,76	132,324	0,525,57	134,358	0,541,61	136,394	0,557.
0,37	0,107,521	0,495,10	139,778	0,510,45	141,928	0,526,03	144,078	0,541.
0,38	0,113,412	0,481,25	147,435	0,496,17	149,762	0,511,32	151,970	0,526.
0,39	0,119,459	0,468,16	155,297	0,482,67	157,686	0,497,41	160,075	0,512,
0,40	0,125,664	0,455,75	163,363	0,469,88	165,876	0,484,23	168,389	0,498.
0,41	0,132,026	0,443,98	171,634	0,457,75	174,274	0,471,73	176,915	0,485.
0,42	0,138,545	0,432,81	180,109	0,446,23	182,878	0,459,85	185,649	0,473.
0,43	0,145,221	0,422,18	188,787	0,435,27	191,690	0,448,56	194,594	0,462.
0,44	0,152,053	0,412,06	197,669	0,424,84	200,710	0,437,81	203,751	0,450.
0,45	0,159,043	0,402,42	206,756	0,414,89	209,936	0,427,56	213,117	0,440.
0,46	0,166,191	0,393,20	216,048	0,405,40	219,372	0,417,77	222,696	0,430.
0,47	0,173,495	0,384,41	225,544	0,396,33	229,014	0,408,43	232,484	0,420
0,48	0,180,956	0,376,00	235,243	0,387,65	238,862	0,399,49	242,481	0,411
0,49	0,188,575	0,367,94	245,148	0,379,35	248,918	0,390,94	252,690	0,402
0,50	0,196,350	0,360,23	255,255	0,371,40	259,182	0,382,74	263,109	0,394
0,55	0,237,583	0,326,03	308,858	0,336,14	313,610	0,346,41	318,362	0,356
0,60	0,282,744	0,297,76	367,567	0,306,99	373,222	0,316,37	378,877	0,325
0,65	0,331,832	0,273,99	431,382	0,282,49	438,018	0,291,11	444,655	0,299
0,70	0,384,846	0,253,74	500,300	0,261,60	507,996	0,269,59	515,693	0,277
0,75	0,441,788	0,236,26	574,324	0,243,59	583,160	0,251,02	591,996	0,258
0,80	0,502,656	0,221,04	653,453	0,227,90	663,506	0,234,86	673,559	0,241
0,85	0,567,451	0,207,66	737,686	0,214,10	749,034	0,220,63	760,383	0,227
0,90	0,636,174	0,195,81	827,026	0,201,88	839,750	0,208,04	852,473	0,214
0,95	0,708,823	0,185,23	921,470	0,190,97	935,646	0,196,81	949,822	0,202
1,00	0,785,400	0,175,74	1,021,020	0,181,19	1,036,728	0,186,72	1,052,436	0,192

SSES.

MÈTRES.	1 MÈTRE 38 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 40 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 42 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 44 CENTIMÈTRES.	
LUMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	met.	lit.	mèt.	lit.
0,107	68,596	0,108	70,599	0,110	72,631	0,112	74,691	0,113
0,427	21,977	0,434	22,618	0,440	23,269	0,446	23,929	0,452
0,779	13,913	0,790	14,319	0,802	14,731	0,813	15,149	0,825
0,961	11,913	0,975	12,261	0,990	12,614	1,004	12,971	1,018
1,709	7,908,0	1,734	8,138,9	1,759	8,373,1	1,784	8,610,6	1,810
2,670	5,833,6	2,710	6,003,9	2,749	6,176,6	2,788	6,351,9	2,827
3,115	5,266,2	3,161	5,420,0	3,206	5,575,9	3,252	5,734,1	3,298
3,845	4,587,5	3,902	4,721,4	3,958	4,857,3	4,015	4,995,1	4,071
5,234	3,764,5	5,311	3,874,4	5,388	3,985,9	5,465	4,099,0	5,542
6,836	3,183,9	6,937	3,276,9	7,037	3,371,2	7,138	3,466,8	7,238
7,008	3,135,2	7,111	3,226,7	7,214	3,319,6	7,317	3,413,8	7,420
8,650	2,754,1	8,777	2,834,5	8,906	2,916,1	9,033	2,998,8	9,160
0,682	2,423,9	10,839	2,494,7	10,996	2,566,5	11,153	2,639,3	11,310
2,458	2,210,6	12,641	2,275,1	12,825	2,340,6	13,008	2,407,0	13,190
2,924	2,162,8	13,114	2,226,0	13,305	2,290,0	13,495	2,355,0	13,684
5,382	1,951,9	15,608	2,008,4	15,834	2,066,2	16,060	2,124,9	16,286
8,050	1,777,1	18,315	1,829,0	18,583	1,881,6	18,848	1,935,0	19,114
9,466	1,700,8	19,752	1,750,5	20,039	1,800,9	20,325	1,852,0	20,612
9,934	1,630,8	21,242	1,678,4	21,551	1,726,7	21,859	1,775,7	22,166
4,034	1,506,4	24,387	1,550,4	24,740	1,595,0	25,093	1,640,3	25,446
7,344	1,399,5	27,746	1,440,3	28,149	1,481,8	28,551	1,523,8	28,952
8,032	1,379,8	28,444	1,420,1	28,857	1,461,0	29,269	1,502,4	29,682
9,870	1,306,5	31,324	1,344,6	31,777	1,383,3	32,231	1,422,5	32,686
4,606	1,224,9	35,115	1,260,7	35,626	1,297,0	36,135	1,333,8	36,642
3,558	1,152,9	39,125	1,186,5	39,694	1,220,7	40,261	1,255,3	40,828
2,726	1,088,7	43,354	1,120,5	43,982	1,152,8	44,610	1,185,5	45,238
7,104	1,031,3	47,797	1,061,4	48,491	1,092,0	49,184	1,122,9	49,876
0,834	0,999,65	50,567	1,028,8	51,301	1,058,4	52,034	1,088,5	52,766
1,698	0,979,59	52,458	1,008,2	53,219	1,037,2	53,979	1,066,5	54,738
5,504	0,932,76	57,335	0,959,99	58,167	0,987,62	58,998	1,015,6	59,828
7,524	0,890,18	62,429	0,916,17	63,335	0,942,53	64,240	0,969,27	65,144
5,758	0,851,28	67,740	0,876,14	68,723	0,901,35	69,705	0,926,92	70,686
2,206	0,815,63	73,268	0,839,44	74,330	0,863,59	75,392	0,888,09	76,454
7,866	0,782,82	79,011	0,805,68	80,158	0,828,86	81,303	0,852,37	82,448
9,742	0,752,52	84,974	0,774,49	86,206	0,796,78	87,438	0,819,38	88,668
9,830	0,724,49	91,151	0,745,64	92,473	0,767,10	93,794	0,788,85	95,114
5,132	0,698,45	97,546	0,718,84	98,960	0,739,52	100,374	0,760,50	101,786
2,648	0,674,21	104,158	0,693,89	105,668	0,713,86	107,178	0,734,11	108,686
9,378	0,651,59	110,986	0,670,61	112,595	0,689,91	114,203	0,709,48	115,810
2,822	0,610,84	114,481	0,659,55	116,141	0,678,53	117,800	0,697,78	119,458
5,320	0,630,43	118,031	0,648,83	119,742	0,667,50	121,453	0,686,44	123,162
9,478	0,610,60	125,294	0,628,42	127,109	0,646,51	128,925	0,664,85	130,740
9,816	0,591,96	132,770	0,609,25	134,696	0,626,78	136,620	0,644,56	138,544
4,430	0,574,43	140,466	0,591,20	142,503	0,608,21	144,539	0,625,47	146,574
6,228	0,557,91	148,378	0,574,20	150,530	0,590,72	152,680	0,607,48	154,830
4,238	0,542,30	156,506	0,558,14	158,776	0,574,20	161,044	0,590,48	163,312
2,464	0,527,55	164,853	0,542,95	167,243	0,558,57	169,632	0,574,42	172,022
0,902	0,513,57	173,415	0,528,56	175,930	0,543,77	178,443	0,559,20	180,956
3,554	0,500,31	182,195	0,514,92	184,836	0,529,73	187,477	0,544,76	190,118
6,422	0,487,72	191,199	0,501,96	193,963	0,516,40	196,734	0,531,05	199,504
7,500	0,475,74	200,404	0,489,63	203,309	0,503,72	206,213	0,518,00	209,118
5,792	0,464,34	209,833	0,477,89	212,844	0,491,64	215,915	0,505,59	218,956
5,208	0,453,47	219,479	0,466,71	222,660	0,480,14	225,841	0,493,76	229,022
5,618	0,443,09	229,342	0,456,02	232,667	0,469,15	235,991	0,482,45	239,314
5,954	0,433,17	239,424	0,445,82	242,893	0,458,65	246,363	0,471,66	249,832
6,100	9,423,70	249,719	0,436,07	253,338	0,448,62	256,957	0,461,34	260,576
6,462	0,414,62	260,234	0,426,73	264,005	0,439,01	267,777	0,451,46	271,548
7,036	0,405,93	270,963	0,417,78	274,890	0,429,80	278,817	0,441,99	282,744
4,112	0,367,40	327,864	0,378,12	332,616	0,389,00	337,368	0,400,04	342,118
6,530	0,335,54	390,185	0,345,33	395,842	0,355,27	401,497	0,365,35	407,150
3,290	0,308,75	457,927	0,317,77	464,565	0,326,91	471,202	0,336,18	477,838
3,390	0,285,93	531,087	0,294,27	538,784	0,302,74	546,481	0,311,33	554,178
3,830	0,266,24	609,666	0,274,01	618,503	0,281,89	627,339	0,289,89	636,174
3,612	0,249,09	693,665	0,256,36	703,718	0,263,73	713,771	0,271,22	723,824
9,734	0,234,00	783,083	0,240,84	794,431	0,247,77	805,780	0,254,79	817,130
9,196	0,220,65	877,919	0,227,09	890,644	0,233,62	903,367	0,240,25	916,090
3,998	0,208,73	978,174	0,214,82	992,352	0,221,01	1,006,528	0,227,28	1,020,704
8,144	0,198,03	1,083,85	0,203,82	1,099,560	0,209,68	1,115,268	0,215,63	1,130,976

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 46 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 48 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 50 CENTIMÈTRES.		1 MÈTR
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 m
met.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	met.	lit.	met.
0,01	0,000,079	76,780	0,115	78,898	0,116	81,015	0,118	83,221
0,02	0,000,314	24,599	0,459	25,277	0,465	25,965	0,471	26,662
0,027	0,000,573	15 573	0,836	16,002	0,847	16,438	0,859	16,879
0,03	0,000,707	13,334	1,032	13,702	1,046	14,075	1,060	14,453
0,04	0,001,257	8,851,5	1,835	9,095,6	1,860	9,343,1	1,885	9,593,
0,05	0,001,964	6,529,5	2,867	6,709,6	2,906	6,892,2	2,945	7,077,
0,054	0,002,290	5,891,5	3,344	6,057,1	3,390	6,221,9	3,435	6,388
0,06	0,002,827	5,134,8	4,128	5,276,5	4,185	5,420,0	4,241	5,565
0,07	0,003,848	4,213,6	5,619	4,329,9	5,696	4,447,7	5,773	4,567
0,08	0,005,027	3,563,8	7,339	3,662,1	7,438	3,761,7	7,540	3,862
0,081	0,005,153	3,509,2	7,523	3,606,0	7,626	3,704,2	7,730	3,803
0,09	0,006,362	3,082,7	9,287	3,167,7	9,414	3,253,9	9,543	3,341
0,10	0,007,854	2,713,1	11,467	2,787,9	11,622	2,863,8	11,781	2,940
0,108	0,009,161	2,474,3	13,373	2,542,6	13,558	2,611,8	13,741	2,681
0,11	0,009,503	2,480,9	13,874	2,487,7	14,064	2,555,3	14,255	2,623
0,12	0,011,310	2,184,3	16,512	2,244,5	16,738	2,305,6	16,965	2,367
0,13	0,013,273	1,989,1	19,379	2,043,9	19,644	2,099,6	19,910	2,156
0,135	0,014,314	1,903,8	20,898	1,956,3	21,184	2,009,5	21,471	2,062
0,14	0,015,394	1,825,4	22,474	1,875,7	22,782	1,926,7	23,091	1,978
0,15	0,017,672	1,686,2	25,799	1,732,7	26,154	1,779,8	26,507	1,827
0,16	0,020,106	1,566,4	29,354	1,609,6	29,758	1,653,4	30,159	1,697
0,162	0,020,612	1,544,4	30,094	1,587,0	30,506	1,630,2	30,918	1,674
0,17	0,022,698	1,462,3	33,140	1,502,7	33,592	1,543,6	34,047	1,585
0,18	0,025,447	1,371,1	37,151	1,408,9	37,662	1 447,2	38,170	1,486
0,19	0,028,353	1,290,4	41,395	1,326,0	41,962	1,362,1	42,529	1,399
0,20	0,031,416	1,218,6	45,866	1,252,3	46,494	1,286,3	47,124	1,320
0,21	0,034,636	1,154,4	50,569	1,186,2	51,262	1,218,5	51,954	1,25
0,216	0,036,644	1,118,9	53,499	1,149,8	54,232	1,181,1	54,965	1,213
0,22	0,038,013	1,096,5	55,498	1,126,7	56,258	1,157,4	57,020	1,18
0,23	0,041,548	1,044,0	60,659	1,072,8	61,490	1,102,0	62,322	1,13
0,24	0,045,239	0,996,38	66,049	1,023,9	66,954	1,051,7	67,859	1,08
0,25	0,049,088	0,952,84	71,668	0,979,13	72,650	1,005,8	73,631	1,03
0,26	0,053,093	0,912,93	77,516	0,938,11	78,578	0,963,64	79,640	0,98
0,27	0,057,256	0,876,21	83,593	0,900,38	84,738	0,924,88	85,884	0,91
0,28	0,061,575	0,842,30	89,900	0,865,54	91,130	0,889,09	92,363	0,91
0,29	0,066,052	0,810,92	96,435	0,833,29	97,756	0,855,96	99,078	0,87
0,30	0,070,686	0,781,77	103,200	0,803,34	104,614	0,825,20	106,029	0,84
0,31	0,075,477	0,754,64	110,196	0,775,46	111,706	0,796,56	113,215	0,81
0,32	0,080,425	0,729,33	117,418	0,749,45	119,028	0,769,84	120,637	0,79
0,325	0,082,958	0,717,29	121,117	0,737,08	122,778	0,757,14	124,437	0,77
0,33	0,085,530	0,705,64	124,873	0 725,10	126,584	0,744,83	128,295	0,76
0,34	0,090,792	0,683,44	132,556	0,702,29	134,372	0,721,40	136,188	0,74
0,35	0,096,212	0,662,59	140,468	0,680,86	142,392	0,699,39	144,317	0,71
0,36	0,101,788	0,642,96	148,610	0,660,70	150,646	0,678,68	152,682	0,69
0,37	0,107,521	0,624,47	156,980	0,641,69	159,130	0,659,15	161,282	0,67
0,38	0,113,412	0,607,00	165,580	0,623,74	167,850	0,640,72	170,118	0,65
0,39	0,119,459	0,590,49	174,411	0,606,77	176,798	0,623,28	179,189	0,6
0,40	0,125,664	0,574,81	183,469	0,590,70	185,982	0,606,77	188,496	0,6
0,41	0,132,026	0,560,00	192,759	0,575,44	195,398	0,591,10	198,039	0,6
0,42	0,138,545	0,545,90	202,275	0,560,96	205,046	0,576,23	207,818	0,5
0,43	0,145,221	0,532,49	212,022	0,547,18	214,926	0,562,07	217,832	0,5
0,44	0,152,053	0,519,73	221,997	0,534,07	225,038	0,548,60	228,080	0,5
0,45	0,159,043	0,507,57	232,203	0,521,57	235,382	0,535,76	238,565	0,5
0,46	0,166,191	0,495,95	242,638	0,509,63	245,962	0,523,50	249,287	0,5
0,47	0,173,495	0,484,85	253,302	0,498,23	256,772	0,511,78	260,243	0,5
0,48	0,180,956	0,474,25	264,195	0,487,33	267,814	0,500,59	271,434	0,5
0,49	0,188,575	0,464,09	275,320	0,476,89	279,090	0,489,87	282,863	0,5
0,50	0,196,350	0,454,35	286,671	0,466,89	290,598	0,479,59	294,525	0,4
0,55	0,237,583	0,411,23	346,870	0,422,57	351,622	0,434,07	356,375	0,4
0,60	0,282,744	0,375,57	412,805	0,385,93	418,460	0,396,43	424,116	0,4
0,65	0,331,832	0,345,59	484,475	0,355,12	491,110	0,364,78	497,748	0,3
0,70	0,384,846	0,320,04	561,875	0,328,87	569,572	0,337,82	577,269	0,3
0,75	0,441,788	0,298,00	645,010	0,306,22	653,846	0,314,55	662,682	0,3
0,80	0,502,656	0,278,80	733,877	0,286,49	743,930	0,294,29	753,984	0,3
0,85	0,567,451	0,261,92	828,479	0,269,15	839,826	0,276,47	851,177	0,3
0,90	0,636,174	0,246,97	928,813	0,253,78	941,538	0,260,69	954,261	0,
0,95	0,708,823	0,233,63	1,034,880	0,240,08	1,049,058	0,246,61	1,063,235	0,3
1,00	0,785,400	0,221,66	1,146,684	0,227,78	1,162,392	0,233,97	1,178,100	0,3

SES.

ÈTRES.	1 MÈTRE 54 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 56 CENTIMÈTRES		1 MÈTRE 58 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 60 CENTIMÈTRES.	
TMES ités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
t.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
,119	85,425	0,121	87,658	0,123	89,920	0,124	92,211	0,126
,478	27,368	0,484	28,084	0,490	28,808	0,496	29,542	0,503
,870	17,326	0,882	17,779	0,893	18,238	0,905	18,703	0,916
,075	14,836	1,089	15,223	1,103	15,616	1,117	16,014	1,131
910	9,848,1	1,935	10,106	1,960	10,366	1,985	10,630	2,011
,985	7,264,7	3,024	7,454,6	3,063	7,647,0	3,102	7,841,8	3,142
,481	6,558,2	3,527	6,729,6	3,573	6,903,3	3,619	7,079,2	3,664
,298	5,712,9	4,354	5,862,3	4,411	6,013,6	4,467	6,166,8	4,524
850	4,688,0	5,927	4,810,6	6,004	4,934,7	6,081	5,060,5	6,158
640	3,965,0	7,741	4,068,7	7,842	4,173,7	7,943	4,280,0	8,043
832	3,904,4	7,935	4,006,4	8,038	4,109,8	8,141	4,214,5	8,245
,670	3,429,8	9,797	3,519,4	9,924	3,610,2	10,051	3,702,2	10,179
,933	3,018,6	12,095	3,097,5	12,252	3,177,4	12,409	3,258,4	12,566
924	2,752,9	14,107	2,824,9	14,290	2,897,8	14,473	2,971,0	14,657
444	2,693,4	14,634	2,763,9	14,824	2,835,2	15,014	2,907,4	15,205
190	2,430,2	17,416	2,493,8	17,642	2,558,1	17,868	2,623,3	18,096
174	2,213,0	20,439	2,270,9	20,706	2,329,5	20,971	2,388,8	21,237
756	2,118,1	22,042	2,173,5	22,330	2,229,6	22,616	2,286,4	22,902
398	2,030,9	23,706	2,084,0	24,014	2,137,7	24 322	2,192,2	24,630
860	1,876,0	27,213	1,925,0	27,566	1,974,7	27,919	2,025,0	28,274
560	1,742,8	30,962	1,788,3	31,366	1,834,5	31,768	1,881,2	32,170
330	1,718,3	31,742	1,763,2	32,154	1,808,7	32,566	1,854,8	32,979
500	1,627,0	34,954	1,669,5	35,408	1,712,6	35,862	1,756,2	36,317
678	1,525,4	39,187	1,565,3	39,698	1,605,7	40,207	1,646,6	40,715
096	1,435,7	43,663	1,473,3	44,230	1,511,3	44,797	1,549,8	45,365
752	1,355,8	48,380	1,391,3	49,008	1,427,2	49,636	1,463,6	50,266
646	1,284,3	53,339	1,317,9	54,032	1,351,9	54,725	1,386,3	55,418
698	1,244,9	56,431	1,277,4	57,164	1,310,4	57,897	1,343,8	58,630
780	1,219,9	58,540	1,251,8	59,300	1,284,1	60,060	1,316,8	60,821
152	1,161,6	63,983	1,192,0	64,814	1,222,7	65,645	1,253,9	66,476
762	1,108,6	69,667	1,137,5	70,572	1,166,9	71,477	1,196,6	72.382
612	1,060,1	75,594	1,087,8	76,576	1,115,9	77,558	1,144,3	78,549
702	1,015,7	81,764	1,042,3	82,824	1,069,2	83,886	1,096,4	84,949
028	0,974,87	88,173	1,000,4	89,318	1,026,2	90,463	1,052,3	91,609
594	0,937,14	94,826	0,961,64	96,058	0,986,45	97,290	1,011,6	98,521
308	0,902,22	101,719	0,925,81	103,042	0,949,70	104,363	0,973,89	105,683
442	0,869,79	108,856	0,892,53	110,270	0,915,56	111,684	0,938,89	113,098
724	0,839,61	116,234	0,861,56	117,742	0,883,79	119,252	0,906,31	120,763
246	0,811,44	123,854	0,832,66	125,462	0,854,14	127,070	0,875,90	128,680
096	0,798,05	127,755	0,818,92	129,414	0,840,05	131,073	0,861,45	132,733
006	0,785,09	131,717	0,805,61	133,426	0,826,40	135,137	0,847,45	136,848
004	0,760,39	139,820	0,780,27	141,634	0,800,40	143,450	0,820,80	145,268
242	0,737,19	148,166	0,756,46	150,090	0,775,98	152,014	0,795,75	153,938
718	0,715,35	156,754	0,734,05	158,788	0,753,00	160,824	0,772,18	162,861
432	0,694,78	165,582	0,712,94	167,732	0,731,34	169,882	0,749,97	172,034
386	0,675,34	174,654	0,693,00	176,922	0,710,88	179,190	0,728,99	181,459
578	0,656,97	183,967	0,674,14	186,356	0,691,54	188,745	0,769,16	191,135
010	0,639,56	193,523	0,656,28	196,034	0,673,22	198,547	0,690,37	201,062
678	0,623,05	203,319	0,639,34	205,960	0,655,83	208,601	0,672,54	211,242
588	0,607,37	213,359	0,623,25	216,130	0,639,33	218,901	0,655,62	221,672
,734	0,592,45	223,638	0,607,94	226,544	0,623,62	229,448	0,639,51	232,354
120	0,578,25	234,161	0,593,37	237,202	0,608,68	240,243	0,624,19	243,285
746	0,564,71	244,927	0,579,48	248,106	0,594,43	251,287	0,609,58	254,469
610	0,551,79	255,934	0,566,21	259,258	0,580,83	262,582	0,595,62	265,906
712	0 539,44	267,182	0,553,55	270,652	0,567,83	274,122	0,582,30	277,592
052	0,527,64	278,671	0,541,44	282,290	0,555,41	285,909	0,569,56	289,530
634	0,516,34	290,406	0,529,84	294,176	0,543,51	297,948	0,557,36	301,720
462	0,505,51	302,379	0,518,73	306,306	0,532,11	310,233	0,545,67	314,160
126	0,457,53	365,878	0,469,49	370,630	0,481,61	375,382	0,493,88	380,133
770	0,417,85	435,425	0,428,78	441,080	0,439,84	446,735	0,451,05	452,390
384	0,384,50	511,021	0,394,55	517,658	0,404,73	524,295	0,415,04	530,931
966	0,356,07	592,663	0,365,38	600,358	0,374,81	608,055	0,384,36	615,754
518	0,331,55	680,354	0,340,22	689,190	0,349,00	698,026	0,357,89	706,861
036	0,310,19	774,089	0,318,30	784,142	0,326,52	996,571	0,334,84	804,250
526	0,291,41	873,875	0,299,03	885,222	0,306,75	794,195	0,314,56	907,922
084	0,274,78	979,707	0,281,96	992,430	0,289,24	1,005	0,296,61	1,018
410	0,259,94	1,091,586	0,266,73	1,105,762	0,273,62	1,120	0,280,59	1,134
808	0,246,62	1,209,516	0,253,07	1,225,224	0,259,60	1,241	0,266,21	1,257

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 62 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 64 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 66 CENTIMÈTRES.		1 MÈTR
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 m
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	94,531	0,127	96,879	0,129	99,257	0,130	101,66
0,02	0,000,314	30,286	0,509	31,038	0,515	31,800	0,522	32,570
0,027	0,000,573	19,173	0,928	19,649	0,939	20,131	0,950	20,619
0,03	0,000,707	16,417	1,145	16,825	1,159	17,238	1,173	17,656
0,04	0,001,257	10,898	2,036	11,169	2,061	11,443	2,086	11,720
0,05	0,001,964	8,039,1	3,181	8,238,8	3,220	8,441	3,259	8,645
0,054	0,002,290	7,257,2	3,710	7,437,5	3,756	7,620,0	3,802	7,804
0,06	0,002,827	6,321,9	4,580	6,479,0	4,637	6,638,0	4,694	6,798
0,07	0,003,848	5,187,8	6,235	5,316,6	6,311	5,447,1	6,388	5,579
0,08	0,005,027	4,387,7	8,144	4,496,7	8,242	4,607,0	8,343	4,718.
0,081	0,005,153	4,320,5	8,348	4,427,9	8,450	4,536,5	8,553	4,646.
0,09	0,006,362	3,795,3	10,306	3,893,6	10,434	3,985,1	10,561	4,081
0,10	0,007,854	3,339,3	12,723	3,423,3	12,880	3,507,3	13,037	3,592
0,108	0,009,161	3,046,3	14,840	3,122,0	15,022	3,198,6	15,205	3,276
0,11	0,009,503	2,980,6	15,395	3,054,6	15,586	3,129,6	15,776	3,205
0,12	0,011,310	2,689,3	18,322	2,756,1	18,548	2,823,7	18,774	2,892
0,13	0,013,273	2,448,9	21,502	2,509,8	21,768	2,571,4	22,033	2,633
0,135	0,014,314	2,343,9	23,188	2,402,1	23,474	2,461,1	23,760	2,520
0,14	0,015,394	2,247,3	24,938	2,303,2	25,246	2,359,7	25,554	2,416
0,15	0,017,672	2,076,0	28,627	2,127,5	28,982	2,179,3	29,335	2,232
0,16	0,020,106	1,928,5	32,572	1,976,5	32,974	2,025,0	33,376	2,074
0,162	0,020,612	1,901,5	33,391	1,948,7	33,802	1,996,6	34,214	2,043
0,17	0,022,698	1,800,4	36,771	1,845,1	37,224	1,890,4	37,678	1,936
0,18	0,025,447	1,688,0	41,224	1,730,0	41,732	1,772,4	42,241	1,815
0,19	0,028,353	1,588,8	45,932	1,628,2	46,498	1,668,2	47,065	1,708
0,20	0,031,416	1,500,4	50,894	1,537,6	51,522	1,575,4	52,150	1,613
0,21	0,034,636	1,421,2	56,111	1,456,5	56,802	1,492,3	57,495	1,528
0,216	0,036,644	1,377,6	59,363	1,411,8	60,094	1,446,5	60,827	1,481
0,22	0,038,013	1,348,9	61,581	1,383,5	62,342	1,417,4	63,102	1,45
0,23	0,041,548	1,285,4	67,307	1,317,3	68,138	1,349,7	68,969	1,38
0,24	0,045,239	1,226,7	73,287	1,257,2	74,192	1,288,1	75,097	1,31
0,25	0,049,088	1,173,1	79,522	1,202,3	80,502	1,231,8	81,484	1,26
0,26	0,053,093	1,124,0	86,011	1,151,9	87,072	1,180,2	88,134	1,20
0,27	0,057,256	1,078,8	92,754	1,105,6	93,898	1,132,7	95,043	1,16
0,28	0,061,575	1,037,0	99,753	1,062,8	100,982	1,088,9	102,214	1,11
0,29	0,066,052	0,998,39	107,004	1,023,2	108,326	1,048,3	109,647	1,07
0,30	0,070,686	0,962,51	114,512	0,986,42	115,924	1,010,6	117,338	1,03
0,31	0,075,477	0,929,11	122,273	0,952,19	123,782	0,975,55	125,292	0,99
0,32	0,080,425	0,897,94	130,288	0,920,25	131,896	0,942,83	133,504	0,96
0,325	0,082,958	0,883,12	134,392	0,905,06	136,050	0,927,27	137,709	0,94
0,33	0,085,530	0,868,77	138,559	0,890,36	140,270	0,912,20	141,981	0,93
0,34	0,090,792	0,841,44	147,081	0,862,35	148,898	0,883,51	150,714	0,90
0,35	0,096,212	0,815,77	155,862	0,836,04	157,786	0,856,55	159,710	0,87
0,36	0,101,788	0,791,61	164,897	0,811,27	166,932	0,831,18	168,968	0,85
0,37	0,107,521	0,768,84	174,184	0,787,94	176,334	0,807,27	178,484	0,82
0,38	0,113,412	0,747,33	183,727	0,765,90	185,994	0,784,69	188,262	0,80
0,39	0,119,459	0,727,00	193,524	0,745,06	195,914	0,763,34	198,303	0,78
0,40	0,125,664	0,707,74	203,575	0,725,32	206,088	0,743,12	208,601	0,76
0,41	0,132,026	0,689,46	213,883	0,706,59	216,522	0,723,93	219,163	0,74
0,42	0,138,545	0,672,11	224,443	0,688,81	227,214	0,705,71	229,985	0,72
0,43	0,145,221	0,655,60	235,258	0,671,89	238,162	0,688,37	241,066	0,70
0,44	0,152,053	0,639,89	246,326	0,655,79	249,366	0,671,88	252,407	0,68
0,45	0,159,043	0,624,91	257,650	0,640,44	260,830	0,656,15	264,011	0,67
0,46	0,166,191	0,610,61	269,230	0,625,78	272,554	0,641,13	275,878	0,65
0,47	0,173,495	0,596,94	281,062	0,611,78	284,530	0,626,79	288,000	0,6
0,48	0,180,956	0,583,88	293,149	0,598,39	296,766	0,613,08	300,385	0,6
0,49	0,188,575	0,571,38	305,492	0,585,58	309,262	0,599,94	313,034	0,6
0,50	0,196,350	0,559,40	318,087	0,573,29	322,014	0,587,36	325,941	0,60
0,55	0,237,583	0,506,30	384,885	0,518,88	389,636	0,531,61	394,388	0,5
0,60	0,282,744	0,462,39	458,045	0,473,88	463,700	0,485,51	469,355	0,4
0,65	0,331,832	0,425,48	537,568	0,436,05	544,204	0,446,75	550,841	0,4
0,70	0,384,846	0,394,03	623,451	0,403,82	631,146	0,413,73	638,843	0,4
0,75	0,441,788	0,366,89	715,697	0,376,01	724,532	0,385,23	733,368	0,3
0,80	0,502,656	0,343,26	814,303	0,351,79	824,354	0,360,42	834,407	0,3
0,85	0,567,451	0,322,47	919,271	0,330,49	930,618	0,338,60	941,967	0,3
0,90	0,636,174	0,304,07	1,031	0,311,62	1,043	0,319,27	1,056	0,3
0,95	0,708,823	0,287,65	1,148	0,294,79	1,162	0,302,03	1,177	0,3
1,00	0,785,400	0,272,91	1,272	0,279,69	1,288	0,286,55	1,304	0,2

SES.

ÈTRES.	1 MÈTRE 70 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 72 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 74 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 76 CENTIMÈTRES.	
UMES ités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
t.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
,132	104,10	0,134	106,56	0,135	109,05	0,137	111,58	0,138
,528	33,351	0,534	34,140	0,540	34,939	0,547	35,746	0,533
962	21,113	0,973	21,613	0,985	22,119	0,996	22,630	1,008
188	18,078	1,202	18,506	1,216	18,939	1,230	19,377	1,244
111	12,001	2,136	12,285	2,161	12,572	2,187	12,863	2,212
299	8,852,7	3,338	9,062,2	3,377	9,274,1	3,416	9,488,6	3,456
848	7,991,7	3,893	8,180,9	3,939	8,372,2	3,985	8,565,8	4,031
750	6,961,7	4,807	7,126,5	4,863	7,293,2	4,920	7,461,8	4,976
465	5,712,8	6,542	5,848,0	6,619	5,984,8	6,696	6,123,2	6,773
444	4,831,7	8,545	4,946,1	8,646	5,061,8	8,747	5,178,8	8,846
656	4,757,8	8,760	4,870,4	8,862	4,984,3	8,965	5,099,6	9,070
686	4,179,5	10,815	4,278,4	10,942	4,378,4	11,069	4,479,7	11,196
194	3,678,4	13,352	3,765,5	13,508	3,853,5	13,665	3,942,6	13,822
390	3,354,6	15,574	3,434,0	15,756	3,514,4	15,939	3,595,6	16,122
966	3,282,2	16,156	3,359,9	16,346	3,438,5	16,536	3,518,0	16,726
000	2,961,4	19,227	3,031,5	19,452	3,102,4	19,678	3,171,2	19,904
298	2,696,8	22,565	2,760,6	22,830	2,825,2	23,095	2,890,5	23,360
046	2,581,1	24,334	2,642,2	24,618	2,704,0	24,904	2,766,5	25,192
862	2,474,8	26,170	2,533,4	26,478	2,592,6	26,786	2,652,6	27,092
688	2,286,1	30,042	2,340,2	30,394	2,394,9	30,747	2,450,3	31,102
778	2,123,7	34,181	2,174,0	34,582	2,224,8	34,984	2,276,3	35,386
628	2,093,9	35,040	2,143,5	35,452	2,193,6	35,864	2,244,3	36,276
132	1,982,6	38,587	2,029,5	39,040	2,077,0	39,491	2,125,0	39,948
750	1,858,9	43,260	1,902,9	43,768	1,947,4	44,277	1,992,4	44,706
632	1,749,5	48,200	1,791,0	48,766	1,832,8	49,333	1,875,2	49,900
778	1,652,2	53,407	1,691,3	54,034	1,730,9	54,662	1,770,9	55,292
188	1,565,1	58,881	1,602,1	59,574	1,639,6	60,267	1,677,5	60,958
562	1,517,0	62,294	1,552,9	63,026	1,589,2	63,759	1,626,0	64,492
862	1,486,6	64,623	1,521,7	65,382	1,557,3	66,142	1,593,3	66,902
800	1,415,5	70,631	1,449,0	71,462	1,482,9	72,293	1,517,2	73,122
002	1,350,9	76,906	1,382,9	77,810	1,415,2	78,715	1,447,9	79,620
466	1,291,9	83,449	1,322,4	84,430	1,353,4	85,412	1,384,7	86,394
196	1,237,7	90,258	1,267,0	91,320	1,296,7	92,382	1,326,7	93,442
190	1,188,0	97,335	1,216,1	98,478	1,244,5	99,623	1,273,3	100,770
446	1,142,0	104,678	1,169,0	105,910	1,196,4	107,142	1,224,0	108,372
966	1,099,4	112,289	1,125,5	113,610	1,151,8	114,931	1,178,4	116,250
752	1,059,9	120,166	1,085,0	121,578	1,110,4	122,992	1,136,1	124,406
802	1,023,1	128,311	1,047,4	129,820	1,071,8	131,330	1,096,6	132,838
114	0,988,81	136,722	1,012,2	138,330	1,035,9	139,938	1,059,8	141,546
370	0,972,50	141,028	0,995,52	142,686	1,018,8	144,345	1,042,4	146,006
690	0,956,70	145,401	0,979,34	147,110	1,002,3	148,821	1,025,4	150,532
530	0,926,60	154,347	0,948,53	156,162	0,970,72	157,978	0,993,16	159,794
634	0,898,33	163,560	0,919,59	165,482	0,941,10	167,406	0,962,86	169,332
002	0,871,72	173,039	0,892,35	175,074	0,913,23	177,110	0,934,34	179,146
634	0,846,64	182,786	0,866,68	184,936	0,886,96	187,086	0,907,46	189,238
530	0,822,97	192,800	0,842,44	195,068	0,862,15	197,336	0,882,08	199,604
690	0,800,57	203,081	0,819,52	205,470	0,838,69	207,859	0,858,08	210,248
114	0,779,36	213,629	0,797,81	216,142	0,816,47	218,655	0,835,35	221,168
802	0,759,24	224,444	0,777,21	227,084	0,795,39	229,725	0,813,78	232,366
754	0,740,13	235,527	0,757,65	238,298	0,775,37	241,069	0,793,30	243,838
970	0,721,95	246,876	0,739,04	249,780	0,756,32	252,684	0,773,81	255,588
448	0,704,65	258,490	0,721,33	261,530	0,738,20	264,571	0,755,27	267,614
192	0,688,15	270,373	0,704,44	273,554	0,720,92	276,735	0,737,59	279,914
200	0,672,40	282,525	0,688,32	285,848	0,704,42	289,172	0,720,70	292,496
470	0,657,36	294,942	0,672,92	298,410	0,688,66	301,880	0,704,58	305,350
006	0,642,98	307,625	0,658,19	311,244	0,673,59	314,863	0,689,16	318,482
806	0,629,21	320,578	0,644,10	324,348	0,659,16	328,120	0,674,40	331,892
868	0,616,01	333,795	0,630,59	337,722	0,645,34	341,649	0,660,26	345,576
138	0,557,54	403,891	0,570,73	408,642	0,584,08	413,394	0,597,59	418,146
010	0,509,19	480,665	0,521,24	486,318	0,533,43	491,973	0,545,77	497,630
178	0,468,54	564,114	0,479,63	570,750	0,490,85	577,387	0,502,20	584,024
542	0,433,90	654,238	0,444,17	661,934	0,454,56	669,631	0,465,07	677,328
202	0,404,02	751,040	0,413,58	759,874	0,423,26	768,710	0,433,04	777,546
462	0,378,00	854,515	0,386,94	864,568	0,396,00	874,621	0,405,15	884,674
318	0,355,11	964,667	0,363,51	976,014	0,372,02	987,363	0,380,62	998,714
	0,334,84	1,081	0,342,77	1,094	0,350,78	1,107	0,358,89	1,120
	0,316,76	1,205	0,324,25	1,219	0,331,84	1,233	0,339,51	1,248
	0,300,53	1,335	0,307,64	1,351	0,314,83	1,367	0,322,11	1,382

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 78 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 80 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 82 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mè
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	114,13	0,140	116,70	0,141	119,31	0,143	121,95
0,02	0,000,314	36,563	0,559	37,390	0,566	38,225	0,572	39,070
0,027	0,000,573	23,147	1,019	23,670	1,031	24,199	1,042	24,734
0,03	0,000,707	19,820	1,258	20,268	1,272	20,721	1,287	21,179
0,04	0,001,257	13,157	2,237	13,454	2,262	13,755	2,287	14,059
0,05	0,001,964	9,705,4	3,495	9,924,8	3,534	10,147	3,574	10,371
0,054	0,002,290	8,761,6	4,077	8,959,6	4,122	9,159,8	4,168	9,362
0,06	0,002,827	7,632,4	5,033	7,804,8	5,089	7,979,2	5,146	8,155.
0,07	0,003,848	6,263 1	6,850	6,404,6	6,927	6,547,8	7,004	6,692,
0,08	0,005,027	5,297,2	8,947	5,416,9	9,048	5,537,9	9,149	5,660,
0,081	0,005,153	5,216,1	9,173	5,334,0	9,275	5,453,2	9,378	5,573.
0,09	0,006,362	4,582,1	11,323	4,685,6	11,451	4,790,3	11,578	4,896.
0,10	0,007,854	4,032,7	13,979	4,123,9	14,137	4,216,0	14,294	4,309.
0,108	0,009,161	3,677,8	16,305	3,760,9	16,490	3,845,0	16,673	3,929.
0,11	0,009,503	3,598,4	16,916	3,679,7	17,106	3,761,9	17,296	3,845.
0,12	0,011,310	3,246,7	20,130	3,320,1	20,358	3,394,3	20,584	3,469.
0,13	0,013,273	2,956,6	23,625	3,023,4	23,892	3,090,9	24,157	3,159.
0,135	0,014,314	2,829,7	25,478	2,893,7	25,765	2,958,3	26,051	3,023
0,14	0,015,391	2,713,2	27,400	2,774,5	27,709	2,836,5	28,017	2,899
0,15	0,017,672	2,506,3	31,455	2,562,9	31,809	2,620,2	32,162	2,678
0,16	0,020,106	2,328,3	35,788	2,380,9	36,191	2,434,1	36,591	2,487
0,162	0,020,612	2,295,6	36,688	2,347,5	37,102	2,400,0	37,514	2,453
0,17	0,022,698	2,173,6	40,402	2,222,7	40,857	2,272,4	41,311	2,322
0,18	0,025,447	2,037,9	45,215	2,084,0	45,805	2,130,6	46,314	2,177
0,19	0,028,353	1,918,1	50,467	1,961,4	51,035	2,005,3	51,602	2,049
0,20	0,031,416	1,811,4	55,920	1,852,3	56,549	1,893,7	57,177	1,935
0,21	0,034,636	1,715,8	61,651	1,754,6	62,345	1,793 8	63,038	1,833
0,216	0,036,644	1,663,1	65,225	1,700,7	65,959	1,738,7	66,692	1,777
0,22	0,038,013	1,629,8	67,662	1,666,6	68,424	1,703,8	69,184	1,741
0,23	0,041,548	1,551,9	73,953	1,586,9	74,786	1,622,4	75,617	1,658
0,24	0,045,239	1,481,0	80,525	1,514,5	81,430	1,548,3	82,335	1,583
0,25	0,049,088	1,416,3	87,376	1,448,3	88,358	1,480,7	89,340	1,513
0,26	0,053,093	1,357,0	94,504	1,387,6	95,568	1,418,6	96,630	1,451
0,27	0,057,256	1,302,4	101,915	1,331,8	103,060	1,361,6	104,205	1,391
0,28	0,061,575	1,252,0	109,604	1,280,3	110,836	1,308,9	112,068	1,337
0,29	0,066,052	1,205,3	117,571	1,232,6	118,894	1,260,1	120,215	1,288
0,30	0,070,686	1,162,0	125,820	1,188,3	127,235	1,214,8	128,649	1,24
0,31	0,075,477	1,121,7	134,348	1,147,0	135,858	1,172,7	137,369	1,19
0,32	0,080,425	1,084,1	143,154	1,108,6	144,765	1,133,3	146,373	1,15
0,325	0,082,958	1,066,2	147,665	1,090,3	149,324	1,114,6	150,983	1,13
0,33	0,085,530	1,048,9	152,243	1,072,6	153,954	1,096,5	155,665	1,12
0,34	0,090,792	1,015,9	161,610	1,038,8	163,426	1,062,0	165,242	1,08
0,35	0,096,212	0,984,87	171,256	1,007,1	173,181	1,029,6	175,105	1,05
0,36	0,101,788	0,955,70	181,182	0,977,29	183,218	0,999,13	185,254	1,02
0,37	0,107,521	0,928,20	191,388	0,949,18	193,538	0,970,39	195,688	0,99
0,38	0,113,412	0,902,24	201,872	0,922,63	204,141	0,943,25	206,409	0,96
0,39	0,119,459	0,877,70	212,637	0,897,53	215,027	0,917,59	217,416	0,93
0,40	0,125,664	0,854,44	223,681	0,873,75	226,195	0,893,27	228,708	0,91
0,41	0,132,026	0,832,38	235,007	0,851,19	237,647	0,870,21	240,288	0,8
0,42	0,138,545	0,811,43	246,609	0,829,76	249,381	0,848,31	252,152	0,8
0,43	0,145,221	0,791,50	258,492	0,809,38	261,398	0,827,47	264,302	0,8
0,44	0,152,053	0,772,53	270,655	0,789,99	273,695	0,807,64	276,736	0,8
0,45	0,159,043	0,754,44	283,095	0,771,49	286,277	0,788,73	289,458	0,8
0,46	0,166,191	0,737,18	295,820	0,753,83	299,144	0,770,68	302,468	0,7
0,47	0,173,495	0,720,68	308,820	0,736,97	312,291	0,753,44	315,761	0,7
0,48	0,180,956	0,704,92	322,101	0,720,85	325,721	0,736,95	329,340	0,7
0,49	0,188,575	0,689,82	335,664	0,705,41	339,435	0,721,17	343,207	0,7
0,50	0,196,350	0,675,35	349,503	0,690,61	353,430	0,706,04	357,357	0,7
0,55	0,237,583	0,611,25	422,898	0,625,06	427,649	0,639,03	432,401	0,6
0,60	0,282,744	0,558,24	503,285	0,570,86	508,939	0,583,61	514,594	0,5
0,65	0,331,832	0,513,68	590,661	0,525,29	597,298	0,537,03	603,935	0,5
0,70	0,384,846	0,475,70	685,025	0,486,45	692,723	0,497,32	700,420	0,5
0,75	0,441,788	0,442,94	786,382	0,452,95	795,218	0,463,07	804,054	0,4
0,80	0,502,656	0,414,41	894,727	0,423,78	904,781	0,433,25	914,834	0,4
0,85	0,567,451	0,389,32	1,010	0,398,12	1,021	0,407,01	1,033	0,4
0,90	0,636,174	0,367,10	1,132	0,375,39	1,145	0,383,78	1,158	0,3
0,95	0,708,823	0,347,27	1,262	0,355,12	1,276	0,363,05	1,290	0,3
1,00	0,785,400	0,329,48	1,398	0,336,92	1,414	0,344,45	1,429	0,3

SES.

ÈTRES.	1 MÈTRE 86 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 88 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 90 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 92 CENTIMÈTRES.	
UMES bités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
it.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
,145	124,62	0,146	127,31	0,148	130,03	0,149	132,78	0,151
,578	39,924	0,584	40,787	0,591	41,659	0,597	42,541	0,603
,054	25,275	1,065	25,821	1,076	26,273	1,088	26,931	1,099
,301	21,642	1,315	22,110	1,329	22,582	1,343	23,060	1,358
,312	14,366	2,337	14,677	2,362	14,991	2,388	15,308	2,413
,613	10,597	3,652	10,827	3,691	11,058	3,731	11,292	3,770
,214	9,566,8	4,260	9,773,7	4,306	9,982,7	4,351	10,194	4,397
,202	8,333,8	5,259	8,514,0	5,316	8,696,1	5,372	8,880,2	5,249
,081	6,838.7	7,158	6,986,6	7,235	7,136,9	7,312	7,287,1	7,389
,248	5,784,0	9,349	5,909,1	9,449	6,035,5	9,551	6,163,2	9,650
,482	5,695,5	9,585	5,818,7	9,687	5,943,1	9,791	6,068,9	9,894
,766	5,003,2	11,833	5,111,4	11,960	5,220,7	12,087	5,331,2	12,214
,450	4,403,4	14,607	4,498,6	14,766	4,594,8	14,923	4,692,0	15,078
,856	4,015,8	17,039	4,102,7	17,222	4,190,4	17,406	4,279,1	17,588
,486	3,929,1	17,676	4,014,1	17,866	4,099,9	18,056	4,186,7	18,246
,810	3,545,1	21,036	3,621,8	21,262	3,699,2	21,489	3,777,5	21,714
,422	3,228,3	24,687	3,298,1	24,954	3,368,6	25,219	3,439,9	25,484
,338	3,089,8	26,624	3,156,6	26,910	3,224,1	27,196	3,292,4	27,482
,324	2,962,6	28,632	3,026,6	28,940	3,091,3	29,248	3,156,8	29,556
,514	2,736,6	32,867	2,795,8	33,222	2,855,6	33,576	2,916,0	33,930
,994	2,542,3	37,396	2,597,3	37,798	2,652,8	38,202	2,709,0	38,602
,926	2,506,6	38,338	2,560,8	38,750	2,615,6	39,163	2,671,0	39,574
,764	2,373,4	42,218	2,424,7	42,672	2,476,5	43,126	2,529,0	43,580
,742	2,228,3	47,251	2,273,4	47,760	2,322,0	48,349	2,371,1	48,858
,170	2,094,4	52,737	2,139,7	53,302	2,185,4	53,871	2,231,7	54,438
,806	1,977,9	58,434	2,020,6	59,062	2,063,8	59,690	2,107,5	60,318
,730	1,873,5	64,423	1,914,0	65,114	1,955,0	65,809	1,996,3	66,502
,424	1,816,0	68,157	1,855,3	68,890	1,894,9	69,623	1,935,1	70,354
,944	1,779,6	70,704	1,818,0	71,464	1,856,9	72,225	1,896,2	72,986
,446	1,694,5	77,277	1,731,1	78,110	1,768,1	78,941	1,805,6	79,770
,238	1,617,1	84,143	1,652,1	85,050	1,687,4	85,954	1,723,1	86,858
,320	1,546,5	91,302	1,579,9	92,284	1,613,7	93,266	1,647,9	94,248
,690	1,481,7	98,752	1,513,7	99,814	1,546,1	100,877	1,578,8	101,938
,350	1,422,1	106,495	1,452,8	107,640	1,483,9	108,786	1,515,3	109,930
,298	1,367,1	114,530	1,396,6	115,762	1,426,5	116,993	1,456,7	118,224
,534	1,316,1	122,855	1,344,6	124,178	1,373,3	125,499	1,402,4	126,820
,062	1,268,8	131,476	1,296,2	132,890	1,324,0	134,303	1,352,0	135,716
,878	1,224,8	140,388	1,251,3	141,896	1,278,0	143,406	1,305,1	144,914
,982	1,183,7	149,590	1,209,3	151,198	1,235,2	152,807	1,261,3	154,414
,642	1,164,2	154,301	1,189,3	155,960	1,214,8	157,620	1,240,5	159,278
,374	1,145,3	159,085	1,170 0	160,796	1,195,0	162,507	1,220,3	164,218
,058	1,109,2	168,874	1,133,2	170,690	1,157,5	172,505	1,181,9	174,320
,028	1,075,4	178,952	1,098,6	180,878	1,122,1	182,802	1,145,9	184,726
,290	1,043,5	189,326	1,066,1	191,360	1,088,9	193,397	1,111,9	195,432
,838	1,013,5	199,988	1,035,4	202,138	1,057,6	204,290	1,080,0	206,440
,678	0,985,17	210,946	1,006,5	213,214	1,028,0	215,482	1,049,8	217,750
,804	0,958,36	222,193	0,979,08	224,582	1,000,0	226,973	1,021,2	229,362
,222	0,932,97	233,735	0,953,14	236,248	0,973,53	238,762	0,994,13	241,274
,926	0,908,88	245,567	0,928,53	248,208	0,948,39	250,849	0,968,46	253,490
,922	0,886,00	257,693	0,905,16	260,464	0,924,52	263,236	0,944,09	266,006
,206	0,864,24	270,110	0,882,93	273,014	0,901,81	275,920	0,920,90	278,824
,778	0,843,53	282,819	0,861,77	285,858	0,880,20	288,901	0,898,83	291,942
,633	0,823,78	295,819	0,841,60	299,000	0,859,60	302,182	0,877,79	305,362
,790	0,804,93	309,114	0,822,33	312,438	0,839,92	315,763	0,857,70	319,086
,230	0,786,92	322,700	0,803,93	326,170	0,821,13	329,641	0,838,51	333,110
,958	0,769,70	336,577	0,786,35	340,198	0,803,16	343,816	0,820,16	347,434
,978	0,753,22	350,750	0,769,50	354,520	0,785,96	358,293	0,802,60	362,064
,284	0,737,42	365,211	0,753,36	369,138	0,769,48	373,065	0,785,76	376,992
,152	0,667,43	441,904	0,681,86	446,656	0,696,44	451,408	0,711,18	456,158
,248	0,609,55	525,903	0,622,73	531,558	0,636,05	537,214	0,649,51	542,868
,570	0,560,89	617,207	0,573,02	623,844	0,585,28	630,481	0,597,66	637,118
,116	0,519,42	715,813	0,530,66	723,510	0,542,01	731,207	0,553,48	738,904
,890	0,483,65	821,726	0,494,11	830,562	0,504,68	839,397	0,515,36	848,232
,886	0,452,50	934,939	0,462,28	944,994	0,472,17	955,046	0,482,16	965,098
	0,425,10	1,053	0,434,29	1,067	0,443,58	1,078	0,452,97	1,090
	0,400,84	1,203	0,409,50	1,196	0,418,26	1,209	0,427,11	1,221
	0,379,19	1,318	0,387,39	1,333	0,395,67	1,347	0,404,04	1,361
	0,359,76	1,461	0,367,54	1,477	0,375,40	1,492	0,383,34	1,508

TUYAUX NEUFS.		1 MÈTRE 94 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 96 CENTIMÈTRES.		1 MÈTRE 98 CENTIMÈTRES.		2
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	135,56	0,152	138,37	0,154	141,21	0,155	144,08
0,02	0,000,314	43,432	0,609	44,332	0,616	45,241	0,622	46,160
0,027	0,000,573	27,496	1,111	28,065	1,122	28,641	1,134	29,223
0,03	0,000,707	23,543	1,372	24,031	1,386	24,524	1,400	25,022
0,04	0,001,257	15,628	2,438	15,952	2,463	16,279	2,488	16,610
0,05	0,001,964	11,529	3,809	11,768	3,848	12,009	3,888	12,253
0,054	0,002,290	10,407	4,443	10,623	4,489	10,841	4,535	11,061
0,06	0,002,827	9,066,1	5,485	9,254,0	5,542	9,443,9	5,598	9,636
0,07	0,003,848	7,439,7	7,466	7,593,9	7,543	7,749,6	7,620	7,907
0,08	0,005,027	6,292,3	9,751	6,422,7	9,852	6,554,4	9,953	6,687
0,081	0,005,153	6,196,0	9,997	6,324,4	10,098	6,454,1	10,201	6,585
0,09	0,006,362	5,442,8	12,341	5,555,6	12,468	5,669,6	12,595	5,785
0,10	0,007,854	4,790,3	15,235	4,889,6	15,394	4,989,9	15,551	5,091
0,108	0,009,161	4,368,7	17,771	4,459,2	17,954	4,550,7	18,137	4,643
0,11	0,009,503	4,274,4	18,436	4,362,9	18,626	4,452,4	18,816	4,543
0,12	0,011,310	3,856,6	21,940	3,936,6	22,166	4,017,3	22,392	4,099
0,13	0,013,273	3,512,0	25,749	3,584,7	26,014	3,658,3	26,279	3,733
0,135	0,014,314	3,361,3	27,768	3,431,0	28,054	3,501,4	28,340	3,572
0,14	0,015,394	3,222,9	29,864	3,289,7	30,170	3,357,2	30,478	3,423
0,15	0,017,672	2,977,1	34,283	3,038,8	34,636	3,101,1	34,989	3,164
0,16	0,020,106	2,765,7	39,004	2,823,0	39,408	2,880,9	39,810	2,939
0,162	0,020,612	2,726,9	39,986	2,783,4	40,398	2,840,5	40,810	2,898
0,17	0,022,698	2,581,9	44,034	2,635,4	44,488	2,689,5	44,942	2,743
0,18	0,025,447	2,420,8	49,367	2,471,0	49,876	2,521,6	50,385	2,573
0,19	0,028,353	2,278,4	55,005	2,325,6	55,570	2,373,3	56,137	2,422
0,20	0,031,416	2,151,7	60,946	2,196,2	61,574	2,241,3	62,202	2,287
0,21	0,034,636	2,038,2	67,195	2,080,4	67,886	2,123,1	68,579	2,16
0,216	0,036,644	1,975,6	71,087	2,016,5	71,822	2,057,9	72,555	2,10
0,22	0,038,013	1,935,9	73,746	1,976,0	74,506	2,016,6	75,266	2,05
0,23	0,041,548	1,843,4	80,601	1,881,6	81,434	1,920,2	82,265	1,95
0,24	0,045,239	1,759,2	87,763	1,795,7	88,668	1,832,5	89,573	1,87
0,25	0,049,088	1,682,4	95,230	1,717,2	96,210	1,752,5	97,192	1,78
0,26	0,053,093	1,611,9	103,000	1,645,3	104,062	1,679,0	105,124	1,71
0,27	0,057,256	1,547,1	111,075	1,579,1	112,220	1,611,5	113,365	1,64
0,28	0,061,575	1,487,2	119,456	1,518,0	120,686	1,549,1	121,918	1,58
0,29	0,066,052	1,431,8	128,141	1,461,5	129,462	1,491,4	130,783	1,52
0,30	0,070,686	1,380,3	137,130	1,408,9	138,544	1,437,8	139,958	1,46
0,31	0,075,477	1,332,4	146,424	1,360,0	147,934	1,387,9	149,444	1,41
0,32	0,080,425	1,287,7	156,022	1,314,4	157,632	1,341,4	159,240	1,36
0,325	0,082,958	1,266,5	160,937	1,292,7	162,598	1,319,2	164,257	1,34
0,33	0,085,530	1,245,9	165,929	1,271,7	167,638	1,297,8	169,349	1,32
0,34	0,090,792	1,206,7	176,136	1,231,7	177,952	1,257,0	179,768	1,28
0,35	0,096,212	1,169,9	186,650	1,194,1	188,574	1,218,6	190,498	1,24
0,36	0,101,788	1,135,2	197,468	1,158,8	199,504	1,182,5	201,540	1,20
0,37	0,107,521	1,102,6	208,590	1,125,4	210,742	1,148,5	212,892	1,17
0,38	0,113,412	1,071,7	220,018	1,093,9	222,286	1,116,4	224,554	1,13
0,39	0,119,459	1,042,6	231,751	1,064,2	234,140	1,086,0	236,529	1,10
0,40	0,125,664	1,015,0	243,787	1,036,9	246,302	1,057,2	248,815	1,07
0,41	0,132,026	0,988,74	256,131	1,009,2	258,770	1,029,9	261,411	1,05
0,42	0,138,545	0,963,86	268,777	0,983,83	271,548	1,004,0	274,319	1,03
0,43	0,145,221	0,940,18	281,728	0,959,67	284,632	0,979,35	287,536	0,99
0,44	0,152,053	0,917,65	294,983	0,936,67	298,022	0,955,88	301,063	0,97
0,45	0,159,043	0,896,17	308,543	0,914,74	311,724	0,933,51	314,905	0,95
0,46	0,166,191	0,875,66	322,410	0,893,81	325,734	0,912,14	329,058	0,93
0,47	0,173,495	0,856,07	336,580	0,873,81	340,050	0,891,73	343,520	0,91
0,48	0,180,956	0,837,34	351,053	0,854,69	354,674	0,872,22	358,293	0,89
0,49	0,188,575	0,819,40	365,836	0,836,39	369,606	0,853,54	373,378	0,87
0,50	0,196,350	0,802,22	380,919	0,818,84	384,846	0,835,64	388,773	0,85
0,55	0,237,583	0,726,07	460,910	0,741,12	465,662	0,756,32	470,414	0,77
0,60	0,282,744	0,663,11	548,523	0,676,85	554,178	0,690,74	559,833	0,70
0,65	0,331,832	0,610,18	643,755	0,622,82	650,390	0,635,60	657,027	0,64
0,70	0,384,846	0,565,07	746,601	0,576,78	754,298	0,588,61	761,995	0,60
0,75	0,441,788	0,526,15	857,068	0,537,06	865,904	0,548,07	874,740	0,55
0,80	0,502,656	0,492,26	975,151	0,502,46	985,206	0,512,77	995,259	0,52
0,85	0,567,451	0,462,45	1,101	0,472,04	1,112	0,681,72	1,124	0,49
0,90	0,636,174	0,436,06	1,234	0,445,10	1,247	0,454,23	1,260	0,46
0,95	0,708,823	0,412,51	1,375	0,421,06	1,389	0,429,69	1,403	0,43
1,00	0,785,400	0,391,37	1,524	0,399,48	1,539	0,407,67	1,555	0,41

SES.

	2 MÈTRES 5 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 10 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 15 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 20 CENTIMÈTRES.	
MES tés.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
t.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
157	151,37	0,161	158,85	0,165	166,50	0,169	174,34	0,173
628	48,497	0,644	50,891	0,660	53,344	0,675	55,854	0,691
145	30,702	1,174	32,218	1,202	33,770	1,231	35,359	1,260
414	26,289	1,449	27,587	1,484	28,916	1,520	30,277	1,555
513	17,451	2,576	18,313	2,639	19,195	2,702	20,098	2,765
927	12,873	4,025	13,509	4,123	14,160	4,222	14,826	4,320
580	11,621	4,695	12,195	4,809	12,783	4,924	13,384	5,039
655	10,123	5,796	10,623	5,938	11,135	6,079	11,659	6,220
697	8,307	7,889	8,717	8,082	9,138	8,274	9,567	8,446
053	7,026	10,304	7,373	10,556	7,728	10,807	8,092	11,058
306	6,919	10,564	6,260	10,821	7,610	11,079	7,968	11,337
723	6,078	13,041	6,378	13,360	6,685	13,678	6,999	13,996
768	5,349	16,101	5,613	16,493	5,584	16,886	6,160	17,279
322	4,878	18,780	5,119	19,238	5,366	19,696	5,618	20,154
007	4,773	19,482	5,009	19,957	5,250	20,432	5,497	20,907
620	4,306	23,185	4,519	23,751	4,737	24,316	4,960	24,881
547	3,922	27,211	4,115	27,874	4,313	28,538	4,516	29,201
028	3,753	29,344	3,939	30,059	4,128	30,775	4,323	31,491
788	3,599	31,558	3,776	32,327	3,958	33,097	4,145	33,866
343	3,324	36,227	3,488	37,110	3,657	37,994	3,829	38,877
212	3,088	41,217	3,241	42,223	3,397	43,228	3,557	44,234
224	3,045	42,255	3,195	43,285	3,349	44,316	3,507	45,346
396	2,883	46,531	3,025	47,666	3,171	48,801	3,320	49,936
894	2,703	52,166	2,837	53,430	2,973	54,711	3,113	55,883
706	2,544	58,124	2,670	59,541	2,798	60,959	2,930	62,376
832	2,403	64,403	2,521	65,974	2,643	67,545	2,767	69,115
272	2,276	71,004	2,388	72,736	2,503	74,468	2,621	76,200
287	2,206	75,119	2,315	76,952	2,427	78,784	2,541	80,616
027	2,162	77,928	2,268	79,828	2,378	81,729	2,490	83,629
095	2,058	85,172	2,160	87,250	2,264	89,327	2,371	91,405
478	1,964	92,740	2,061	95,002	2,161	97,264	2,262	99,526
175	1,879	100,629	1,971	103,084	2,066	105,538	2,164	107,993
186	1,800	108,841	1,889	111,495	1,980	114,150	2,073	116,805
511	1,728	117,374	1,813	120,237	1,900	123,100	1,990	125,963
151	1,661	126,230	1,743	129,308	1,827	132,387	1,913	135,466
104	1,599	135,407	1,678	138,709	1,759	142,012	1,841	145,315
372	1,541	144,906	1,617	148,441	1,695	151,975	1,775	155,509
954	1,488	154,723	1,561	158,502	1,637	162,276	1,714	166,049
850	1,438	164,871	1,509	168,892	1,582	172,913	1,656	176,935
916	1,414	170,064	1,484	174,212	1,555	178,360	1,629	182,507
060	1,391	175,337	1,460	179,613	1,530	183,890	1,602	188,166
384	1,347	186,124	1,414	190,664	1,482	195,204	1,552	199,743
423	1,306	197,234	1,371	202,044	1,437	206,855	1,505	211,665
576	1,268	208,665	1,330	213,754	1,394	218,843	1,460	223,933
042	1,231	220,418	1,292	225,795	1,354	231,171	1,418	236,547
823	1,197	232,494	1,256	238,165	1,316	243,836	1,378	249,506
919	1,164	244,892	1,222	250,865	1,281	256,838	1,341	262,810
328	1,133	257,611	1,189	263,894	1,247	270,177	1,305	276,461
012	1,104	270,653	1,159	277 255	1,214	283,856	1,272	290,457
090	1,076	284,017	1,129	290,945	1,184	297,872	1,240	304,799
442	1,050	297,703	1,102	304,964	1,155	312,225	1,209	319,486
106	1,025	311,709	1,075	319,311	1,127	326,914	1,180	334,517
086	1,001	326,038	1,050	333,990	1,101	341,942	1,153	349,895
382	0,977,8	340,692	1,026	349,001	1,076	357,311	1,126	365,620
990	0,955,9	355,665	1,003	364,340	1,051	373,015	1,101	381,689
912	0,935,0	370,960	0,981,2	380,008	1,028	389,056	1,077	398,103
150	0,915,0	386,579	0,960,1	396,008	1,006	405,437	1,054	414,865
700	0,895,8	402,518	0,940,0	412,335	0,985,3	422,153	1,032	431,970
166	0,810,8	487,045	0,850,8	498,924	0,891,8	510,803	0,933,7	522,683
188	0,740,4	579,625	0,777,0	593,762	0,814,4	607,899	0,852,8	622,037
664	0,681,3	680,256	0,715,0	696,847	0,749,4	713,439	0,784,7	730,030
692	0,631,0	788,934	0,662,1	808,177	0,694,0	827,419	0,726,7	846,661
576	0,587,5	905,665	0,616,5	927,755	0,646,2	949,844	0,676,6	971,934
	0,549,7	1,030	0,576,8	1,056	0,604,6	1,081	0,633,1	1,106
	0,516,4	1,163	0,541,9	1,192	0,568,0	1,220	0,594,7	1,248
	0,486,9	1,304	0,511,0	1,336	0,535,6	1,368	0,560,8	1,400
	0,460,6	1,453	0,483,4	1,489	0,506,7	1,524	0,530,5	1,559
	0,437,0	1,610	0,458,6	1,649	0,480,7	1,689	0,503,3	1,728

TUYAUX NEUFS.		2 MÈTRES 25 CENTIMÈTRES		2 MÈTRES 30 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 35 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mèt
mèt.		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	182,35	0,177	190,55	0,181	198,92	0,185	207,48
0,02	0,000,314	58,421	0,707	61,047	0,723	63,720	0,738	66,470
0,027	0,000,573	36,985	1,288	38,647	1,317	40,345	1,346	42,080
0,03	0,000,707	31,669	1,590	33,092	1,626	34,546	1,661	36,032
0,04	0,001,257	21,022	2,827	21,967	2,890	22,932	2,953	23,918
0,05	0,001,964	15,507	4,418	16,204	4,516	16,917	4,614	17,641
0,054	0,002,290	13,999	5,153	14,628	5,268	15,271	5,382	15,928
0,06	0,002,827	12,195	6,362	12,743	6,503	13,303	6,644	13,873
0,07	0,003,848	10,007	8,639	10,457	8,851	10,917	9,044	11,386
0,08	0,005,027	8,464	11,309	8,844	11,561	9,233	11,812	9,630
0,081	0,005,153	8,334	11,595	8,709	11,852	9,092	12,110	9,483
0,09	0,006,362	7,321	14,314	7,650	14,632	7,987	14,950	8,330
0,10	0,007,854	6,444	17,672	6,733	18,064	7,029	18,457	7,331
0,108	0,009,161	5,876	20,612	6,141	21,070	6,410	21,528	6,686
0,11	0,009,503	5,750	21,382	6,008	21,858	6,272	22,333	6,542
0,12	0,011,310	5,188	25,446	5,421	26,012	5,659	26,577	5,903
0,13	0,013,273	4,724	29,865	4,936	30,529	5,153	31,193	5,373
0,135	0,014,314	4,521	32,207	4,725	32,922	4,932	33,638	5,14
0,14	0,015,394	4,335	34,636	4,530	35,406	4,729	36,176	4,933
0,15	0,017,672	4,005	39,761	4,185	40,644	4,368	41,528	4,550
0,16	0,020,106	3,720	45,239	3,887	46,244	4,058	47,249	4,233
0,162	0,020,612	3,668	46,377	3,833	47,408	4,001	48,439	4,17
0,17	0,022,698	3,473	51,071	3,629	52,206	3,789	53,341	3,95
0,18	0,025,447	3,256	57,155	3,403	58,428	3,552	59,700	3,70
0,19	0,028,353	3,065	63,794	3,203	65,212	3,343	66,630	3,48
0,20	0,031,416	2,894	70,686	3,024	72,257	3,157	73,828	3,29
0,21	0,034,636	2,742	77,932	2,865	79,663	2,991	81,395	3,11
0,216	0,036,644	2,657	82,448	2,777	84,280	2,899	86,112	3,02
0,22	0,038,013	2,604	85,530	2,721	87,431	2,841	89,332	2,96
0,23	0,041,548	2,480	93,482	2,591	95,560	2,705	97,637	2,82
0,24	0,045,239	2,366	101,788	2,473	104,050	2,581	106,312	2,69
0,25	0,049,088	2,263	110,447	2,365	112,901	2,469	115,355	2,57
0,26	0,053,093	2,168	119,460	2,266	122,114	2,365	124,769	2,46
0,27	0,057,256	2,081	128,826	2,175	131,688	2,270	134,551	2,36
0,28	0,061,575	2,000	138,545	2,090	141,623	2,182	144,702	2,27
0,29	0,066,052	1,926	148,618	2,013	151,920	2 101	155,223	2,19
0,30	0,070,686	1,857	159,043	1,940	162,578	2,025	166,112	2,11
0,31	0,075,477	1,792	169,823	1,873	173,597	1,955	177,371	2,0
0,32	0,080,425	1,732	180,956	1,810	184,977	1,890	188,998	1,9
0,325	0,082,958	1,704	186,655	1,780	190,803	1,858	194,951	1,9
0,33	0,085,530	1,676	192,443	1,751	196,719	1,828	200,996	1,9
0,34	0,090,792	1,623	204,283	1,696	208,822	1,771	213,362	1,8
0,35	0,096,212	1,574	216,476	1,644	221,286	1,717	226,097	1,7
0,36	0,101,788	1,527	229,022	1,596	234,112	1,666	239,201	1,7
0,37	0,107,521	1,483	241,923	1,550	247,299	1,618	252,675	1,6
0,38	0,113,412	1,442	255,177	1,506	260,847	1,573	266,518	1,6
0,39	0,119,459	1,402	268,783	1,465	274,756	1,530	280,729	1,5
0,40	0,125,664	1,365	282,744	1,427	289,027	1,489	295,310	1,5
0,41	0,132,026	1,330	297,058	1,390	303,660	1,451	310,261	1,5
0,42	0,138,545	1,297	311,726	1,355	318,654	1,414	325,581	1,4
0,43	0,145,221	1,265	326,747	1,322	334,008	1,380	341,269	1,4
0,44	0,152,053	1,234	342,120	1,290	349,722	1,347	357,325	1,4
0,45	0,159,043	1,206	357,847	1,260	365,799	1,315	373,751	1,3
0,46	0,166,191	1,178	373,930	1,231	382,239	1,285	390,549	1,3
0,47	0,173,495	1,152	390,364	1,203	399,039	1,256	407,714	1,3
0,48	0,180,956	1,126	407,151	1,177	416,199	1,229	425,247	1,2
0,49	0,188,575	1,102	424,294	1,152	433,723	1,202	443,152	1,2
0,50	0,196,350	1,079	441,788	1,128	451,605	1,177	461,423	1,2
0,55	0,237,583	0,976,7	534,562	1,021	546,441	1,065	558,320	1,1
0,60	0,282,744	0,892,0	636,174	0,932,0	650,311	0,973,0	664,448	1,0
0,65	0,331,832	0,820,8	746,622	0,857,7	763,214	0,895,3	779,806	0,9
0,70	0,384,846	0,760,1	865,903	0,794,2	885,146	0,829,2	904,388	0,8
0,75	0,441,788	0,707,7	994,023	0,739,5	1,016	0,772,1	1,038	0,8
0,80	0,502,656	0,662,2	1,131	0,691,9	1,156	0,722,3	1,181	0,7
0,85	0,567,451	0,622,1	1,277	0,650,0	1,305	0,678,6	1,334	0,7
0,90	0,636,174	0,586,6	1,431	0,612,9	1,463	0,639,9	1,495	0,6
0,95	0,708,823	0,554,9	1,595	0,579,8	1,630	0,605,3	1,666	0,6
1,00	0,785,400	0,526,4	1,767	0,550,1	1,806	0,574,3	1,846	0,6

SES.

ÈTRES.	2 MÈTRES 45 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 50 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 55 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 60 CENTIMÈTRES.	
MES ités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
188	216,21	0,192	225,12	0,196	234,22	0,200	243,50	0,204
754	69,269	0,770	72,125	0,785	75,039	0,801	78,010	0,817
374	43,852	1,403	45,660	1,431	47,505	1,460	49,386	1,489
697	37,549	1,733	39,097	1,768	40,677	1,804	42,287	1,838
016	24,925	3,079	25,953	3,142	27,002	3,204	28,071	3,267
712	18,387	4,811	19,145	4,909	19,918	5,007	20,707	5,105
407	16,509	5,611	17,283	5,726	17,981	5,840	18,693	5,955
786	14,459	6,927	15,056	7,069	15,664	7,210	16,284	7,351
236	11,865	9,429	12,355	9,621	12,854	9,814	13,363	10,006
064	10,035	12,315	10,449	12,566	10,871	12,817	11,302	13,069
367	9,882	12,625	10,289	12,883	10,705	13,141	11,129	13,398
268	8,681	15,586	9,039	15,904	9,404	16,222	9,776	16,541
850	7,640	19,243	7,955	19,635	8,276	20,028	8,604	20,420
986	6,968	22,444	7,255	22,902	7,548	23,360	7,847	23,818
808	6,817	23,283	7,098	23,758	7,385	24,233	7,677	24,709
143	6,151	27,708	6,405	28,274	6,663	28,839	6,927	29,405
856	5,601	32,520	5,832	33,183	6,068	33,847	6,308	34,511
353	5,361	35,069	5,582	35,785	5,808	36,501	6,037	37,216
945	5,140	37,715	5,352	38,485	5,568	39,255	5,789	40,024
112	4,748	43,296	4,944	44,179	5,144	45,063	5,347	45,946
255	4,411	49,260	4,592	50,266	4,778	51,271	4,968	52,276
169	4,349	50,500	4,528	51,530	4,711	52,561	4,898	53,591
475	4,118	55,610	4,288	56,745	4,461	57,880	4,638	59,015
073	3,861	62,345	4,020	63,617	4,183	64,889	4,348	66,162
947	3,634	69,465	3,784	70,882	3,937	72,300	4,092	73,718
398	3,432	76,969	3,573	78,540	3,718	80,111	3,865	81,682
127	3,251	84,859	3,385	86,590	3,521	88,322	3,661	90,054
945	3,151	89,777	3,281	91,609	3,413	93,441	3,548	95,273
132	3,088	93,133	3,215	95,033	3,345	96,934	3,477	98,835
714	2,940	101,791	3,061	103,869	3,185	105,946	3,311	108,024
074	2,806	110,836	2,922	113,098	3,040	115,360	3,160	117,621
410	2,683	120,264	2,794	122,719	2,907	125,173	3,022	127,628
23	2,571	130,078	2,677	132,733	2,785	135,388	2,895	138,042
14	2,467	140,277	2,569	143,139	2,673	146,002	2,779	148,865
781	2,372	150,860	2,470	153,938	2,570	157,017	2,671	160,096
625	2,284	161,828	2,378	165,130	2,474	168,433	2,572	171,736
046	2,201	173,180	2,292	176,715	2,385	180,249	2,479	183,784	
45	2,125	184,919	2,213	188,692	2,302	192,466	2,393	196,240
020	2,054	197,041	2,138	201,062	2,225	205,083	2,313	209,105
099	2,020	203,247	2,103	207,395	2,188	211,543	2,275	215,691
072	1,987	209,549	2,069	213,825	2,153	218,102	2,238	222,378
001	1,925	222,441	2,004	226,981	2,085	231,521	2,167	236,060
008	1,866	235,719	1,943	240,529	2,021	245,340	2,101	250,150
91	1,811	249,380	1,885	254,470	1,961	259,559	2,039	264,648
051	1,759	263,427	1,831	268,803	1,905	274,179	1,980	279,555
88	1,709	277,859	1,780	283,529	1,852	289,200	1,925	294,870
02	1,663	292,675	1,731	298,648	1,801	304,621	1,873	310,594
94	1,619	307,877	1,686	314,160	1,754	320,443	1,823	326,726
62	1,577	323,463	1,642	330,065	1,708	336,666	1,776	343,268
08	1,537	339,435	1,601	346,363	1,665	353,290	1,731	360,217
30	1,500	355,791	1,561	363,053	1,624	370,314	1,689	377,575
27	1,464	372,530	1,524	380,133	1,586	387,736	1,648	395,338
03	1,429	389,655	1,488	397,608	1,548	405,560	1,610	413,512
58	1,397	407,168	1,454	415,478	1,513	423,788	1,573	432,097
38	1,365	425,063	1,422	433,738	1,479	442,413	1,538	451,087
04	1,336	443,342	1,391	452,390	1,447	461,438	1,504	470,486
80	1,307	462,009	1,361	471,438	1,416	480,867	1,472	490,295
40	1,279	481,058	1,332	490,875	1,386	500,693	1,441	510,510
99	1,158	582,078	1,206	593,958	1,255	605,837	1,304	617,716
86	1,058	692 723	1,101	706,860	1,146	720,997	1,191	735,134
97	0,973,2	812,989	1,013	829,580	1,054	846,172	1,096	862,763
30	0,901,2	942,372	0,938,4	962,115	0,976,3	981,357	1,015	1,001
	0,839,2	1,082	0,873,8	1,104	0,909,1	1,127	0,945,1	1,149
	0,785,1	1,232	0,817,5	1,257	0,850,5	1,282	0,884,2	1,307
	0,737,6	1,390	0,768,0	1,419	0,799,0	1,447	0,830,6	1,475
	0,695,5	1,559	0,724,1	1,590	0,753,4	1,622	0,783,2	1,654
	0,657,9	1,737	0,685,0	1,772	0,712,7	1,807	0,740,9	1,843
	0,624,2	1,924	0,649,9	1,964	0,676,2	2,003	0,703,0	2,042

TUYAUX NEUFS.		2 MÈTRES 65 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 70 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 75 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRE
DIAMÈTRES.	SECTIONS.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGE par 100 mè
mèt		mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.
0,01	0,000,079	252,95	0,208	262,59	0 212	272,40	0,216	282,40
0,02	0,000,314	81,040	0,833	84,127	0,848	87,271	0,864	90,47
0,027	0,000,573	51,304	1,517	53,258	1,546	55,249	1,575	57,27
0,03	0,000,707	43,929	1,873	45,603	1,909	47,307	1,944	49,0
0,04	0,001,257	29,161	3,330	30,272	3,393	31,403	3,456	32,5
0,05	0,001,964	21,511	5,203	22,331	5,301	23,165	5,400	24,01
0,054	0,002,290	19,419	6,069	20,159	6,184	20,913	6,298	21,68
0,06	0,002,827	16,917	7,493	17,561	7,634	18,217	7,775	18,88
0,07	0,003,848	13,882	10,198	14,410	10,391	14,949	10,583	15,4
0,08	0,005,027	11,741	13,320	12,188	13,572	12,644	13,823	13,1
0,081	0,005,153	11,561	13,656	12,001	13,913	12,450	14,171	12,9
0,09	0,006,362	10,156	16,859	10,543	17,177	10,937	17,495	11,3
0,10	0,007,854	8,938	20,813	9,279	21,206	9,626	21,599	9,9
0,108	0,009,161	8,152	24,276	8,462	24,734	8,778	25,192	9,1
0,11	0,009,503	7,976	25,184	8,279	25,659	8,589	26,134	8,9
0,12	0,011,310	7,196	29,970	7,470	30,536	7,749	31,101	8,0
0,13	0,013,273	6,553	35,175	6,803	35,838	7,057	36,502	7,3
0,135	0,014,314	6,272	37,932	6,511	38,648	6,754	39,364	7,0
0,14	0,015,394	6,014	40,794	6,243	41,563	6,476	42,333	6,7
0,15	0,017,672	5,555	46,830	5,767	47,713	5,982	48,597	6,2
0,16	0,020,106	5,161	53,281	5,357	54,287	5,557	55,292	5,7
0,162	0,020,612	5,088	54,622	5,282	55,652	5,479	56,683	5,6
0,17	0,022,698	4,818	60,150	5,001	61,285	5,188	62,420	5,3
0,18	0,025,447	4,517	67,434	4,689	68,707	4,864	69,979	5,0
0,19	0,028,353	4,251	75,136	4,413	76,553	4,578	77,971	4,7
0,20	0,031,416	4,015	83,253	4,168	84,823	4,324	86,394	4,4
0,21	0,034,636	3,803	91,786	3,948	93,518	4,095	95,250	4,2
0,216	0,036,644	3,686	97,105	3,827	98,938	3,970	100,770	4,
0,22	0,038,013	3,612	100,736	3,750	102,636	3,890	104,537	4,0
0,23	0,041,548	3,440	110,101	3,571	112,179	3,704	114,256	3,
0,24	0,045,239	3,283	119,883	3,408	122,145	3,535	124,407	3,
0,25	0,049,088	3,139	130,082	3,259	132,536	3,381	134,990	3,
0,26	0,053,093	3,008	140,697	3,122	143,351	3,239	146,006	3,
0,27	0,057,256	2,887	151,728	2,997	154,590	3,109	157,453	3,
0,28	0,061,575	2,775	163,175	2,881	166,254	2,988	169,333	3,
0,29	0,066,052	2,672	175,039	2,773	178,341	2,877	181,644	2,
0,30	0,070,686	2,576	187,318	2,674	190,852	2,774	194,386	2,
0,31	0,075,477	2,486	200,014	2,581	203,788	2,677	207,562	2
0,32	0,080,425	2,403	213,126	2,494	217,147	2,588	221,168	2
0,325	0,082,958	2,363	219,839	2,453	223,986	2,545	228,134	2
0,33	0,085,530	2,325	226,655	2,413	230,931	2,504	235,208	2
0,34	0,090,792	2,252	240,600	2,337	245,139	2,425	249,679	2
0,35	0,096,212	2,183	254,961	2,266	259,771	2,351	264,582	2
0,36	0,101,788	2,118	269,737	2,199	274,827	2,281	279,916	2
0,37	0,107,521	2,057	284,931	2,136	290,307	2,216	295,683	2
0,38	0,113,412	2,000	300,541	2,076	306,212	2,154	311,883	2
0,39	0,119,459	1,945	316,567	2,019	322,540	2,095	328,513	2
0,40	0,125,664	1,894	333,009	1,966	339,293	2,039	345,576	2
0,41	0,132,026	1,845	349,869	1,915	356,470	1,987	363,071	1
0,42	0,138,545	1,799	367,144	1,867	374,072	1,937	380,999	1
0,43	0,145,221	1,754	384,836	1,821	392,097	1,889	399,358	1
0,44	0,152,053	1,712	402,941	1,778	410,543	1,844	418,146	1
0,45	0,159,043	1,672	421,464	1,736	429,416	1,801	437,368	
0,46	0,166,191	1,634	440,407	1,696	448,716	1,760	457,026	
0,47	0,173,495	1,597	459,762	1,658	468,437	1,720	477,112	
0,48	0,180,956	1,562	479,534	1,622	488,581	1,683	497,629	
0,49	0,188,575	1,529	499,724	1,587	509,153	1,647	518,582	
0,50	0,196,350	1,497	520,328	1,554	530,145	1,612	539,963	
0,55	0,237,583	1,355	629,595	1,406	641,474	1,459	653,353	
0,60	0,282,744	1,237	749,271	1,284	763,409	1,332	777,546	
0,65	0,331,832	1,139	879,355	1,182	895,946	1,226	912,538	
0,70	0,384,846	1,054	1,020	1,095	1,039	1,135	1,058	
0,75	0,441,788	0,981,8	1,171	1,019	1,193	1,057	1,215	
0,80	0,502,656	0,918,5	1,332	0,953,5	1,357	0,989,1	1,382	
0,85	0,567,451	0,862,9	1,504	0,895,8	1,532	0,929,2	1,560	
0,90	0,636,174	0,813,6	1,686	0,844,6	1,718	0,876,2	1,749	
0,95	0,708,823	0,769,7	1,878	0,799,0	1,914	0,828,9	1,949	
1,00	0,785,400	0,730,3	2,081	0,758,1	2,121	0,786,4	2,160	

SES.

ÈTRES.	2 MÈTRES 85 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 90 CENTIMÈTRES.		2 MÈTRES 95 CENTIMÈTRES.		3 MÈTRES.	
UMES ités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.	CHARGES par 100 mètres.	VOLUMES débités.
t.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.	mèt.	lit.
,220	292,57	0,224	302,93	0,228	313,46	0,232	324,18	0,236
,880	93,734	0,895	97,051	0,911	100,42	0,927	103,86	0,942
,603	59,340	1,632	61,440	1,660	63,577	1,689	65,751	1,718
,979	50,811	2,015	52,609	2,050	54,439	2,085	56,300	2,121
,519	33,729	3,581	34,923	3,644	36,137	3,707	37,373	3,770
,498	24,881	5,596	25,762	5,694	26,658	5,792	27,569	5,891
413	22,461	6,527	23,256	6,642	24,065	6,756	24,888	6,871
917	19,566	8,058	20,259	8,200	20,963	8,341	21,680	8,482
,776	16,056	10,968	16,624	11,161	17,203	11,353	17,791	11,545
,074	13,580	14,325	14,060	14,577	14,549	14,828	15,047	15,080
,428	13,372	14,686	13,845	14,944	14,327	15,202	14,817	15,459
,813	11,747	18,131	12,162	18,449	12,585	18,767	13,016	19,085
,991	10,338	22,384	10,704	22,777	11,077	23,170	11,455	23,562
651	9,428	26,109	9,762	26,567	10,102	27,025	10,447	27,483
609	9,225	27,084	9,551	27,560	9,884	28,035	10,221	28,510
667	8,323	32,232	8,618	32,798	8,918	33,363	9,222	33,929
165	7,579	37,829	7,848	38,492	8,121	39,156	8,398	39,820
079	7,254	40,795	7,511	41,520	7,772	42,236	8,038	42,942
103	6,956	43,873	7,202	44,642	7,452	45,412	7,707	46,182
480	6,425	50,364	6,653	51,247	6,884	52,131	7,119	53,015
297	5,969	57,302	6,180	58,308	6,395	59,313	6,614	60,319
714	5,885	58,745	6,093	59,775	6,305	60,806	6,521	61,836
555	5,572	64,690	5,770	65,824	5,970	66,959	6,174	68,094
252	5,225	72,524	5,409	73,796	5,598	75,068	5,789	76,341
388	4,917	80,806	5,091	82,223	5,268	83,641	5,448	85,059
965	4,644	89,536	4,808	91,106	4,975	92,677	5,145	94,248
981	4,399	98,713	4,554	100,445	4,713	102,177	4,874	103,908
602	4,264	104,434	4,415	106,267	4,568	108,099	4,724	109,931
437	4,178	108,338	4,326	110,239	4,476	112,140	4,629	114,040
333	3,978	118,410	4,119	120,488	4,262	122,565	4,408	124,643
669	3,797	128,931	3,931	131,193	4,068	133,455	4,207	135,717
445	3,631	139,899	3,759	142,354	3,890	144,808	4,023	147,263
661	3,479	151,316	3,602	153,970	3,727	156,625	3,855	159,279
316	3,339	163,179	3,457	166,042	3,577	168,905	3,700	171,767
411	3,210	175,490	3,323	178,569	3,439	181,648	3,556	184,726
946	3,090	188,249	3,199	191,551	3,311	194,854	3,424	198,156
921	2,979	201,455	3,084	204,989	3,192	208,523	3,301	212,058
335	2,876	215,109	2,977	218,883	3,081	222,657	3,186	226,431
190	2,779	229,211	2,878	233,232	2,978	237,253	3,079	241,275
282	2,733	236,430	2,830	240,578	2,928	244,726	3,029	248,874
484	2,689	243,761	2,784	248,037	2,881	252,314	2,979	256,590
218	2,604	258,758	2,696	263,297	2,790	267,837	2,886	272,377
392	2,525	274,203	2,614	279,013	2,705	283,824	2,798	288,635
006	2,450	290,005	2,537	295,185	2,625	300,274	2,715	305,364
059	2,380	306,435	2,464	311,812	2,550	317,188	2,637	322,564
553	2,313	323,224	2,395	328,894	2,478	334,565	2,563	340,235
486	2,250	340,459	2,330	346,432	2,411	352,405	2,493	358,378
859	2,190	358,142	2,268	364,426	2,347	370,709	2,427	376,992
673	2,134	376,274	2,209	382,875	2,286	389,476	2,364	396,078
926	2,080	394,853	2,154	401,781	2,229	408,708	2,305	415,635
619	2,020	413,880	2,101	421,141	2,174	428,402	2,248	435,663
748	1,980	433,351	2,051	440,954	2,122	448,557	2,194	456,159
320	1,934	453,272	2,003	461,225	2,072	469,177	2,143	477,129
335	1,890	473,645	1,957	481,954	2,025	490,264	2,094	498,573
786	1,848	494,461	1,913	503,136	1,980	511,811	2,047	520,485
677	1,807	515,725	1,871	524,772	1,936	533,820	2,002	542,868
010	1,768	537,439	1,831	546,868	1,895	556,297	1,959	565,725
780	1,731	559,598	1,793	569,415	1,855	579,233	1,918	589,050
232	1,567	677,111	1,623	688,991	1,679	700,870	1,736	712,749
683	1,431	805,820	1,482	819,958	1,533	834,095	1,586	848,232
130	1,317	945,722	1,364	962,313	1,411	978,905	1,459	995,496
	1,220	1,097	1,263	1,116	1,307	1,135	1,351	1,155
	1,136	1,259	1,176	1,281	1,217	1,303	1,258	1,325
	1,062	1,433	1,100	1,458	1,138	1,483	1,177	1,508
	0,998,1	1,617	1,033	1,646	1,069	1,674	1,106	1,702
	0,941,1	1,813	0,974,4	1,845	1,008	1,877	1,043	1,909
	0,890,3	2,020	0,921,8	2,056	0,953,8	2,091	0,986,4	2,126
	0,844,6	2,238	0,874,5	2,278	0,905,0	2,317	0,935,9	2,356

MÉMOIRE

SUR LA CRISTALLISATION

ET LA STRUCTURE INTÉRIEURE DU QUARTZ,

PAR M. DESCLOIZEAUX.

Ce mémoire a été présenté à l'Académie des sciences le 30 avril 1855, et son insertion dans le Recueil des savants étrangers a été votée par l'Académie dans la séance du 21 mai suivant, sur le rapport présenté par M. de Senarmont, au nom d'une commission composée de MM. Biot, Dufrénoy et de Senarmont.

Depuis cette époque, j'ai saisi toutes les occasions qui se sont présentées de compléter mon travail primitif, et j'ai pu y ajouter un certain nombre de faits nouveaux.

Après beaucoup de tâtonnements et d'essais infructueux pour arriver à une reproduction durable des images photographiées que j'avais eu l'honneur de mettre sous les yeux de l'Académie, et qui représentaient la plupart des phénomènes que m'ont fournis les diverses variétés de quartz vues dans la lumière polarisée, j'ai dû m'arrêter au procédé de MM. Salmon et Garnier, de Chartres, comme étant celui qui offrait le plus de chances de réussite.

Ce procédé permet d'obtenir, *sans retouches*, à l'aide d'épreuves positives sur verre, produites avec les clichés originaux, une planche métallique gravée en creux, dont le tirage s'effectue par les moyens ordinaires de la taille-douce. Malheureusement, on n'est pas encore parvenu à conserver à cette gravure héliographique, la délicatesse et la finesse de la photographie, mais on

peut au moins répondre de l'exactitude rigoureuse de tous les détails qui ont été suffisamment impressionnés par la lumière, pour venir se peindre sur la plaque de métal convenablement préparée.

C'est en examinant des cristaux de quartz de la vallée de Conches et d'autres points du haut Valais, présentant des modifications entièrement nouvelles, que j'ai été amené à entreprendre les recherches qui font l'objet de mon mémoire.

Les observations sur le système cristallin du quartz, publiées en 1846 par M. G. Rose, dans les Mémoires de l'Académie royale de Berlin[1], ayant déjà prouvé l'influence du gisement sur les formes dominantes des cristaux et sur leurs divers modes de groupement, j'ai pensé qu'il y aurait quelque intérêt à étudier tous les quartz cristallisés des collections publiques et privées de Paris, et j'ai été ainsi peu à peu entraîné à faire une sorte de monographie de ce minéral, qui m'a demandé beaucoup plus de temps que je ne l'avais supposé d'abord.

Les matériaux nécessaires à ce long travail m'ont été fournis par les collections du Muséum d'histoire naturelle, de l'École impériale des Mines, de la Sorbonne, du Collége de France, et par celles de MM. le duc de Luynes, Adam et Damour; qu'il me soit permis d'adresser ici mes sincères remercîments aux éminents professeurs placés à la tête de ces diverses collections et aux savants minéralogistes que je viens de nommer, pour l'extrême bienveillance avec laquelle chacun a mis ses échantillons à ma disposition.

De mon côté, j'avais rassemblé tout ce que j'avais pu me procurer d'intéressant tant à Paris qu'à Londres et en Suisse, de sorte que j'ai eu à examiner un très-grand nombre de cristaux de provenances très-diverses.

M. Rose s'étant attaché, dans son Mémoire, à décrire avec le plus grand soin les accolements et les enchevêtrements à axes à peu près parallèles, qu'on trouve dans les localités les plus con-

[1] *Ueber das Krystallisations-System des Quarzes;* mémoire lu à l'Académie des sciences de Berlin, le 25 avril 1844, par M. G. Rose.

nues, je n'avais pas à m'en occuper au même point de vue; mon but principal, dans l'examen des cristaux composés que j'ai rencontrés, a été de rechercher si leurs axes étaient rigoureusement parallèles, et surtout de voir s'il existait quelque relation simple entre les divers accidents de leur enveloppe extérieure et leur structure intérieure. En suivant les travaux de M. Soleil, depuis la construction de son saccharimètre et de ses compensateurs de quartz, j'avais appris que les enchevêtrements d'individus, à axes le plus souvent parallèles, constituaient l'état normal de la plupart des cristaux de ce minéral, même lorsque ces cristaux semblaient annoncer une structure homogène : je savais donc déjà que rien n'est plus rare qu'un échantillon assez pur dans toute son étendue pour résister aux épreuves si délicates de la polarisation.

Pour parvenir à la solution de la question que je m'étais posée, j'ai d'abord déterminé avec soin la forme et les accidents extérieurs d'un assez grand nombre de cristaux, dont les opticiens n'avaient jamais songé à tirer parti à cause de leurs petites dimensions; puis j'en ai fait tailler, par un habile praticien, des plaques perpendiculaires à l'axe, que j'ai examinées au moyen du microscope polarisant d'Amici. Comme il est impossible de reproduire fidèlement par le dessin les phénomènes très-complexes qu'on observe par ce procédé, ou à l'aide de tout autre instrument convenablement disposé, j'ai essayé de photographier ceux de ces phénomènes qui se présentaient avec le plus de netteté.

Grâce au concours si intelligent de M. Dubosq, dont l'habileté est bien connue pour toutes les recherches de ce genre, et qui a organisé un appareil de polarisation éclairé par la lumière électrique et projetant ses images sur du collodion sensibilisé, je suis arrivé, dans la plupart des cas, à des résultats très-satisfaisants. Les épreuves photographiques une fois obtenues, c'est, comme je l'ai dit plus haut, par le procédé de MM. Salmon et Garnier qu'elles ont été reproduites de manière à donner une idée passablement nette des phénomènes dont j'aurai à parler.

La véritable mâcle à axes inclinés, décrite autrefois par

M. Weiss[1], d'après un seul échantillon du Dauphiné, n'a été depuis reproduite que très-imparfaitement dans les divers traités de Minéralogie; j'avais donc le plus grand désir d'examiner attentivement le petit nombre d'échantillons connus de cette très-rare variété : j'ai été assez heureux pour en rencontrer trois en Angleterre et trois à Paris, et leur étude m'a conduit à des conclusions un peu différentes de celles qu'a publiées M. Weiss.

La révision générale que j'avais entreprise m'ayant fait passer sous les yeux un très-grand nombre de cristaux des localités les plus variées, j'avais bien pensé que je trouverais quelques modifications nouvelles, mais j'étais loin de m'attendre à l'abondance des formes que j'ai observées[2].

J'ai considéré comme nouvelle toute face qui n'est citée ni dans le Mémoire de M. Rose, ni dans le Manuel si complet de Brooke et Miller[3].

C'est par la description cristallographique des diverses combinaisons formées par les modifications nouvelles que je vais commencer ce Mémoire, en renvoyant à la note placée à la fin pour l'explication des symboles employés dans la notation des faces.

Les formes dérivées du quartz peuvent se diviser, comme l'a fait M. Rose, de la manière suivante.

I. Rhomboèdres parallèles au primitif ou de premier ordre.

II. Rhomboèdres inverses au primitif ou de second ordre.

[1] *Ueber die herzförmig genannten Zwillingskrystalle von Kalkspath, und gewisse analoge von Quarz;* lu à l'Académie des sciences de Berlin le 2 novembre 1829.

[2] En ce moment (15 juin 1857) le quartz est le minéral rhomboédrique qui présente le plus grand nombre de modifications, car ce nombre s'élève à cent soixante-huit formes différentes, dont cent trente-trois nouvelles. Or, d'après un travail publié en 1856, à Turin, par M. Sella, sous le titre de *Quadro delle forme cristalline dell' argento rosso, del quarzo e del calcare,* et d'après mes propres observations, on ne connaît que cent quarante-six formes dans la chaux carbonatée, et quatre-vingt-quatre dans l'argent rouge.

[3] *An elementary Introduction to Mineralogy,* par feu W. Phillips; nouvelle édition considérablement modifiée et augmentée, par H.-J. Brooke et W.-H. Miller, professeur de minéralogie à Cambridge; Londres, 1852.

III. Face rhombe, constituant le trigonoèdre droit et le trigonoèdre gauche, qu'on peut aussi considérer comme deux hémi-isocéloèdres.

IV. Plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}$, s, e^2, ou trapézoèdres de premier ordre.

V. Plagièdres de la zone p, s, e^2, ou trapézoèdres de second ordre.

VI. Prisme hexagonal, situé sur les angles latéraux de la forme primitive, premier prisme de M. Rose.

VI *bis*. Face perpendiculaire à l'axe principal ou base du prisme hexagonal, non observée par M. Rose.

VII. Prisme hexagonal, situé sur les arêtes latérales de la forme primitive, second prisme de M. Rose.

VIII. Prismes symétriques à six ou à douze faces, sur trois arêtes alternes ou sur les six arêtes verticales du premier prisme hexagonal.

IX. Faces isolées, se rattachant par une ou par deux zones à des faces comprises dans les précédentes, et appartenant à des isocéloèdres et à des hémiscalénoèdres.

Avant de passer à la description de chaque forme en particulier, je ferai remarquer que les faces nouvelles n'ont pas pu se déterminer toutes avec le même degré d'exactitude, et que plusieurs d'entre elles ont encore une existence assez problématique. Parmi celles qui me paraissent assurées, il en est dont le symbole n'a été calculé qu'au moyen de leurs incidences trouvées constantes sur un certain nombre d'échantillons, ou tellement nettes qu'elles ne laissaient aucune incertitude sur leur véritable valeur; d'autres, dont les signes paraissent d'abord très-compliqués, font partie de zones assez bien déterminées pour ne pas permettre de choisir une notation plus simple que celle qui a été adoptée.

Comme on le verra plus loin, lorsque des incidences ne sont pas parfaitement sûres, on peut souvent hésiter, pour le signe cristallographique d'une face, entre deux relations plus ou moins

voisines et quelquefois également simples : dans ces cas douteux j'ai, en général, adopté le symbole qui offrait à la fois le plus de simplicité dans les deux systèmes rhomboïdal et hexagonal.

Lorsque j'ai rencontré, sur des cristaux non groupés, des rhomboèdres parallèles et inverses au primitif, d'angles très-rapprochés, je les ai considérés comme exactement inverses l'un de l'autre, et la mesure la plus nette a servi à la détermination de leurs symboles respectifs.

Il en a été de même des plagièdres des zones $e^{\frac{1}{2}}$, s, e^2, et p, s, e^2; ceux dont les incidences différaient très-peu ont été regardés comme rigoureusement inverses dans chaque zone, et le signe de l'un a été quelquefois employé pour simplifier ou pour assurer le signe de l'autre.

Le tableau des mesures d'angles fera voir que le quartz possède un assez grand nombre de ces faces de même angle, mais de position inverse, dont la réunion formerait sur le rhomboèdre des pseudo-isocéloèdres ou des hémiscalénoèdres.

Les cristaux qui m'ont offert le plus grand nombre de modifications nouvelles, sont ceux qui accompagnent le *mésitinspath*, la *pyrite* et le *fer oxydulé* de Traverselle, en Piémont. La plupart de ces modifications sont des plagièdres supérieurs des deux zones $e^{\frac{1}{2}}$, s, e^2 et p, s, e^2, qui existent souvent à la fois sur deux angles solides situés à droite et à gauche de l'observateur : leur direction ne paraît donc nullement en rapport avec le sens de la rotation, comme j'aurai occasion de l'expliquer plus loin.

Les faces des cristaux de Traverselle étant généralement petites ou arrondies, j'en ai mesuré plus d'une centaine, et j'ai pris des moyennes sur quatre-vingt-deux des plus nets, afin d'éliminer autant que possible les erreurs d'observation qui auraient pu influer sur la détermination du symbole de ces faces.

Les cristaux extraits du marbre de Carrare présentent aussi beaucoup d'intérêt; grâce à l'obligeance de M. le duc de Luynes, j'ai pu en examiner un très-grand nombre, et j'ai trouvé qu'ils

sont loin d'être aussi simples que MM. Rose et Haidinger l'avaient supposé. Beaucoup d'entre eux sont enchevêtrés ou hémitropes, et la plupart portent le second prisme hexagonal d^1 et un hémiprisme dodécagone sur trois arêtes alternes du premier prisme e^2.

Les échantillons du Brésil, employés par les opticiens à cause de la grosseur et de la pureté de quelques-uns d'entre eux, méritent encore un examen attentif; car les faces du prisme hexagonal e^2 y sont presque toujours remplacées par des rhomboèdres excessivement aigus, qui donnent naissance à des zones toutes particulières, dans lesquelles j'ai trouvé plusieurs faces à notation compliquée.

En décrivant successivement toutes les formes que j'ai observées, j'aurai soin de citer les particularités que chacune m'a présentées.

I. — RHOMBOÈDRES PARALLÈLES AU PRIMITIF.

On connaissait jusqu'ici sept rhomboèdres de cette première catégorie, qu'on peut désigner simplement sous le nom de *rhomboèdres directs;* ces sept rhomboèdres sont les suivants.

Signe rhomboédrique de Lévy.	Signe hexagonal de Lévy; la hauteur du prisme est le tiers de l'axe vertical du rhomboèdre, et $b = \frac{h \cot \frac{p}{a^1}}{\sin 60^\circ}$ [1].
a^4	b^2 homoèdre.
e	$b^{\frac{2}{3}}$ homoèdre.
e^5	$b^{\frac{1}{2}}$ homoèdre.
$e^{\frac{2}{3}}$	$b^{\frac{1}{3}}$ homoèdre?
e^3	$b^{\frac{1}{4}}$ homoèdre.
$e^{\frac{5}{7}}$	$b^{\frac{2}{11}}$ hémièdre.
$e^{\frac{11}{5}}$	$b^{\frac{1}{5}}$ homoèdre.

[1] Si l'on fait le côté $b = 1000$, la hauteur devient $h = \frac{1000 \sin 60^\circ}{\cot \frac{p}{a^1}}$

Les seuls dont on avait reconnu les inverses sont :

a^4 ayant pour inverse b^1.

e^5 ——————— e^1.

J'ai, de plus rencontré les inverses des rhomboèdres $e^{\frac{5}{3}}$, $e^{\frac{3}{2}}$, e^2, $e^{\frac{11}{5}}$.

Voici, en outre, les vingt et un nouveaux rhomboèdres directs que j'ai observés.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
a^7 ou $a^{\frac{15}{2}}$	$b^{\frac{3}{2}}$ ou $b^{\frac{19}{13}}$ hémièdre.
e^{22}	$b^{\frac{10}{11}}$ hémièdre.
e^{26}	$b^{\frac{5}{9}}$ homoèdre?
?? e^{27}	$b^{\frac{7}{8}}$ hémièdre.
?? e	$b^{\frac{6}{7}}$ hémièdre.
e^{17}	$b^{\frac{5}{6}}$ homoèdre?
? e^{15}	$b^{\frac{13}{16}}$ hémièdre.
e^{14}	$b^{\frac{4}{5}}$ homoèdre.
? e^{12}	$b^{\frac{10}{13}}$ hémièdre.
e^{11}	$b^{\frac{3}{4}}$ homoèdre.
? e^{10}	$b^{\frac{8}{21}}$ hémièdre.
e^8	$b^{\frac{7}{3}}$ homoèdre.
? $e^{\frac{14}{3}}$	$b^{\frac{7}{13}}$ homoèdre?
?? $e^{\frac{21}{5}}$	$b^{\frac{11}{26}}$ hémièdre.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.	
	ou	
? $e^{\frac{17}{6}}$	$b^{\frac{5}{7}}$	homoèdre?
?? $e^{\frac{29}{10}}$	$b^{\frac{3}{14}}$	hémièdre.
? $e^{\frac{31}{11}}$	$b^{\frac{3}{16}}$	homoèdre.
$e^{\frac{11}{4}}$	$b^{\frac{1}{5}}$	homoèdre.
?? $e^{\frac{5}{2}}$	$b^{\frac{1}{7}}$	homoèdre.
	ou	
? $e^{\frac{17}{7}}$	$b^{\frac{1}{8}}$	homoèdre.
e	$b^{\frac{1}{10}}$	homoèdre?
$e^{\frac{2}{3}}$	$b^{\frac{1}{13}}$	hémièdre.
? $e^{\frac{11}{5}}$	$b^{\frac{1}{16}}$	hémièdre.
	ou	
? $e^{\frac{13}{6}}$	$b^{\frac{1}{19}}$	hémièdre.
$e^{\frac{31}{15}}$	$b^{\frac{1}{46}}$	hémièdre.

J'ai fait précéder de deux ?? les faces qui me paraissent douteuses, et d'un seul ? celles qui sont probables; les autres sont certaines.

On remarquera que toutes les faces certaines et probables ont un signe hexagonal généralement fort simple, et que la plupart ont leurs inverses; quant aux faces douteuses, leur signe hexagonal paraît plus compliqué.

Pour qu'on puisse bien se rendre compte de la position des diverses modifications du quartz, j'ai joint à mon mémoire deux planches de dessins copiés d'après nature sur les cristaux que j'ai eus entre les mains. Afin de ne pas trop compliquer ces dessins, je n'ai fait tracer que le trait indiquant la partie antérieure du cristal, et, lorsque cela était nécessaire, j'ai réuni

sous une accolade deux figures qui représentent, l'une la partie antérieure, et l'autre la partie postérieure du même échantillon. Une autre planche contient la projection sphérique de toutes les faces connues jusqu'ici dans le quartz, avec les zones principales dans lesquelles on les rencontre. La planche III est destinée à donner l'explication théorique des pénétrations en apparence si variées, et pourtant soumises à des lois si simples, qu'on rencontre dans les cristaux du Brésil et dans les améthystes. Enfin la planche V est la reproduction des photographies dont j'ai parlé plus haut.

a^7. On n'avait cité jusqu'à présent, comme rhomboèdre direct situé sur l'angle culminant de la forme primitive, qu'une face arrondie, ayant pour symbole a^4, inverse du rhomboèdre b^1, dont les plans sont au contraire parfois assez nets. Le cristal fig. 23, pl. I, porte au-dessus des deux faces p et d opposées une troncature facilement déterminable, dont l'inclinaison sur p se rapproche beaucoup de celle que donnerait a^7; le signe $a^{\frac{15}{2}}$ fournirait un nombre encore plus voisin de celui que j'ai observé; mais comme l'échantillon ne permet pas une mesure tout à fait rigoureuse, et que d'ailleurs le signe hexagonal correspondant à $a^{\frac{15}{2}}$ n'est guère admissible, a^7 est la seule notation simple qui puisse être assignée à ce nouveau rhomboèdre.

e^{32} a été observé sur onze cristaux de Traverselle; il est brillant, mais un peu arrondi; la moyenne de vingt-deux mesures a donné pour l'inclinaison sur le primitif p le nombre 177° 26′.

e^{26} est le rhomboèdre obtus le plus commun sur les cristaux de Traverselle; la moyenne de trente-trois mesures, prises sur vingt-deux échantillons a donné 176° 34′; mais comme les faces de ce rhomboèdre sont assez souvent unies et miroitantes, on a trouvé plusieurs fois 176° 45′, qui ne diffère que d'une minute de l'angle calculé.

?? e^{23} n'a été trouvé que sur quatre cristaux de Traverselle; la moyenne de sept mesures a fourni 176° 6′; cette face étant un

peu arrondie, il n'est pas certain qu'elle ne puisse pas se confondre avec e^{26}.

? e^{20} a été observé sur six cristaux de Traverselle, et la moyenne de six mesures est de 175° 42′, nombre très-voisin de l'angle calculé; cependant, comme cette face est aussi arrondie, elle doit peut-être se confondre avec la suivante.

e^{17}, observé sur douze cristaux de Traverselle, a fourni comme moyenne de dix-huit mesures 175° 9′, nombre très-voisin de l'incidence calculée.

? e^{15}, trouvé sur neuf cristaux de Traverselle et sur une améthyste du Brésil, offre des faces brillantes mais arrondies; peut-être ce rhomboèdre se confond-il avec le précédent ou avec le suivant : la moyenne de dix mesures est égale à 174° 31′.

e^{14}, très-habituel aux cristaux de Traverselle, a été vu sur vingt-deux de ces cristaux; il est souvent assez uni, et la grande majorité des incidences mesurées a donné 174 degrés; la moyenne générale de quarante et une observations est de 173° 52′.

? e^{12} n'a été rencontré que sur sept cristaux de Traverselle et sur quelques cristaux d'améthyste, mais la valeur de son inclinaison sur p a été presque constamment de 173 degrés. La moyenne de sept mesures est égale à 173° 1′; peut-être doit-on réellement distinguer cette face de la précédente.

e^{11}, observé sur onze cristaux de Traverselle, est une des faces dont l'angle a le moins varié; la moyenne de vingt-trois mesures est de 172° 24′, nombre très-rapproché du calcul.

? e^{10}, observé seulement sur trois cristaux de Traverselle et sur quelques gros cristaux du Brésil, offre, pour la probabilité de son admission, des incidences assez constantes, et une moyenne de quatre mesures égale à 171° 35′, nombre identique à celui que fournit le calcul.

e^{8} a été trouvé sur deux cristaux de Traverselle, sur un gros cristal du Brésil, et sur un petit cristal d'Ala, de la collection du Muséum d'histoire naturelle; sa mesure est un peu incertaine, parce qu'il offre toujours des faces arrondies : la moyenne géné-

rale de six observations est de 169° 32′. Parmi les considérations qui militent en faveur de l'admission de ce rhomboèdre, il faut citer l'existence de son inverse $e^{\frac{5}{5}}$, faisant partie d'une zone qui le rend nécessaire.

? $e^{\frac{11}{2}}$, trouvé sur quatre cristaux de Traverselle, offre des faces arrondies, et un peu d'incertitude dans sa mesure; la moyenne de quatre observations est cependant de 164° 46′, nombre égal à celui que donne le calcul. Ce rhomboèdre mérite surtout d'être cité, parce que ses incidences sont notablement différentes de celles des deux rhomboèdres certains $e^{\frac{13}{2}}$ et e^{5}, entre lesquels il est compris.

?? $e^{\frac{21}{8}}$ ou $e^{\frac{17}{6}}$, rhomboèdre douteux, cité par Phillips, et que je n'ai rencontré qu'une fois, avec une mesure incertaine, sur un cristal de Viesch, en Valais; le second signe est préférable, à cause de la simplicité de son correspondant hexagonal.

?? $e^{\frac{29}{10}}$, donné par Phillips, me paraît très-douteux; je n'ai rencontré que sur deux cristaux du Valais des incidences de 152° à 152° 15′, qui se rapprochent de celle de $e^{\frac{29}{10}}$.

? $e^{\frac{31}{11}}$, rhomboèdre très-rare, observé sur un seul cristal, non mâclé, de Carrare et sur un cristal du Dauphiné; son admission est rendue probable par son incidence nette et par l'existence certaine de son inverse.

$e^{\frac{11}{4}}$, observé sur un gros cristal du Brésil, sur un cristal enfumé de Québec et sur un cristal composé du haut Valais, présente de l'incertitude dans sa mesure; mais la zone qui paraît exister sur le cristal du Valais (fig. 1, pl. I), entre ce rhomboèdre, le plagièdre x et la face verticale e^{2}, de droite, rend son existence très-probable. La moyenne générale de onze mesures donne 150° 31′ pour l'inclinaison de $e^{\frac{11}{4}}$ sur p; mais j'ai trouvé aussi 150° 41′ et 150° 45′, nombres qui se rapprochent beaucoup plus du résultat du calcul.

? $e^{\frac{5}{2}}$ ou $e^{\frac{17}{7}}$; un de ces deux rhomboèdres existe sur quelques cristaux du Brésil et du Dauphiné; chacun d'eux ayant son inverse assuré, l'un, $e^{\frac{13}{8}}$, par de nombreuses observations; l'autre, $e^{\frac{8}{3}}$, par une zone dont il fait partie; on ne peut tirer de cette considération aucune raison pour ou contre l'admission de l'un ou de l'autre symbole; les incidences ayant varié, sur divers cristaux, entre 147° et 148° 5′, et la moyenne générale de cinq mesures donnant 147° 39′, il semble qu'on doit plutôt admettre $e^{\frac{17}{7}}$, dont le signe hexagonal est d'ailleurs fort simple. Sur le cristal du Dauphiné (fig. 41, pl. II), l'observation directe des incidences et celle d'une face nouvelle, très-probablement située dans la zone s, $e^{\frac{17}{7}}$, font croire que c'est ce dernier rhomboèdre qui se montre réellement, avec de légères mouchetures produites par l'enchevêtrement de petites plages appartenant, soit à son inverse $e^{\frac{5}{3}}$, soit au rhomboèdre voisin $e^{\frac{13}{8}}$.

$e^{\frac{7}{3}}$ a été observé sur deux cristaux de Traverselle, sur un cristal de Carrare et sur quatre cristaux du Brésil, avec des incidences assez constantes; la moyenne de treize observations est de 146° 25′, nombre assez voisin de l'angle calculé.

$e^{\frac{2}{1}}$ a été trouvé sur quatre cristaux de Traverselle et sur cinq cristaux du Brésil; la moyenne de quatorze mesures assez concordantes est de 145° 16′, nombre presque identique à celui que fournit le calcul; de plus, le symbole de ce rhomboèdre est assuré par la position qu'il occupe dans la zone $x\,\Xi$, sur le cristal du Brésil représenté fig. 2, pl. I, et que je décrirai plus loin.

? $e^{\frac{11}{5}}$ ou $e^{\frac{23}{6}}$ s'est offert sur huit cristaux du Brésil; toutes les incidences mesurées, ainsi que la moyenne générale de quatorze observations, égale à 144° 2′, indiquent plutôt le second rhomboèdre que le premier; cependant, sur le cristal représenté fig. 3, pl. I, les zones x, Σ, et x, z, conduisent à des symboles hexagonaux de Σ et de z, plus simples lorsqu'au lieu de $e^{\frac{13}{6}}$ on fait

entrer dans la zone le rhomboèdre $e^{\frac{11}{5}}$. On pourra donc adopter l'un ou l'autre de ces rhomboèdres, selon qu'on regardera comme plus important de faire approcher le plus possible les incidences calculées des incidences observées, ou de n'admettre pour les formes dérivées que des symboles simples, dans le système rhomboïdal comme dans le système hexagonal[1].

$e^{\frac{31}{15}}$. La mesure directe des incidences de ce rhomboèdre ne m'aurait certainement pas paru suffisante pour le distinguer du prisme hexagonal lui-même, si je ne l'avais rencontré formant une zone bien caractérisée avec le plagièdre x et une face Σ_1, analogue à la face Σ de la figure 3, dont il vient d'être question. Les seuls échantillons qui m'aient offert $e^{\frac{31}{16}}$ sont : un cristal parfaitement limpide et sans aucune apparence extérieure de pénétrations, de localité incertaine, et un autre cristal provenant de la Gardette, en Dauphiné.

II. — RHOMBOÈDRES INVERSES AU PRIMITIF.

Les cinq rhomboèdres inverses connus jusqu'ici étaient :

Signe rhomboédrique.		Signe hexagonal.	
b^1	inverse de a^1.	b^2	homoèdre.
e^1	inverse de e^6.	$b^{\frac{1}{2}}$	homoèdre.
$e^{\frac{4}{3}}$		$b^{\frac{2}{7}}$	hémièdre.
$e^{\frac{13}{6}}$	inverse de $e^{\frac{5}{2}}$.	$b^{\frac{1}{7}}$	homoèdre?
$e^{\frac{7}{4}}$		$b^{\frac{1}{11}}$	hémièdre.

[1] Depuis la rédaction de mon Mémoire, j'ai retrouvé sur plusieurs cristaux du Brésil et du Dauphiné des mesures qui ne permettent plus de douter de l'existence de $e^{\frac{11}{5}}$.

J'ai de plus rencontré les vingt-cinq suivants :

Signe rhomboédrique.		Signe hexagonal.	
? $e^{\frac{10}{17}}$	inverse de e^{26}.	$b^{\frac{5}{9}}$	homoèdre?
? $e^{\frac{7}{11}}$	inverse de e^{17}.	$b^{\frac{5}{6}}$	homoèdre?
$e^{\frac{2}{3}}$	inverse de e^{14}.	$b^{\frac{4}{5}}$	homoèdre.
$e^{\frac{5}{7}}$	inverse de e^{11}.	$b^{\frac{2}{4}}$	homoèdre.
? $e^{\frac{3}{5}}$		$b^{\frac{3}{7}}$	hémièdre.
e^{-}		$b^{\frac{1}{2}}$	hémièdre.
$e^{\frac{4}{5}}$	inverse de e^{8}.	$b^{\frac{2}{3}}$	homoèdre.
$e^{\frac{7}{8}}$	inverse de $e^{\frac{15}{2}}$.	$b^{\frac{3}{4}}$	homoèdre.
?? $e^{\frac{14}{15}}$		$b^{\frac{16}{19}}$	hémièdre.
	ou		
?? $e^{\frac{10}{20}}$	inverse de $e^{\frac{11}{2}}$.	$b^{\frac{7}{13}}$	homoèdre?
$e^{\frac{20}{19}}$		$b^{\frac{6}{13}}$	hémièdre.
$e^{\frac{11}{10}}$	inverse de $e^{\frac{17}{4}}$.	$b^{\frac{3}{7}}$	homoèdre?
$e^{\frac{2}{7}}$		$b^{\frac{2}{5}}$	hémièdre.
$e^{\frac{5}{6}}$		$b^{\frac{4}{11}}$	hémièdre.
$e^{\frac{11}{9}}$		$b^{\frac{7}{20}}$	hémièdre.
? $e^{\frac{5}{6}}$	inverse de $e^{\frac{7}{2}}$.	$b^{\frac{1}{2}}$	homoèdre?
$e^{\frac{13}{10}}$		$b^{\frac{7}{23}}$	hémièdre.
? $e^{\frac{7}{5}}$	inverse de e^{3}.	$b^{\frac{1}{4}}$	homoèdre?
$e^{\frac{25}{17}}$	inverse de $e^{\frac{21}{11}}$.	$b^{\frac{3}{14}}$	homoèdre.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$e^{\frac{3}{2}}$ inverse de $e^{\frac{11}{9}}$.	$b^{\frac{1}{5}}$ homoèdre.
? $e^{\frac{11}{7}}$ inverse de $e^{\frac{15}{8}}$.	$b^{\frac{1}{6}}$ homoèdre?
$e^{\frac{5}{3}}$ inverse de $e^{\frac{17}{7}}$.	$b^{\frac{1}{6}}$ homoèdre.
?? $e^{\frac{19}{11}}$ inverse de $e^{\frac{7}{3}}$.	$b^{\frac{1}{10}}$ homoèdre?
$e^{\frac{11}{6}}$	$b^{\frac{1}{17}}$ hémièdre.
? $e^{\frac{23}{13}}$	$b^{\frac{1}{35}}$ hémièdre.
ou	
? $e^{\frac{27}{15}}$	$b^{\frac{1}{41}}$ hémièdre.

? $e^{\frac{19}{17}}$, inverse de e^{26}. Quelques cristaux de Traverselle offrent très-probablement cette face; cependant c'est plutôt un ensemble de caractères secondaires, qu'une raison parfaitement concluante, qui conduit à regarder une partie des modifications inclinées de 176° 45′ sur les faces du sommet, comme appartenant au rhomboèdre inverse $e^{\frac{19}{17}}$, et non au rhomboèdre direct e^{26}.

En effet, les cristaux de Traverselle et de Brosso, en Piémont, ne portent aucune des faces plagièdres inférieures au rhombe *s*, qui servent ordinairement à fixer la position des faces *p* ou $e^{\frac{1}{2}}$; on n'y rencontre que des plagièdres supérieurs au rhombe, et soit qu'on les suppose dans la zone *p*, *s*, soit qu'on les place dans la zone $e^{\frac{1}{2}}$, *s*, aucune de leurs incidences ne s'accorde avec celles de la seule face de cette espèce connue jusqu'ici et décrite par M. Rose. Il faut donc, pour déterminer la position relative des faces *p* et $e^{\frac{1}{2}}$ de la pyramide, avoir recours aux caractères nécessairement moins certains, tirés du plus ou moins de netteté des diverses faces rhomboïdales, de leur plus ou moins grande étendue relative et de quelques propriétés optiques.

Parmi ces caractères, le plus général paraît être celui qui résulte de l'aspect strié de la plupart des rhomboèdres inverses au primitif, tandis que les rhomboèdres directs ont des faces brillantes, quoique souvent arrondies.

Un autre caractère moins général que le précédent peut être fondé sur ce que les cristaux à plagièdres inférieurs ont, dans certaines localités, leurs faces primitives p presque toujours ondulées, tandis que les faces $e^{\frac{1}{2}}$ sont parfaitement unies.

Un troisième caractère, qui ne s'observe pas non plus dans toutes les localités, est la prédominance des faces p sur les faces $e^{\frac{1}{2}}$.

Enfin, les échantillons extérieurement simples, et ceux où les enchevêtrements sont évidents, ne produisent pas les mêmes phénomènes dans la lumière polarisée, comme je le dirai tout à l'heure.

En employant les caractères que je viens d'énumérer, certains cristaux de Traverselle et ceux de Brosso, dont les figures 5, 6, 7, 8 et 9, pl. I, représentent quelques spécimens, pourront être considérés comme portant le rhomboèdre direct e^{26} ou son inverse $e^{\frac{1}{17}}$, suivant qu'on donnera plus ou moins d'importance à l'un ou à l'autre de ces caractères.

Le cristal fig. 5 est celui qui semble laisser le moins de doute sur l'existence de $e^{\frac{10}{17}}$, parce qu'il offre sur une arête de la pyramide une face β, que j'ai rencontrée sur des cristaux de l'Isère, et qui a été figurée par M. Haidinger, dans le Catalogue inédit de l'ancienne collection Allan, appartenant actuellement à M. Greg; cette face, par son inclinaison très-différente sur $e^{\frac{1}{9}}$ et sur p, permet de fixer la position relative de ces deux rhomboèdres, et c'est ainsi qu'on est conduit à noter les faces de la figure 5 comme je l'ai fait. Cependant le sommet du cristal, représenté par cette figure, se compose, contrairement à l'apparence habituelle des cristaux de quartz, de trois faces $e^{\frac{1}{2}}$ ondulées ou froncées, et de

trois faces p, dont l'une est parfaitement unie et miroitante, et dont les deux autres ne portent que des traces légères de cannelures et d'ondulations. Il est vrai qu'il ne faut pas donner une trop grande valeur au second caractère tiré de la plus ou moins grande netteté des faces, car on trouve quelquefois des cristaux simples du Valais ou du Dauphiné portant des plagièdres ou des rhomboèdres subordonnés, au moyen desquels on peut fixer la position relative des faces de leur sommet, et dont les faces $e^{\frac{1}{2}}$, parsemées de petites saillies en forme de triangles sphériques isocèles, ont perdu leur netteté habituelle. Les figures 13 et 14, représentant deux cristaux de Brosso, l'un d'apparence simple, l'autre évidemment composé, montrent aussi que les faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ peuvent offrir à la fois les trois lignes faiblement saillantes qui dans les cristaux de cette localité empêchent en général les faces primitives p d'être rigoureusement planes. Quant au premier caractère secondaire dont j'ai parlé plus haut, et qui paraît tout à fait général, il se trouverait lui-même ici en défaut, car les faces notées $e^{\frac{10}{17}}$ ne portent pas les stries habituelles aux rhomboèdres inverses; elles sont seulement faiblement granulées, mais suffisamment unies et miroitantes pour que l'une d'elles fournisse une incidence fort nette de 176° 47′ avec la face $e^{\frac{1}{2}}$ correspondante.

Le troisième caractère tiré de la prédominence de p sur $e^{\frac{1}{2}}$ est observé sur la figure 5; mais, comme je l'ai déjà dit, ce caractère est loin d'être général, et on ne doit lui attribuer qu'une importance très-secondaire.

Quant à la structure intérieure du cristal fig. 5, telle qu'on la voit au microscope polarisant d'Amici, elle est assez fidèlement représentée par la figure 1, pl. V, reproduite d'après une photographie; la seule chose que j'aie besoin de faire remarquer pour le moment, c'est que le centre de cette figure est occupé par trois secteurs de 120 degrés, séparés par des lignes qui vont aboutir au milieu des trois côtés de l'hexagone au-dessus desquels sont

les faces que j'ai notées $e^{\frac{1}{2}}$; la plaque qui a produit cette image étant coupée perpendiculairement à l'axe du cristal, ces secteurs peuvent être considérés géométriquement comme la projection sur le plan de la section des trois faces primitives p.

Or les figures 3 et 4, pl. V, nous montrent que les plaques extraites de cristaux à enchevêtrements visibles offrent, au lieu de trois secteurs de 120 degrés, six triangles dont les sommets se réunissent au centre, et dont les bases s'appuient plus ou moins régulièrement sur les six côtés de la coupe hexagonale.

On expliquerait peut-être sur le cristal fig. 5 l'existence du rhomboèdre direct e^{20} au lieu de son inverse $e^{\frac{20}{17}}$, en supposant que les faces $e^{\frac{1}{2}}$ et p sont celles que j'ai au contraire notées p et $e^{\frac{1}{2}}$; il faudrait alors admettre que la face β, trouvée sur d'autres cristaux où l'on peut distinguer les faces p des faces $e^{\frac{1}{2}}$ (fig. 61, pl. II et 76, pl. III), n'est pas hémièdre, et que sa plus grande inclinaison peut se présenter tantôt sur $e^{\frac{1}{2}}$, tantôt sur p ; il faudrait de plus que, contrairement à ce qui s'observe dans la plupart des cristaux de quartz, où les strates d'accroissement et les ondulations du sommet se dessinent presque toujours sur les faces p, les trois pentagones de la figure 1, pl. V, représentassent la projection des faces $e^{\frac{1}{2}}$, et non celles des faces p. Ce fait, que rien n'est venu confirmer, ne paraît pourtant pas impossible à *priori :* car, si les hexagones concentriques que présente la figure 1, pl. V, elle-même peuvent être regardés comme la trace de lames parallèles aux trois faces supérieures et aux trois faces inférieures p, on ne peut pas nier que les cristaux encapuchonnés, connus de tous les minéralogistes, ne semblent annoncer des couches parallèles aux faces $e^{\frac{1}{2}}$ aussi bien qu'aux faces p.

Il ne paraît d'ailleurs pas probable ici, comme cela se voit sur d'autres cristaux de Traverselle (fig. 11, 14 et 15, pl. I), que les faces $e^{\frac{1}{2}}$ se composent, partie d'une face $e^{\frac{1}{2}}$, partie d'une

face d, car, d'une part, le rhomboèdre $e^{\frac{10}{17}}$ et le petit plagièdre τ, possèdent dans toute leur étendue une continuité qui ne se montre pas lorsque ce genre d'enchevêtrement existe réellement, et, d'autre part, ainsi que je l'ai dit ci-dessus, les cristaux d'apparence composée présentent des phénomènes optiques différents de ceux du cristal fig. 5.

Une autre explication consisterait à supposer, comme M. Rose l'a indiqué, fig. 32 *a* et 35 de son Mémoire, que la figure 5 représente un cristal simple en apparence, mais composé en réalité d'individus enchevêtrés de manière à se limiter exactement sur les arêtes du prisme et sur celles de la pyramide, et à n'offrir au sommet que leurs faces directes p et leurs faces retournées d. On peut objecter à cette explication que, dans les cas excessivement rares où les individus se limitent avec tant de régularité, il n'existe pas, et il ne doit pas en effet exister, entre les faces d et les faces directes p, la différence de netteté qui se voit sur notre cristal; la pénétration se trahit seulement par quelques moirages ou par quelque interruption des stries sur le prisme ou sur les rhomboèdres subordonnés.

Pour le cristal fig. 5, comme pour tous les cristaux de Traverselle et de Brosso, les sillons entre-croisés plus ou moins profonds qu'on remarque sur les faces verticales, ne m'ont jamais paru avoir un caractère différent sur les échantillons d'apparence simple ou sur ceux où le groupement est évident, sans doute parce que, d'une part, ces sillons ne sont pas toujours très-réguliers, et que, d'autre part, comme je le montrerai plus loin, ils indiquent seulement une superposition de lames parallèles aux faces primitives supérieures et inférieures : on ne peut donc rien tirer de ce caractère; mais, comme je l'ai déjà fait remarquer, la figure 1, pl. V, n'indique que trois secteurs de 120 degrés ayant leur sommet commun au centre, et correspondants à la projection des faces p; or, si toutes les faces du sommet étaient des faces p et d, on ne voit pas pourquoi il n'y aurait pas trois autres

secteurs inverses des premiers, et indiquant la projection des faces *d*.

Les phénomènes optiques qui, dans le cas particulier que je viens de discuter, me paraissent tout à fait concluants, sont loin de présenter toujours le même degré de certitude, et il faut bien avouer que jusqu'ici l'examen de l'enveloppe extérieure d'un cristal de quartz ne suffit pas, dans tous les cas, pour expliquer les anomalies de sa structure interne accusées par la lumière polarisée, et que, réciproquement, certaines irrégularités intérieures ne se révèlent pas toujours par des signes extérieurement visibles : le beau cristal enfumé à deux faces rhombes contiguës fig. 39, pl. II, et les nombreux cristaux que j'ai fait tailler m'ont fourni plusieurs exemples de l'incertitude qui règne encore dans ces relations entre l'intérieur et l'extérieur des groupes cristallins.

J'ajouterai que, pour les cristaux de Traverselle et de Brosso, plus encore peut-être que pour ceux de Suisse, du Dauphiné et de Jærischau, si bien décrits par M. Rose, l'absence complète au sommet des signes qui décèlent un enchevêtrement, serait un fait excessivement rare. En effet, la grande majorité des cristaux composés de Traverselle offrent des rhomboèdres subordonnés qui s'interrompent en s'entre-croisant (fig. 11, 13, 14 et 15); ou bien ils présentent sur les angles solides du prisme et de la pyramide de petits angles rentrants, indiqués sur les figures 14 et 15.

Quant aux trois arêtes très-légèrement saillantes qui, sur un certain nombre de cristaux de Traverselle, de Carrare et de New-York, partent d'un même point et se dirigent plus ou moins exactement vers les trois angles plans des faces du sommet, supposées triangulaires, on ne peut tirer aucune induction de leur présence ou de leur absence sur quelques-unes de ces faces : car les cristaux d'apparence simple, fig. 42, pl. II, et 71, pl. III, offrent ces lignes sur leurs trois faces alternes *p;* le cristal composé, fig. 14, les porte sur plusieurs faces contiguës; et dans les cristaux fig. 9, 12, pl. I, et 40, pl. II, elles sont accusées, pour le premier, sur

les trois faces qu'on doit regarder comme $e^{\frac{1}{2}}$; pour le second, sur une face p, et sur une face $e^{\frac{1}{2}}$ adjacente; et pour le dernier, sur les six faces du sommet. Cependant la lumière polarisée n'indique pas de groupements dans le cristal fig. 9, et les faces rhombes du cristal de New-York (fig. 40, pl. II), présentent la disposition régulière qu'elles doivent avoir sur un cristal géométriquement simple.

Le cristal fig. 6, outre les arêtes saillantes dont je viens de parler, porte encore sur trois faces de son sommet des stries irrégulières semblables à celles que j'ai dessinées sur la figure 5; le cristal fig. 8 a au contraire presque toutes ses faces unies, et il est surtout remarquable par son double sommet et par son hémitropie.

L'absence de la face β sur les cristaux fig. 6, 7 et 8 jette dans le choix de leurs faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ une indécision beaucoup plus grande que celle que j'ai signalée pour le cristal fig. 5; si l'on donne en effet la préférence aux caractères tirés de la netteté relative des faces du sommet et de l'absence des stries sur le rhomboèdre subordonné aux faces les moins nettes, les cristaux fig. 6, 7 et 8 se composeront de faces e^{2} prédominantes et unies, de faces p subordonnées et ondulées, et de faces appartenant au rhomboèdre direct e^{26}; les plagièdres notés τ_6 et τ_7 seront des faces correspondantes, avec les mêmes incidences, dans la zone $p\ s\ e^{2}$.

Les sommets offriront au contraire des faces p prédominantes, et des faces $e^{\frac{1}{2}}$ subordonnées, avec des plagièdres τ_6 et τ_7, de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^{3}$, et le rhomboèdre inverse $e^{\frac{10}{17}}$, si l'on considère que ces cristaux ont la plus grande analogie avec le cristal fig. 5, et surtout avec celui fig. 9, dont une plaque offre dans la lumière polarisée à peu près la disposition que présente la figure 2, pl. V. Or cette figure montre, comme la figure 1, trois lignes partant du

centre et se dirigeant vers le milieu des trois côtés de l'hexagone qui correspondent aux faces supposées $e^{\frac{1}{2}}$; quant aux lignes concentriques qui semblent annoncer des lames parallèles aux six faces p, supérieures et inférieures, elles sont encore plus nombreuses et plus rapprochées que sur la figure 1; on peut donc, à propos des cristaux fig. 6, 7, 8 et 9, répéter les hypothèses et les objections que je viens de discuter pour le cristal fig. 5; mais, afin de ne pas trop compliquer les dessins, je n'y ai indiqué que les faces dont l'admission m'a paru le plus probable.

? $e^{\frac{7}{11}}$, inverse de e^{17}, n'a été observé qu'une ou deux fois sur des cristaux de Traverselle; il reste par conséquent fort douteux.

$e^{\frac{1}{3}}$, inverse de e^{14}, est assez fréquent sur les cristaux de Traverselle; ce rhomboèdre s'étant trouvé plusieurs fois sur des cristaux dont les faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ pouvaient se distinguer l'une de l'autre, et portant assez généralement de légères stries caractéristiques des rhomboèdres inverses (fig. 10, 12 et 13, pl. I), son existence ne laisse pas les mêmes doutes que celle de l'inverse $e^{\frac{16}{17}}$. La figure 12, qui présente un cristal d'apparence simple, porte à la fois sur une face p et sur une face $e^{\frac{1}{2}}$ les arêtes saillantes dont il a été question plus haut, l'une des deux autres faces p est unie, la troisième est ondulée.

Le cristal fig. 11, dont les enchevêtrements se trahissent par l'interruption et l'entre-croisement des rhomboèdres directs e^{32}, e^{26}, et des rhomboèdres inverses $e^{\frac{2}{3}}$ et e^{6}, fait voir une autre particularité que j'ai souvent observée sur les groupements de Traverselle, et qui consiste en ce que chacune des trois faces p ou $e^{\frac{1}{2}}$ du sommet ne porte pas toujours au-dessous d'elle le même rhomboèdre subordonné.

$e^{\frac{1}{7}}$ inverse de e^{11}. Ce rhomboèdre, que j'ai rencontré sur une dizaine d'échantillons de Traverselle, pourrait peut-être, dans certains cristaux enchevêtrés, être considéré comme le rhomboèdre

direct e^{11}, si la netteté des faces $e^{\frac{1}{2}}$ ne s'opposait à ce que ces faces fussent regardées comme une combinaison d'une portion de $e^{\frac{1}{2}}$ et d'une portion de face a (fig. 16); mais ce qui semble surtout assurer l'existence de $e^{\frac{5}{7}}$, c'est qu'il offre quelquefois les stries propres aux rhomboèdres inverses, comme dans la figure 17, ou qu'il se trouve au-dessus d'un autre rhomboèdre strié, comme dans la figure 15.

? $e^{\frac{3}{4}}$. Les incidences qui conduisent à ce rhomboèdre ne se sont trouvées que sur un petit nombre de cristaux de Traverselle; de neuf mesures, deux seulement sont assez nettes pour qu'on puisse répondre qu'elles ne se confondent pas avec celles du rhomboèdre suivant.

$e^{\frac{10}{11}}$. Cette face, observée sur treize cristaux de Traverselle, est toujours arrondie, et son inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$ présente quelque incertitude; cependant, parmi les dix-neuf mesures qui en ont été prises, aucune ne s'est trouvée inférieure à 170 degrés, ni supérieure à 170° 45′. En supposant que le rhomboèdre précédent $e^{\frac{3}{4}}$ se confonde avec celui-ci, c'est le signe $e^{\frac{10}{13}}$ qui, malgré sa complication, paraît devoir être adopté.

$e^{\frac{8}{9}}$, inverse de e^{8}. Ce rhomboèdre a été observé sur trente-trois cristaux de Traverselle et sur plusieurs cristaux du Valais; la moyenne des cinquante-quatre mesures que j'en ai obtenues ne laisse donc, malgré un peu de rondeur habituelle à ses faces, aucun doute sur son signe; de plus, sur le cristal du Valais (fig. 18), les rhomboèdres directs $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{13}{5}}$ sont brillants et ondulés, tandis que les inverses $e^{\frac{6}{5}}$, e^{1}, $e^{\frac{4}{3}}$ portent de légères stries horizontales, et la face rhombe s forme une zone entre deux rhomboèdres dont l'un ne peut être que $e^{\frac{4}{5}}$, puisque l'autre est certainement $e^{\frac{7}{5}}$.

$e^{\frac{7}{8}}$, inverse de $e^{\frac{12}{7}}$. J'ai rencontré ce rhomboèdre sur trente-six

cristaux de Traverselle et sur quelques gros cristaux du Brésil; sur les premiers il présente presque toujours des faces brillantes et très-arrondies, dont les incidences varient dans des limites assez étendues, car les extrêmes ont été 168 et 166 degrés; la moyenne de cinquante-quatre mesures a donné 167° 10′ 16″, nombre suffisamment voisin de 167° 4′, que donne le calcul, pour assurer l'existence du symbole $e^{\frac{7}{8}}$; sa position comme rhomboèdre inverse ne peut d'ailleurs laisser aucun doute sur le cristal du Brésil (fig. 20) qui porte un plagièdre v_2 de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et un autre plagièdre n de la zone $p\ s\ e^2$.

?? $e^{\frac{14}{15}}$ ou $e^{\frac{19}{20}}$, inverse de $e^{\frac{11}{2}}$. Une face très-arrondie, brillante et fournissant des mesures très-incertaines qui peuvent convenir à l'un ou à l'autre de ces deux rhomboèdres, s'est offerte sur un certain nombre de cristaux de Traverselle. La moyenne de quinze observations faites sur dix cristaux donne 165° 19′ comme inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$; ce nombre est très-voisin de 165° 16′, que fournit le calcul du rhomboèdre $e^{\frac{14}{15}}$. La moyenne de dix observations faite sur neuf autres cristaux n'est que de 164° 26′, qui se rapproche de l'incidence 164° 46′ du rhomboèdre $e^{\frac{19}{20}}$.

Comme les vingt-cinq observations dont il vient d'être question ont fourni avec $e^{\frac{1}{2}}$ des angles trop forts pour se rapporter au rhomboèdre e^1, et trop faibles pour convenir à $e^{\frac{7}{8}}$, il faut bien admettre l'un des rhomboèdres $e^{\frac{14}{15}}$ ou $e^{\frac{19}{20}}$, dont les faces sont trop arrondies pour permettre une détermination très-exacte.

$e^{\frac{20}{19}}$. Ce symbole est indiqué par des angles assez nets de 161° 45′ avec $e^{\frac{1}{2}}$ trouvés sur un cristal très-remarquable du Valais (fig. 21), et sur les cristaux fig. 23 et 24. Les nos 21 et 24 font partie de la collection du Muséum.

$e^{\frac{12}{10}}$; inverse du rhomboèdre douteux $e^{\frac{17}{4}}$. Plusieurs mesures de ce rhomboèdre ont été obtenues, 1° sur un cristal du Valais appar-

tenant à M. Damour, et représenté fig. 22; 2° sur le cristal fig. 23, très-remarquable par ses enchevêtrements et par les sutures cannelées qu'il porte sur trois arêtes latérales; 3° sur un cristal de Traverselle; la moyenne est égale à 160° 24′, nombre qui rend très-probable l'existence du symbole $e^{\frac{11}{10}}$.

$e^{\frac{8}{7}}$. Ce rhomboèdre, dont la mesure directe n'a pu généralement être obtenue que d'une manière approximative, paraît faire partie, sur quelques cristaux, de zones qui rendent son admission nécessaire; il est malheureusement difficile de constater sur le goniomètre l'exactitude rigoureuse de ces zones, parce que les faces qui les composent sont ou ternes ou striées; et ce n'est en général qu'à l'œil qu'on peut juger du parallélisme des lignes qui indiquent leur existence. Cependant le cristal du Valais représenté fig. 24 porte une série de plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$, dont l'un $\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{5}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$, est bordé par deux lignes parallèles comprises entre le plagièdre $u = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$ de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et un rhomboèdre légèrement strié, qu'une mesure directe assez précise fait bien rapporter à $e^{\frac{8}{7}}$; j'ai retrouvé la même zone sur deux autres cristaux du Valais légèrement enfumés; l'un fournit aussi une bonne mesure de rhomboèdre $e^{\frac{8}{7}}$; sur l'autre, au contraire, cette face est tout à fait indéterminable, et l'on ne peut mesurer exactement que les deux rhomboèdres $e^{\frac{13}{10}}$ et $e^{\frac{5}{3}}$ (fig. 25, pl. I).

Sur le cristal fig. 26, le plagièdre $\pi = (d^1\ d^{\frac{5}{15}}\ b^{\frac{1}{2}})$ de la zone $p\ s\ e^2$ se détermine assez nettement par son inclinaison sur p, malgré les stries fines qui le recouvrent; à l'œil, on croit reconnaître un parallélisme complet entre les lignes qui limitent ce plagièdre, coupé d'un côté par le rhomboèdre $e^{\frac{2}{2}}$, brillant et légèrement ondulé, et de l'autre côté par un rhomboèdre inverse qui ne peut encore être que $e^{\frac{8}{7}}$, si ce parallélisme existe réellement. Malheureusement les stries que porte le rhomboèdre pré-

sumé $e^{\frac{5}{3}}$ sont si profondes, qu'on ne peut mesurer l'incidence de cette face sur $e^{\frac{1}{2}}$ qu'au goniomètre d'application, et que la zone $e^{\frac{5}{3}}$ π $e^{\frac{7}{2}}$ ne peut être constatée rigoureusement avec le goniomètre de réflexion.

$e^{\frac{6}{5}}$. Un gros cristal, pénétré de filaments d'asbeste, m'a fourni une incidence très-nette de 157° 42′ sur $e^{\frac{1}{2}}$ qui ne peut se rapporter qu'au rhomboèdre inverse $e^{\frac{6}{5}}$. Ce cristal, qui offre, sous la pyramide fondamentale, une pyramide très-aiguë, où les enchevêtrements sont accusés par de petites places dépolies, présente deux zones intéressantes : l'une se compose du plagièdre $w = (d^1\, d^{\frac{7}{10}}\, b^{\frac{1}{2}})$ en bordure étroite entre $e^{\frac{7}{3}}$ et $e^{\frac{4}{3}}$, comme on le voit sur la figure 32 *a* de M. Rose; l'autre est déterminée par le plagièdre $\mu = (d^1\, d^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}})$ entre x et $e^{\frac{5}{4}}$, comme l'indique la figure 21 du même auteur. Deux petits cristaux de Viesch, en Valais, m'ont donné des incidences fort nettes de 157° 40′ et 157° 50′, qui rendent très-probable l'existence du rhomboèdre $e^{\frac{6}{5}}$.

$e^{\frac{11}{9}}$. Le cristal fig. 21 fournit, pour l'un des trois rhomboèdres finement striés, situés sous $e^{\frac{1}{4}}$, des incidences nettes de 157° 12′ à 157° 14′ qui ne peuvent se rapporter qu'au rhomboèdre $e^{\frac{11}{9}}$; le cristal fig. 24 donne des incidences comprises entre celles de $e^{\frac{6}{5}}$ et celles de $e^{\frac{11}{9}}$.

? $c^{\frac{5}{4}}$. Avant que M. Rose eût attiré l'attention sur les cristaux mâclés par enchevêtrement, ce rhomboèdre a dû être fréquemment confondu avec son inverse $e^{\frac{7}{2}}$; on trouve en effet souvent des cristaux sous forme de pyramides aiguës, analogues à la figure 32 *a* de M. Rose, qui portent une face directe $c^{\frac{7}{2}}$ et une face retournée $\mathfrak{z}^{\frac{7}{2}}$; ces deux faces ont d'ailleurs le même éclat et le

même genre d'ondulations, et il est facile de voir, en suivant la limite des individus enchevêtrés, qu'ils appartiennent à la même espèce de rhomboèdres. Mon cristal fig. 23 offre une disposition de ce genre qu'on peut regarder comme le cas le plus général : toutefois il ne paraît guère possible de ne pas admettre, sur quelques échantillons assez rares, l'existence de $e^{\frac{5}{3}}$; en effet, certains cristaux de Pfitsch, en Tyrol, analogues à ma figure 51, pl. II, portent, au-dessous des faces p, des rhomboèdres brillants, très-légèrement ondulés, dont les plus ordinaires sont $e^{\frac{13}{7}}$ et $e^{\frac{7}{3}}$, tandis qu'au-dessous de $e^{\frac{1}{2}}$ il existe des faces striées dont l'une se rapporte probablement à $e^{\frac{5}{7}}$ par ses incidences. Le petit cristal du Valais (fig. 27, pl. I) offre aussi, au-dessous de faces brillantes appartenant évidemment aux rhomboèdres directs $e^{\frac{13}{4}}$ et $e^{\frac{7}{4}}$, une face qui porte les stries caractéristiques des rhomboèdres inverses, et dont on voit l'enchevêtrement dans les premières ; cette face, d'après la zone u, w, dont elle semble faire partie, ne peut être que $e^{\frac{5}{4}}$; malheureusement, son inclinaison sur la face p qui la surmonte, ne peut pas être mesurée avec toute l'exactitude désirable, à cause d'une légère ondulation qui produit deux images réfléchies sur p, et cette inclinaison paraît plutôt conduire au rhomboèdre $e^{\frac{13}{10}}$; quant aux faces de la zone présumée $u\ w\ e^{\frac{5}{4}}$, la première et la dernière donnent des réflexions parfaitement nettes ; la seconde seule, finement striée parallèlement à son intersection avec p, ne fournit qu'une image un peu trouble ; et comme la zone imparfaite $u\ w\ e^{\frac{13}{10}}$ serait excessivement voisine de la zone réelle $u\ w\ e^{\frac{5}{4}}$, il est impossible de dire si la face w, assurée par son incidence sur p, est ou non rigoureusement dans la zone du plagièdre u et du rhomboèdre qu'il s'agit de déterminer. De très-gros cristaux légèrement enfumés, du Valais, m'ont à leur tour présenté deux faces, ε et w, dans deux zones formées, la première par une large face $e^{\frac{7}{4}}$, brillante, et par une face $\mathfrak{a}^{\frac{7}{2}}$; la

seconde par le plagièdre u et par la même face $\mathfrak{Z}^{\frac{7}{2}}$. Ce dernier rhomboèdre $\mathfrak{Z}^{\frac{7}{2}}$ est, comme le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$, brillant dans sa plus grande étendue : mais, au contact des faces ε et w, il offre de larges taches ternes et finement striées qui, par leur inclinaison sur p, ne peuvent appartenir qu'à l'inverse $e^{\frac{5}{4}}$.

Quoi qu'il en soit, je ne signale $e^{\frac{5}{4}}$ qu'avec quelques doutes, jusqu'à ce que de nouvelles observations nous apprennent s'il faut l'adopter ou le rejeter définitivement.

$e^{\frac{1}{10}}$. Malgré son signe un peu compliqué, ce rhomboèdre doit exister; car les cristaux fig. 21 et 25 en fournissent des mesures très-nettes, et on le trouve indiqué çà et là sur d'autres cristaux du Valais, comme je viens de le faire voir pour le cristal fig. 27.

$e^{\frac{5}{7}}$. Ce rhomboèdre est assez fréquent sur les cristaux du Valais; outre les zones $u\,q\,e^{\frac{5}{2}}$, et $e^{\frac{7}{2}}\,w\,e^{\frac{5}{3}}$, déjà décrites par M. Rose, fig. 28 et 32 a de son Mémoire, j'ai encore trouvé sur plusieurs cristaux la zone $x\,\mu\,e^{\frac{4}{3}}$. Le remarquable cristal fig. 31 réunit la première et la dernière de ces zones.

? $e^{\frac{7}{5}}$, inverse de e^{5}. Une face arrondie et striée, sur un petit cristal d'Australie, fait avec $e^{\frac{1}{2}}$ un angle assez peu certain, mais cependant très-voisin de l'inclinaison de e^{5} sur p; la même incidence approximative se retrouve sur la mâcle du Dauphiné (fig. 79, pl. III), et sur quelques gros cristaux du Brésil; on peut donc ranger le rhomboèdre $e^{\frac{7}{5}}$ parmi ceux dont l'existence est au moins très-probable.

$e^{\frac{25}{17}}$, inverse de $e^{\frac{31}{11}}$. Plusieurs cristaux du haut Valais et de Carrare offrent une petite face inclinée sur $e^{\frac{1}{2}}$ d'environ 151° 23′, et tellement nette, que, malgré l'apparence compliquée du symbole, on ne peut méconnaître l'existence de $e^{\frac{25}{17}}$ inverse de $e^{\frac{31}{11}}$. J'ai déjà cité le rhomboèdre $e^{\frac{31}{11}}$ sur un cristal de Carrare; ce cristal, repré-

senté fig. 32, pl. II, ne porte aucune trace de groupements; les rhomboèdres inverses sous $e^{\frac{1}{2}}$ y sont légèrement striés, les rhomboèdres directs sous p sont brillants et légèrement arrondis, de sorte que chaque espèce de rhomboèdre présentant le caractère qui lui est propre, l'une ne peut être prise pour l'autre.

$e^{\frac{3}{2}}$. Plusieurs gros cristaux du Brésil, le cristal du Valais (fig. 25), et un cristal de Traverselle, m'ont fourni des incidences voisines de 150° 40′, qui rendent très-probable l'existence du rhomboèdre $e^{\frac{3}{2}}$.

? $e^{\frac{11}{7}}$, inverse de $e^{\frac{13}{8}}$. Ce rhomboèdre m'a semblé se présenter sur le cristal d'Australie fig. 34; mais il y est tellement strié et arrondi, qu'il est impossible d'assurer son existence par la mesure directe, qui conviendrait tout aussi bien au rhomboèdre connu $e^{\frac{13}{8}}$ inverse de $e^{\frac{5}{2}}$; c'est surtout à cause de la zone qui à l'œil paraît avoir lieu entre $e^{\frac{11}{7}}$, σ_1 plagièdre supérieur de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et p, qu'on est amené à adopter $e^{\frac{11}{7}}$ plutôt que $e^{\frac{13}{8}}$; le plagièdre σ_1 est en effet si net et si brillant, que ses mesures conduisent presque forcément au signe $(d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$ de préférence à $(d^{\frac{4}{13}}\ d^1\ b^{\frac{8}{13}})$ qui ferait zone avec $e^{\frac{13}{8}}$; comme cette zone ne peut d'ailleurs pas se vérifier exactement sur le goniomètre, à cause des stries du rhomboèdre en question, il est possible que ce ne soit qu'une zone approchée, et que le rhomboèdre incertain sous $e^{\frac{1}{2}}$, soit $e^{\frac{13}{8}}$, la face σ_1 conservant son symbole $(d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$; c'est le rhomboèdre $e^{\frac{13}{8}}$ qui, sur le cristal fig. 64, fait partie de la zone s, $\mathrm{R} = (d^1\ d^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{3}{5}})$, tandis que sur le remarquable cristal fig. 41, il est difficile de s'assurer si c'est à $e^{\frac{13}{8}}$ ou à son voisin $e^{\frac{5}{3}}$ que doivent être rapportées les petites mouchetures finement striées enclavées au milieu du rhomboèdre $e^{\frac{17}{7}}$.

$e^{\frac{5}{1}}$, inverse de $e^{\frac{17}{7}}$. Les incidences qui conduisent à admettre ce

rhomboèdre ont été observées sur un assez grand nombre de cristaux de Carrare, sur quelques cristaux du Dauphiné et du Valais, sur un cristal de Traverselle, sur plusieurs cristaux du Brésil et sur un cristal gigantesque de Sibérie; ce qui assure surtout son existence, c'est qu'il fait partie de deux zones bien constatées : la première est formée par x, λ plagièdre inférieur nouveau de la zone $p\ s\ e^2$, et $e^{\frac{5}{3}}$ (fig. 2, pl. I, 35 et 36, pl. II); la seconde se compose des faces e^2, $\omega = (d^1\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{16}})$ et $e^{\frac{5}{3}}$. (Voy. le cristal de Carrare, fig. 37, pl. II.)

? $e^{\frac{10}{11}}$. Le rhomboèdre $e^{\frac{9}{8}}$, très-commun sur les cristaux du Dauphiné, est ordinairement strié plus ou moins profondément, de sorte que sa mesure ne peut pas se prendre toujours très-exactement; lorsqu'il fait partie de la zone $x\ e^{\frac{8}{3}}\ e^{\frac{9}{8}}$, indiquée sur la figure 17 du Mémoire de M. Rose, les deux premières faces de cette zone étant toujours facilement déterminables, le signe de la troisième s'ensuit nécessairement; mais lorsqu'il se trouve isolé, comme sur certains cristaux de Carrare et du Valais, des mesures assez nettes, oscillant entre 146° 10′ et 146° 22′, font penser que $e^{\frac{7}{6}}$ peut être quelquefois remplacé par le rhomboèdre un peu plus obtus $e^{\frac{18}{13}}$.

$e^{\frac{11}{6}}$. Certains cristaux fortement enfumés du Dauphiné offrent des gradins très-prononcés dont les faces, souvent assez larges, coupent le rhombe s suivant des lignes visiblement inclinées à l'intersection de s sur p (fig. 39, pl. II) : ces faces ne peuvent donc pas appartenir au prisme e^2; quoiqu'elles soient légèrement striées, leur mesure s'obtient avec assez d'exactitude.

En outre, de petits cristaux limpides du Brésil, un cristal enfumé du Valais et un cristal de Traverselle fournissent des nombres assez concordants pour qu'on soit amené à admettre le symbole $e^{\frac{11}{9}}$; un petit cristal limpide du Brésil m'a offert une

double troncature formée par deux faces ternes et grenues, situées dans la zone latérale $e^2\ e^{\frac{11}{6}}$.

? $e^{\frac{23}{13}}$ ou $e^{\frac{27}{14}}$; d'autres cristaux du Brésil et du Dauphiné, quelques cristaux de l'Oisans et de Traverselle donnent des mesures suffisamment nettes pour faire reconnaître au moins un de ces deux rhomboèdres, encore plus aigus que le précédent : l'ensemble des observations sur les cristaux de l'Oisans, de Traverselle, fig. 42, et du Brésil, conduit à admettre $e^{\frac{23}{12}}$; le cristal enfumé fig. 39 indique plutôt $e^{\frac{27}{14}}$.

En résumé, on voit que parmi les nouveaux rhomboèdres, soit directs, soit inverses, que j'ai observés, un certain nombre sont assurés dès à présent par leurs incidences ou par les zones dont ils font partie ; les autres restent douteux, jusqu'à ce que des cristaux plus nets permettent de fixer rigoureusement le symbole qui doit les représenter. Parmi les vingt-neuf rhomboèdres directs, ou parallèles au primitif, qu'on connaît maintenant dans le quartz, dix-sept ont leurs inverses plus ou moins certains ; les douze autres paraissent jusqu'ici hémièdres, lorsqu'on les fait dériver du système hexagonal.

Les rhomboèdres inverses au primitif sont au nombre de trente et un ; il y en aurait donc quatorze hémièdres, si on les rapportait au prisme hexagonal régulier.

A l'exception des rhomboèdres douteux $e^{\frac{11}{4}}$ et $e^{\frac{31}{11}}$, tous ceux qui possèdent leurs inverses ont des symboles hexagonaux simples. Quant aux rhomboèdres directs dont les inverses ne sont pas connus, leur signe hexagonal peut être exprimé par un nombre assez compliqué, lors même que leur signe rhomboïdal est simple ; c'est ce qu'on remarque notamment pour les rhomboèdres douteux e^{15} et e^{13}.

Dans les rhomboèdres inverses qui n'ont pas leurs correspondants parmi les solides parallèles au primitif, les deux notations

rhomboïdale et hexagonale sont au contraire simples ou compliquées à la fois.

III. — FACE RHOMBE, *s*.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$(b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	a^1

La face rhombe *s*, par sa position sur le rhomboèdre primitif, peut être considérée comme la limite entre les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et ceux de la zone $p\ s\ e^2$, dont il sera question plus loin, de sorte que son signe rhomboédrique peut s'écrire indifféremment $(b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$ ou $(d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$, son symbole hexagonal étant a^1. Dans les cristaux prismés simples, cette face, comme l'a fait remarquer M. Rose, n'existe jamais que sur trois des angles solides de la pyramide supérieure, et sur les trois angles de la pyramide inférieure situés à l'extrémité des mêmes arêtes verticales que les premiers; si l'on suppose ces six troncatures suffisamment prolongées pour se rencontrer, elles forment deux solides symétriques égaux mais opposés, situés sur l'un ou sur l'autre des deux groupes de trois angles alternes qui constituent les six angles tétraèdres des cristaux prismés; ces solides, composés chacun de six faces triangulaires, offriraient en se réunissant un véritable isocéloèdre; ce sont les deux *trigonoèdres* de M. Rose, qu'on peut désigner simplement sous le nom d'*hémi-isocéloèdres* droit et gauche. Ainsi que je le dirai bientôt, en parlant de certains plagièdres, le phénomène de la rotation du quartz paraît surtout lié à la position de ces hémi-isocéloèdres, qui jouent ainsi le même rôle que les deux solides hémièdres opposés, reconnus dans tous les sels où l'on a observé la polarisation rotatoire[1]; nous retrouvons ici le même

[1] Je n'ai pas besoin de faire remarquer que cette phrase a été écrite bien avant la découverte du pouvoir rotatoire dans les cristaux de cinabre et de sulfate de strychnine octaédrique, que j'ai communiquée à l'Institut dans ses séances du 27 avril et du 4 mai 1857. Jusqu'à présent (15 juin 1857) on n'a trouvé dans ces deux corps aucune espèce de facettes hémiédriques, et la polarisation circulaire paraît y être indépendante de l'existence de ces facettes.

genre de symétrie que dans les sels cubiques préparés par M. Marbach, où chaque solide hémièdre considéré isolément peut être superposé à son inverse, tandis que dans les combinaisons dont ils font partie, ils ne jouissent pas de cette propriété.

Le cristal fortement enfumé (fig. 39, pl. II), qui ne présente à l'extérieur aucune apparence d'enchevêtrements, paraît d'abord faire exception à l'hémiédrie dont je viens de parler, car il offre deux faces rhombes, situées sur deux angles solides adjacents; mais si l'on examine des plaques coupées perpendiculairement à l'axe de ce cristal, on voit déjà dans la lumière naturelle que la disposition de la matière fuligineuse annonce un groupement d'au moins deux cristaux, et dans la lumière polarisée la structure paraît encore plus compliquée; en effet, une première plaque, prise tout à fait à l'extrémité inférieure, se compose d'une grande plage lévogyre et de trois plages plus petites, triangulaires, presque entièrement dénuées de rotation; une seconde plaque sciée un peu plus haut dans le cristal, fait voir que toutes les parties portant la flèche (fig. 8, pl. V), possèdent la rotation gauche, tandis que la petite portion marquée offre la rotation droite; dans les plages N et N, les deux rotations contraires se détruisent presque complétement : il est probable que dans une plaque prise encore plus près du sommet, la petite plage dextrogyre s'accroîtrait aux dépens de la plage lévogyre; cependant il est impossible de rien affirmer à cet égard, car on voit que, si l'ensemble du cristal fig. 39 se compose bien d'un ou de plusieurs individus dextrogyres, et d'un ou de plusieurs individus lévogyres, l'enchevêtrement de ces individus est tout à fait irrégulier et ne paraît nullement en rapport avec l'enveloppe extérieure; on peut même remarquer que toute la partie située à droite de la plaque (fig. 8, pl. V), qui semble correspondre au plus grand rhombe droit *s*, est celle où l'on trouve la rotation gauche, tandis que c'est dans une partie placée en avant, et un peu à gauche de cette plaque, correspondant plutôt au petit rhombe *s*, qu'on rencontre la rotation droite.

La même irrégularité et la même confusion des deux rotations se sont aussi manifestées dans une plaque prise au milieu d'un échantillon composé de deux individus portant, l'un le plagièdre x à droite, et l'autre le même plagièdre à gauche, et accolés de manière à offrir, d'un côté deux sommets bien distincts, et de l'autre côté un seul prisme comprimé suivant deux faces parallèles.

Les cristaux si limpides de Little-Falls, près Trenton, comté de New-York, dont quelques-uns ont été décrits comme très-réguliers par M. Rose, offrent presque tous sur les faces de leurs sommets des ondulations plus ou moins semblables à celles de la figure 40, copiée d'après un cristal appartenant à M. de Verneuil; un certain nombre porte la face rhombe sur trois ou quatre angles contigus; et quoique la limite des individus enchevêtrés soit souvent difficile à reconnaître sur ces cristaux, la lumière polarisée fait voir que ceux sur lesquels les faces rhombes modifient régulièrement trois angles solides alternes, présentent une masse assez homogène, traversée par quelques flammes triangulaires de même rotation que cette masse, tandis que ceux où les faces rhombes sont contiguës, se composent de deux individus de rotations inverses, accolés parallèlement à une face p. Il peut du reste arriver que l'un des individus soit tellement prédominant, que presque toute la plaque paraisse n'avoir qu'une seule rotation : j'ai en effet observé une plaque, comprenant dans son épaisseur une portion des faces de la pyramide et une portion des faces verticales, qui avait été extraite d'un petit cristal limpide du Brésil; cette plaque, prise au centre même de l'échantillon, offre sur trois angles contigus, une face rhombe parfaitement nette qui semble promettre deux rotations bien distinctes; or, dans toute son étendue, la lumière polarisée ne développe au contraire qu'une seule teinte uniforme et homogène, et ce n'est que dans un tout petit angle, situé au-dessus du troisième rhombe intercalé, sans sutures visibles, au milieu des deux autres, qu'on aperçoit des traces d'une rotation contraire à la rotation générale : un autre gros cristal du Brésil portant un plagièdre x, de même sens,

sur trois angles solides contigus et un angle rentrant très-prononcé qui annonce bien une mâcle, a également été coupé et poli par les deux bouts; l'enchevêtrement des individus qui a fait naître cet angle rentrant est si superficiel, que la lumière polarisée ne paraît déterminer qu'une teinte uniforme dans toute la masse, et qu'il faut employer des artifices particuliers pour apercevoir quelques légers groupements intérieurs.

Quoi qu'il en soit, on peut dire que tout cristal géométriquement ou physiquement simple ne doit porter la face rhombe que sur trois angles alternes du prisme hexagonal, et que toute face rhombe irrégulièrement placée sur un ou plusieurs des autres angles annonce une pénétration d'individus de rotations opposées.

Quant aux zones dont le rhombe s fait partie, j'ai déjà cité (fig. 18, pl. I) la zone $e^{\frac{7}{2}}\, s\, e^{\frac{4}{5}}$; l'agrandissement des faces $e^{\frac{7}{2}}$ peut réduire le rhomboèdre $e^{\frac{4}{5}}$ à un plan presque imperceptible, ou même le faire disparaître complétement : il en résulte alors une bordure étroite formée par la face s, entre deux faces $e^{\frac{7}{2}}$ (fig. 19).

J'ai encore rencontré dans la zone dont je viens de parler une petite face très-étroite entre s et $e^{\frac{7}{2}}$; son symbole est $\varepsilon = (b^{\frac{1}{11}}\, d^1\, d^{\frac{1}{4}})$ (fig. 51, pl. II).

Enfin, deux cristaux du Brésil m'ont offert la zone remarquable s, $\mathrm{R} = (d^1\, d^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{3}{5}})$ et $c^{\frac{13}{8}}$ (fig. 64, pl. II); et sur le cristal du Dauphiné, fig. 41, j'ai cru reconnaître une nouvelle face $\Phi = (b^{\frac{1}{5}}\, d^1\, d^{\frac{5}{11}})$ très-voisine de l'inverse de R, et déterminant la zone $s\, \Phi\, e^{\frac{17}{7}}$.

IV. — PLAGIÈDRES DE LA ZONE $e^{\frac{1}{2}}\, s\, e^2$, OU TRAPÉZOÈDRES DE PREMIER ORDRE.

1° Plagièdres inférieurs à s.

Tous les plagièdres de cette première catégorie peuvent être ramenés, dans la notation de Lévy, à un symbole de l'une des

formes ($b^x\ d^1\ d^{\frac{1}{2}x}$) ou ($b^x\ d^1\ d^{\frac{2}{3}}$); ces plagièdres forment, avec le rhombe s et la face $e^{\frac{1}{2}}$ de leur zone, une hélice, tantôt *dextrorsum*, tantôt *sinistrorsum*, de sorte qu'ils se trouvent, soit à droite, soit à gauche de l'observateur qui regarderait devant lui une face supérieure du rhomboèdre primitif p, et la face prismatique e^2 faisant partie de cette hélice (fig. 2 et 3, pl. I).

Dans les cristaux examinés jusqu'à présent, on avait admis, d'après les observations de sir W. Herschel, que le phénomène de la rotation se manifestait en général dans le même sens que l'hélice dont je viens de parler, et on en avait conclu une règle pratique pour trouver *à priori* le sens de la rotation des cristaux; d'après cette règle, si l'on prend une plaque perpendiculaire à l'axe d'un cristal offrant l'hélice droite, par exemple, et qu'on l'interpose sur le trajet d'un rayon simple de lumière polarisée, reçu dans un analyseur quelconque, le plan de polarisation sera dévié à droite de l'observateur; en substituant au rayon simple un rayon de lumière blanche, et partant du plan primitif de polarisation, l'analyseur, tourné de gauche à droite ↗, fera voir la teinte bleue passant par une teinte violacée pour arriver au rouge, dans les substances semblables au quartz, où la succession des couleurs suit l'ordre de leur réfrangibilité; de même, si l'on opérait sur une plaque provenant d'un cristal à hélice gauche, l'analyseur devrait être tourné de droite à gauche ↖, pour produire la même série de phénomènes. C'est d'après cette définition que j'emploierai désormais la désignation abrégée de cristaux droits ou dextrogyres, et de cristaux gauches ou lévogyres; je ferai seulement remarquer, dès à présent, que la règle précédente est loin d'offrir toute la généralité qu'on lui supposait, car j'ai trouvé un ou deux plagièdres inférieurs, et plusieurs plagièdres supérieurs qui lui échappent complétement.

On sait que l'hémiédrie particulière au quartz, désignée sous le nom de *tétartoédrie* par les auteurs allemands, qui rapportent ce minéral au système hexagonal, consiste en ce que, dans les cris-

taux simples, les plagièdres *inférieurs* de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, comme ceux de la zone $p\ s\ e^2$, ne se présentent ordinairement que sur trois angles alternes du prisme à six faces, et d'un seul côté à la fois de l'observateur; le prolongement des troncatures ainsi produites ne détermine donc que la moitié du solide qui en résulterait sur un solide homoèdre du système rhomboédrique, ou le quart du solide considéré dans le système hexagonal. Ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que dans les innombrables combinaisons qu'affectent les cristaux enchevêtrés, rien n'est plus rare que de trouver le même plagièdre, à droite et à gauche sur une même face verticale. M. Rose a signalé l'existence de ce fait, fig. 50 de son Mémoire, sur de petits cristaux des îles Féroë, et sur des cristaux tapissant des druses dans des amygdaloïdes présumées du Brésil, qu'on peut regarder comme de l'améthyste incolore. D'après le savant professeur, le Musée royal de Berlin possède un échantillon du Saint-Gothard, offrant, comme le cristal du Dauphiné représenté par sa figure 25, un plagièdre x droit, et un gauche sur deux angles contigus; un autre cristal de Suisse, appartenant à la même collection, porte un plagièdre droit, et le même plagièdre gauche sur deux angles alternes.

Parmi les cristaux d'Europe que j'ai eus entre les mains, le cristal composé fig. 41, pl. II, est le seul qui paraisse annoncer la coexistence signalée par M. Rose; cette coexistence s'est, au contraire, montrée assez fréquemment sur de petites améthystes peu ou point colorées qui tapissent des géodes d'agathe rubanée, ou des stalactites de quartz prase venues récemment de l'Uruguay; seulement ces échantillons ne m'ont fourni que rarement des incidences pouvant conduire à la face x ou à une face très-voisine. Mes mesures les plus nettes se rapportent au plagièdre u et à un plagièdre nouveau $v_1 = (b^{\frac{3}{5}}\ d^1\ d^{\frac{3}{4}})$, que je décrirai plus loin.

Désirant m'assurer si, comme l'a admis M. Rose, la présence d'un même plagièdre inférieur, placé à droite et à gauche sur une

même face verticale, annonce toujours la pénétration de deux individus de rotations contraires, j'ai fait tailler perpendiculairement à l'axe quelques-unes de ces améthystes, dont les enchevêtrements n'étaient pas visibles à l'extérieur, et j'ai vu, par leur aspect dans la lumière polarisée, qui rappelle confusément celui des améthystes à six secteurs triangulaires dont il sera question à la fin de ce Mémoire, qu'elles se composaient de plages dextrogyres et de plages lévogyres irrégulièrement assemblées.

Un examen de ce genre qui présenterait encore plus d'importance serait celui des cristaux transparents du Brésil. On sait, en effet, que c'est surtout dans ces cristaux, employés presque exclusivement par les opticiens, qu'on rencontre si souvent des plaques offrant deux rotations égales et contraires, qui se neutralisent suivant une ligne droite; on sait aussi que c'est en étudiant ces plaques avec soin que M. Soleil père est parvenu, en 1845, à reproduire artificiellement le phénomène des lignes neutres par l'application, suivant un plan parallèle à une face de la pyramide, de deux plaques de même épaisseur, mais de rotations inverses; malheureusement, malgré toutes mes recherches chez les lapidaires de Paris et de Londres, il m'a été impossible, non-seulement de me procurer un seul cristal complet offrant cette propriété, mais même d'obtenir aucun renseignement précis sur les sommets des échantillons qui ont fourni les plaques à deux rotations connues de tous les physiciens. Tout ce que j'ai pu savoir, c'est que ces sommets sont rarement entiers, ce qui se conçoit facilement pour des échantillons venus du Brésil en Europe dans des tonneaux ou dans des sacs, où le frottement use toutes leurs arêtes, et que, lorsqu'ils existent, ils sont presque toujours, pour économiser la main-d'œuvre, abattus par les ouvriers chargés du sciage des plaques qu'on veut extraire du cristal. Maintenant que j'ai appelé sur ce point l'attention des opticiens qui travaillent le quartz, j'espère qu'un heureux hasard permettra quelque jour d'étudier comparativement les plaques à deux rotations du Brésil et le sommet des cristaux d'où elles auront été extraites, comme

j'ai pu le faire pour les cristaux à rhombes contigus du comté de New-York et pour les améthystes incolores de l'Uruguay[1].

Cette comparaison serait d'autant plus intéressante, que, comme je l'ai dit plus haut, la relation qui paraît lier le sens de la rotation au sens de l'hélice formée par les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ n'existe même pas pour tous les plagièdres inférieurs de cette zone; de sorte qu'il serait plus exact, ainsi que le propose M. Haidinger[2], de considérer le rhombe s comme le principal élément gyratoire du quartz.

En effet, la figure 44 représente un petit cristal limpide de Carrare, dont une partie seulement est bien conformée, le reste ayant été produit par une cristallisation gênée dans son développement; deux angles solides alternes de la partie complète offrent à la droite de l'observateur le rhombe s et le plagièdre x; mais en même temps, sur une des faces verticales e^2 qui porte x droit, on voit à gauche une face assez nette et bien mensurable, dont l'incidence sur e^2, quoique un peu forte, ne peut se rapporter qu'au plagièdre v de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ ou à une face très-voisine de celle-là. Au-dessus de ce plagièdre paraît exister encore une bordure très-étroite, dont la mesure s'accorderait assez bien avec celle de x; mais la réflexion qu'elle m'a fournie était tellement vague que je ne la cite qu'avec doute.

J'ai déjà montré que, grâce à l'irrégularité des pénétrations intérieures, les phénomènes développés par la lumière polarisée dans des plaques de quartz peuvent offrir des différences notables, suivant la hauteur du cristal où ces plaques ont été prises. Pour

[1] J'ai été à même d'examiner, pendant l'été de 1854, chez M. Garritt, lapidaire à Londres, quatre tonneaux remplis des quartz incolores du Brésil qui sont employés par plusieurs opticiens anglais pour faire des verres de lunettes; je n'ai trouvé dans cette immense quantité d'échantillons qu'une trentaine de cristaux ayant conservé leurs faces et leurs arêtes plus ou moins usées, mais cependant encore reconnaissables; aucun de ces cristaux ne portait un même plagièdre dans deux directions opposées.

[2] *Ueber den Pleochroïsmus und die Krystallstructur des Amethystes.* Mémoire lu à l'Académie des sciences de Vienne en mars 1854.

me mettre à l'abri de cette cause d'erreur, j'ai fait polir par les deux bouts le cristal fig. 44, et j'ai vu avec étonnement qu'il ne présentait aucune trace d'enchevêtrement; sa structure intérieure est parfaitement homogène, et la rotation qu'il possède est, dans toute son étendue, droite comme le plagièdre x, et par conséquent opposée au plagièdre v.

La description des plagièdres supérieurs que j'ai trouvés sur les cristaux de Traverselle montrera, en outre, que la plupart de ces faces se présentent à la fois des deux côtés de l'observateur, et qu'elles font indifféremment partie de la spirale qui tourne avec ou contre la rotation; elles ne peuvent donc nullement indiquer le sens de ce phénomène.

Si l'on ne devait avoir recours qu'à la position de la face rhombe s, par rapport aux faces primitives p, on serait cependant fort souvent embarrassé, dans la pratique, pour déterminer à *priori* le sens de la rotation des cristaux de quartz; car le sommet de ces cristaux est loin d'être toujours complet, et même, lorsque cela a lieu, on sait que sur les échantillons de certaines localités les faces p et $e^{\frac{1}{3}}$ ne présentent pas de signes distinctifs bien saisissables : lorsque la face s n'est accompagnée par aucun plagièdre, sa relation avec le sens gyratoire du cristal peut donc être très-difficile à fixer d'une manière certaine; dans ce cas, le meilleur moyen de déterminer cette relation consiste à rechercher s'il n'existe pas, au-dessus d'une face verticale, quelque rhomboèdre inverse caractérisé par des stries fines ou par un certain dépoli qui ne se voient presque jamais sur les rhomboèdres directs; la position des faces $e^{\frac{1}{2}}$ une fois reconnue à l'aide de ces rhomboèdres, qui manquent rarement sur les cristaux du Brésil, par exemple, on saura que le cristal est dextrogyre ou lévogyre, suivant que le rhombe s se trouvera à droite ou à gauche d'une face p, placée devant l'observateur.

Si les arêtes qui séparent les faces de la pyramide de celles du prisme vertical ne portaient aucune troncature, on pourrait en-

core, en général, se laisser guider par les légers sillons ou les saillies allongées qui existent souvent sur les faces s, parallèlement à leur intersection avec p; malheureusement ce parallélisme ne peut pas être regardé comme un guide infaillible, car des cristaux du Brésil, dans lesquels la lumière polarisée ne décèle aucune mâcle, m'ont aussi offert des stries parallèles à l'axe de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$.

Les plagièdres inférieurs de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, connus jusqu'ici, étaient au nombre de quatre :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.	
$v = (b^{\frac{5}{16}}\ d^1\ d^{\frac{5}{8}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{7}}\ h^1)$	hémièdre.
$x = (b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$	homoèdre?
$y = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{4}}\ h^1)$	hémièdre.
$u = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$	homoèdre.

J'ai, en outre, trouvé des indications plus ou moins nettes des cinq suivants :

? $v_4 = (b^{\frac{11}{24}}\ d^1\ d^{\frac{11}{12}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{35}}\ h^1)$	hémièdre.
$v_3 = (b^{\frac{7}{16}}\ d^1\ d^{\frac{7}{8}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{23}}\ h^1)$	hémièdre.
$v_2 = (b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{17}}\ h^1)$	hémièdre.
? $v_1 = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{10}{13}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{12}}\ h^1)$	homoèdre?

ou bien

$v_1 = (b^{\frac{3}{8}}\ d^1\ d^{\frac{3}{4}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{11}}\ h^1)$	hémièdre.
$\sigma = (b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{2}{7}}\ h^1)$	homoèdre.

Le plagièdre v, cité par Miller, paraît très-rare; je ne l'ai pour ma part trouvé que sur deux cristaux du Brésil, dont l'un ne peut donner, à cause de sa grosseur, que des mesures un peu incer-

taines, et sur une améthyste de Sibérie. Les incidences fournies par cette améthyste et par le petit cristal de Carrare, fig. 44, dont j'ai parlé ci-dessus, conduiraient à modifier légèrement le symbole adopté par Miller, qui deviendrait, en se simplifiant : $v = (b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{2}{3}})$, ayant pour correspondant hexagonal $(b^1\ b^{\frac{1}{6}}\ h^1)$; la face représentée par ce signe fort simple ferait avec e^2 un angle un peu plus grand que celui qui est donné par Miller : la forme même du symbole de cette face fait voir qu'il y aurait zone entre une face inférieure du rhomboèdre primitif p, le prisme symétrique $k_1 = (b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, la face v et le rhomboèdre e^3; mais cette zone n'a jamais été observée directement. Le symbole hexagonal correspondant au signe rhomboédrique qu'on trouve dans le traité de Brooke et Miller, indiquerait au contraire une zone composée des faces $v\ a^1\ \delta\ \tau_4$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$? \ v_4 = (b^{\frac{11}{24}}\ d^1\ d^{\frac{11}{12}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{35}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face, qui ne s'est trouvée que sur deux angles d'un petit cristal du Brésil, de forme analogue à certains cristaux du Dauphiné, et sur un cristal jaune de la même localité appartenant à la collection du Muséum, présente quelque incertitude dans ses incidences; elle ne semble pourtant pas pouvoir se confondre avec la suivante : toutefois, comme son signe rhomboédrique est assez compliqué, je ne la cite qu'avec quelques doutes.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$v_3 = (b^{\frac{7}{16}}\ d^1\ d^{\frac{7}{8}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{23}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face, un peu plus commune que la précédente, sur de petits cristaux limpides du Dauphiné, du Brésil et du Valais, est souvent légèrement arrondie; par suite, la mesure de ses angles offre quelques variations. Cependant, comme les limites extrêmes entre lesquelles oscille cette mesure s'éloignent très-notablement

des nombres trouvés pour v_4, on peut admettre à peu près avec certitude le signe un peu compliqué $(b^{\frac{7}{16}}\ d^1\ d^{\frac{7}{8}})$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$v_2 = (b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{17}}\ h^1)$ hémièdre.

Ce plagièdre, beaucoup plus commun que les deux précédents, s'est rencontré sur le cristal gigantesque de Sibérie, fig. 36, sur le cristal du haut Valais, fig. 43, sur quelques cristaux du Dauphiné et sur un grand nombre de cristaux de Carrare et du Brésil; il est presque toujours légèrement arrondi, et, parmi les nombreuses mesures que j'en ai prises, quelques-unes sembleraient conduire au signe moins simple $(b^{\frac{9}{22}}\ d^1\ d^{\frac{9}{11}})$; mais le symbole hexagonal correspondant étant $(b^1\ b^{\frac{2}{31}}\ h^1)$, et, de plus, la plupart des observations s'accordant avec le calcul du premier signe, on doit évidemment s'arrêter à $(b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$: ce plagièdre paraît exister quelquefois à droite et à gauche de l'observateur sur une même face verticale de certaines améthystes du Brésil. Outre la zone à laquelle cette face appartient comme plagièdre, elle se trouve encore dans la zone inobservée $v_2\ t_6\ a^1$, ainsi que le prouve la forme de son symbole hexagonal.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? $v_1 = (b^{\frac{5}{18}}\ d^1\ d^{\frac{10}{13}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{12}}\ h^1)$ homoèdre?

Cette face, moins certaine que la précédente, ne s'est montrée que sur un cristal de Québec et sur un petit cristal d'améthyste de Sibérie. Le premier porte en outre, à l'un de ses sommets, les trois faces du rhomboèdre équiaxe b^1, et sur l'un des angles solides du prisme, le plagièdre n de la zone $p\ s\ e^2$; le second, dont les enchevêtrements se trahissent à l'extérieur, est probablement composé d'un cristal dextrogyre et d'un cristal lévogyre, car la face verticale qui porte v_1 à gauche de l'observateur, porte en

même temps, à sa droite, une autre face v de la même zone. Quelques petits cristaux d'améthyste incolore de l'Uruguay, dont j'ai parlé précédemment, offrent aussi, sur une même face verticale, deux facettes très-voisines de v_1, dont l'une fait partie d'une hélice *dextrorsum* et l'autre d'une hélice *sinistrorsum*. Les incidences de ces facettes conduisent au symbole fort simple $(b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$ plutôt qu'à $(b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{10}{13}})$, dont l'admission n'est rendue probable que par l'existence de son inverse n, plagièdre de la zone $p\ s\ c^2$. Suivant qu'on adoptera l'un ou l'autre de ces symboles, on voit que la face v_1 sera comprise dans l'une des deux zones formées par une face inférieure p, avec l'un des rhomboèdres $e^{\frac{13}{5}}$ ou $e^{\frac{8}{3}}$; aucune de ces deux zones ne s'est jusqu'à présent rencontrée sur les cristaux.

Une considération qui pourrait encore faire pencher vers le symbole que j'ai adopté ici, c'est qu'avec ce symbole, v_1 fait partie de la zone $n\ a^1\ v_1$, du reste également inobservée.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$x = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ homoèdre.

Ce plagièdre, qu'on trouve fréquemment sur les cristaux de presque toutes les localités, joue évidemment un rôle au moins aussi important que le rhombe s dans la cristallisation du quartz; car, outre les zones anciennement connues dont il fait partie, j'en ai trouvé beaucoup d'autres dont il forme un des membres essentiels.

M. Rose a cité dans son Mémoire, fig. 16, la zone $x\ e^{\frac{13}{5}}\ e^2$; fig. 17, la zone $x\ e^{\frac{4}{3}}\ e^{-\frac{4}{5}}$ très-commune sur les cristaux du Dauphiné; fig. 23, la zone x, $\mu = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$, $e^{\frac{8}{3}}$, et la zone $e^{\frac{4}{3}}$ supérieur, $n = (d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$ supérieur, x inférieur; enfin, fig. 28, la zone $x\ e^{\frac{7}{2}}\ e^{\frac{1}{2}}$. La zone $x\ \mu\ e^{\frac{4}{3}}$ se rencontre assez fréquemment sur des cristaux du Valais (fig. 31, pl. I).

Les nouvelles zones où j'ai rencontré x sont les suivantes :

x, $\lambda = (d^1\ d^{\frac{11}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre nouveau de la zone $p\ s\ e^2$, et $e^{\frac{9}{5}}$ (fig. 2, pl. I; fig. 35 et 36, pl. II).

x, $\lambda_1 = (d^1\ d^{\frac{29}{14}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre douteux de la zone $p\ s\ e^2$, et $e^{\frac{13}{8}}$ (fig. 45, pl. II).

x supérieur, n_1 inférieur, $n_1 = (d^1\ d^{\frac{7}{8}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre nouveau de la zone $p\ s\ e^2$, voisin de la face n de M. Rose, et $e^{\frac{8}{3}}$ inférieur (fig. 43, pl. II).

x supérieur, n_2 inférieur, $n_2 = (d^1\ d^{\frac{9}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre nouveau, voisin de n_1, et $e^{\frac{7}{4}}$ inférieur (fig. 80, pl. III).

e^2 droit, x droit, $e^{\frac{11}{4}}$, ou e^2 gauche, x gauche, $e^{\frac{11}{4}}$; j'ai déjà indiqué cette zone comme très-probable, en décrivant le rhomboèdre $e^{\frac{11}{4}}$; son existence a été tout à fait assurée par la découverte de deux nouvelles faces qu'elle comprend nécessairement :

L'une, $\alpha = (d^1\ d^{\frac{22}{27}}\ b^{\frac{11}{24}})$, forme une bordure très-nette entre e^2 et x, sur des cristaux du haut Valais (fig. 43 et 46, pl. II);

L'autre, $\Delta = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$, a été observée sur plusieurs cristaux de Carrare et sur un cristal de l'Oural (fig. 47, pl. II; fig. 69 et 72, pl. III).

$x\ \Pi_1\ e^{\frac{7}{2}}\ \varphi\ \mathrm{M}\ t\ \Psi\ e^{\frac{1}{3}}$; $\Pi_1 = (b^{\frac{3}{11}}\ d^1\ d^{\frac{3}{4}})$, face nouvelle sur un cristal de Viesch, en Valais : $\varphi = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$, face nouvelle sur les cristaux fig. 26 et 51; $\mathrm{M} = (d^1\ d^{\frac{1}{55}}\ b^{\frac{2}{57}})$, face nouvelle sur des cristaux d'Algérie; $t = (d^1\ d^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre supérieur de la zone $p\ s\ e^2$; $\Psi = (d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{9}}\ b^{\frac{1}{4}})$, face nouvelle sur le cristal fig. 30, pl. I.

$x\ \Xi\ e^{\frac{9}{4}}$; $\Xi = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$, face nouvelle, très-remarquable, sur le cristal du Brésil fig. 2, pl. I.

$x\ z_1\ z\ \Sigma\ e^{\frac{11}{9}}$; $z_1 = (b^{\frac{5}{17}}\ d^1\ d^{\frac{3}{5}})$ face nouvelle, sur un cristal du

Brésil (fig. 48, pl. II); $z = (b^{\frac{2}{9}}\ d^1\ d^{\frac{27}{44}})$, face nouvelle, sur quelques cristaux du Brésil (fig. 3, pl. I, et fig. 48, pl. II); $\Sigma = (b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$, face nouvelle, sur plusieurs cristaux du Brésil (fig. 3, pl. I).

$x\ \Sigma_1\ e^{\frac{21}{16}}$; $\Sigma_1 = (b^{\frac{18}{43}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$, face nouvelle sur un cristal du Dauphiné, et sur un cristal de localité inconnue.

$p\ \chi\ \chi_1\ \chi_2\ \chi_3\ x$; $\chi = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, face nouvelle sur le beau cristal du Brésil fig. 3, pl. I; $\chi_1 = (b^{\frac{1}{20}}\ d^1\ d^{\frac{1}{3}})$, face nouvelle sur le cristal gigantesque de Sibérie fig. 36, pl. II, et sur plusieurs cristaux du Brésil (fig. 50, pl. II); $\chi_2 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, face nouvelle sur le remarquable cristal du Brésil représenté fig. 50, pl. II; c'est à l'une de ces trois faces que doit s'appliquer le signe $(b^{\frac{1}{18}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$ proposé par Wakkernagel, pour une face que sa petitesse n'a pas permis de mesurer, et que M. Rose cite comme formant une bordure linéaire sur des cristaux de Suisse, du Dauphiné et du Jamtland; $\chi_3 = (b^{\frac{3}{20}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, face très-étroite, sur quelques cristaux du Tyrol (fig. 52, pl. II).

$k\ x\ \Phi\ a^1\ \tau_2\ \rho$; la très-grande rareté de a^1 et le peu de développement du prisme k ne permettent jamais de constater directement cette zone sur les cristaux; j'ai cependant cru devoir l'indiquer sur la projection sphérique pl. IV.

Les détails que je donnerai plus loin sur chacune de ces faces feront voir pourquoi j'ai adopté les symboles que je viens d'écrire, malgré la complication apparente de plusieurs d'entre eux.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$y = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{2}{3}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ hémièdre.

Ce plagièdre est beaucoup plus rare que le précédent et que le suivant; je l'ai trouvé sur des cristaux du Valais, du Dauphiné et d'Australie; de même que x il fait, avec le rhomboèdre primitif p, une nouvelle zone dont la troisième face $\phi = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$ ne

s'est rencontrée que sur les deux cristaux représentés fig. 26, pl. I, et fig. 51, pl. II; ce dernier cristal seul, portant une légère indication de la face y, ce n'est que par le symbole de φ que la zone dont je viens de parler a été découverte. Les autres zones où l'on puisse citer la présence de y ne sont guère reconnaissables que sur la projection sphérique pl. IV; ce sont : $d^1\ y\ e^{\frac{7}{2}}\ \varpi\ s\ e^{\frac{4}{6}}$, et $k_1\ y\ \varpi\ b^5\ a^1\ \Lambda\ \tau_1$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$u = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ homoèdre.

Ce plagièdre, beaucoup plus abondant que y, accompagne presque toujours x; ses faces sont ordinairement ternes ou piquetées, tandis que celles de x, quelquefois ondulées, sont toujours brillantes; son importance dans la cristallisation du quartz se rapproche de celle de x, car il fait aussi partie de plusieurs zones différentes; ainsi, outre la zone $u\ q\ e^{\frac{4}{3}}$, représentée sur la figure 28 de M. Rose, j'ai rencontré les suivantes :

$u, \varepsilon = (d^1\ d^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre de la zone $p\ s\ e^2$, et $e^{\frac{8}{7}}$, rhomboèdre nouveau (fig. 24 et 25, pl. I).

$u, w = (d^1\ d^{\frac{7}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre de la zone $p\ s\ e^2$ et $e^{\frac{6}{5}}$, rhomboèdre probable, inverse de $e^{\frac{7}{2}}$ (fig. 27, pl. I).

$u, \rho = (d^1\ d^{\frac{5}{8}}\ b^{\frac{1}{2}})$, plagièdre de la zone $p\ s\ e^2$, et $e^{\frac{13}{8}}$ (fig. 33, pl. II).

Dans la zone $e^2\ u\ e^{\frac{7}{2}}$, indiquée sur les figures 28, 31 et 32 du Mémoire de M. Rose, j'ai encore trouvé les trois faces nouvelles :

$$\iota = (d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{6}{13}}) \text{ (fig. 53 et 54, pl. II).}$$

$$\iota_1 = (d^1\ d^{\frac{6}{7}}\ b^{\frac{9}{19}}) \text{ (fig. 55, pl. II).}$$

$$\iota_2 = (d^1\ d^{\frac{10}{11}}\ b^{\frac{15}{31}}) \text{ (fig. 56, pl. II).}$$

De ces trois nouvelles modifications, c'est la première qui est

la moins rare et la mieux déterminée; la troisième est également certaine; la seconde est un peu douteuse.

Enfin, dans la même zone j'ai de plus rencontré :

$\psi = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{5}{16}})$ formant une troncature très-étroite sur l'arête d'intersection $\frac{e^{\frac{7}{2}}}{e^{\frac{7}{2}}}$, et $\Pi = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$, formant une bordure étroite entre u et $e^{\frac{7}{2}}$ (fig. 27, pl. I).

$p\ \Upsilon\ \Upsilon_1\ \Upsilon_2\ \varepsilon\ u$; $\Upsilon = (b^{\frac{1}{12}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$, face nouvelle sur un cristal transparent de Viesch en Valais; $\Upsilon_1 = (b^{\frac{1}{16}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$, face nouvelle sur un cristal du Valais (fig. 31, pl. I); $\Upsilon_2 = (b^{\frac{1}{18}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$, face nouvelle sur des cristaux du Tyrol (fig. 52, pl. II); $\varepsilon = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$ face nouvelle sur un petit cristal du Valais; cette zone est de la même espèce que celles que j'ai citées précédemment, entre la face p et les plagièdres x et y.

u supérieur, φ supérieur et p inférieur; cette zone, inobservée sur les cristaux, est facile à constater par la comparaison des symboles rhomboédriques des faces $u = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$ et $\varphi = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$.

Je ferai remarquer que u se trouve aussi compris dans la zone inobservée $k_2\ u\ t,\ a^1\ \eta\ \tau\ \mu$, ainsi que cela résulte de la comparaison des symboles hexagonaux de ces diverses faces.

Outre les zones nombreuses dont le plagièdre u fait partie, on peut encore citer parmi ses propriétés remarquables celle de faire partie à la fois, sur un même cristal, de deux hélices opposées, comme cela se voit sur certaines améthystes incolores de l'Uruguay dont j'ai déjà parlé plusieurs fois.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\sigma = (d^{\frac{1}{3}}\ d^1\ b^{\frac{1}{4}}) = (b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{3}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{7}}\ h^1)$ homoèdre.

Ce plagièdre, que je n'ai rencontré que sur le cristal composé de Traverselle (fig. 57, pl. II), et sur des cristaux enfumés d'Algérie semblables à la figure 29, pl. I, offre quelque incertitude

dans ses incidences, et peut être exprimé par plusieurs symboles assez simples; mais, comme le plus simple de tous est précisément l'inverse du plagièdre θ de la zone $p\ s\ e^2$, dont les angles rentrent d'ailleurs dans les limites entre lesquelles oscille la mesure de σ, j'ai cru devoir admettre le signe écrit ci-dessus.

Le symbole de σ est le premier terme d'une série pour laquelle l'expression générale $(b^x\ d^1\ d^{2x})$ devient $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$; or, pour un observateur qui placerait devant lui une face p du rhomboèdre primitif, tous les plagièdres exprimés par $(b^x\ d^1\ d^{2x})$ seraient situés sur l'angle solide latéral qui fait saillie en avant de la figure, tandis que ceux dont le signe est $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$ modifieraient l'un des angles latéraux qui se trouvent à droite et à gauche de cette figure; la notation de Lévy permet d'indiquer à l'œil ce changement de position, en écrivant le symbole $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$ sous la forme $(d^{\frac{x}{2}}\ d^1\ b^x)$, analogue à celle à laquelle peuvent se ramener tous les plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$.

2° Plagièdres supérieurs au rhombe s.

On n'avait jusqu'ici observé aucun plagièdre de cette catégorie; j'en ai trouvé douze, dont trois ne peuvent être donnés qu'avec doute, à cause de la difficulté de prendre exactement leurs mesures. Les voici, rangés suivant la grandeur de l'angle qu'ils font avec $e^{\frac{1}{2}}$; tous ont des symboles de la forme $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$, que j'écrirai $(d^{\frac{x}{2}}\ d^1\ b^x)$.

	Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
σ_1	$=(d^{\frac{7}{23}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$	$(b^{\frac{5}{6}}\ b^1\ h^{\frac{5}{6}})$ homoèdre.
σ_2	$=(d^{\frac{1}{3}}\ d^1\ b^{\frac{2}{3}})$	$(b^{\frac{3}{5}}\ b^1\ h^{\frac{4}{5}})$ hémièdre.
?? σ_3	$=(d^{\frac{3}{5}}\ d^1\ b^{\frac{4}{3}})$	$(b^{\frac{5}{7}}\ b^1\ h^{\frac{5}{7}})$ hémièdre.
? L	$=(d^{\frac{1}{2}}\ d^1\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{2}})$ homoèdre.
τ	$=(d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{5}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{3}})$ homoèdre.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.	
$\tau_1 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{7}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{6}}\ b^1\ h^{\frac{1}{6}})$	hémièdre.
$\tau_2 = (d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{2}{5}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{5}}\ b^1\ h^{\frac{1}{5}})$	hémièdre.
$\tau_3 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{7}{11}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{6}}\ b^1\ h^{\frac{1}{6}})$	hémièdre.
$\tau_4 = (d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{6}{13}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{7}}\ b^1\ h^{\frac{1}{7}})$	hémièdre.
$\tau_5 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{10}{17}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{9}}\ b^1\ h^{\frac{1}{9}})$	homoèdre?
? $\tau_6 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{7}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{11}}\ b^1\ h^{\frac{1}{11}})$	hémièdre.
$\tau_7 = (d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{5}{9}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{14}}\ b^1\ h^{\frac{1}{14}})$	hémièdre.
ou bien:		
? $\tau_7 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{13}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{17}}\ b^1\ h^{\frac{1}{17}})$	homoèdre?

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.	
$\sigma_1 = (d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$	$(b^{\frac{5}{6}}\ b^1\ h^{\frac{6}{6}})$	homoèdre.

Ce plagièdre forme une face étroite, mais très-nette, sur le cristal d'Australie (fig. 34, pl. II); cette face paraît faire zone entre p et un rhomboèdre fortement strié, qui peut être $e^{\frac{11}{7}}$ ou $e^{\frac{13}{8}}$, de sorte que σ_1 peut avoir pour signe $(d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$ ou $(d^{\frac{6}{13}}\ d^1\ b^{\frac{8}{13}})$; malheureusement, les doutes qui existent sur le choix à faire entre ces deux symboles ne peuvent pas être complétement levés par la mesure seule des angles de cette face; car, malgré son éclat et sa netteté, il est impossible de faire concorder ses incidences sur p et sur $e^{\frac{1}{2}}$; les observations, faites avec le plus grand soin et répétées plusieurs fois, m'ont en effet donné comme moyenne; $e^{\frac{1}{2}} : \sigma_1 = 154° 22'$, nombre qui ne diffère que de 2 minutes de celui que fournit le calcul du premier symbole $(d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$, tandis que $p : \sigma_1 = 150° 16'$ se rapproche beaucoup plus du calcul du second symbole que de celui du premier. Il ne m'a pas été pos-

sible de trouver à quoi peut tenir la différence de 22 minutes qui existe entre l'observation et le calcul de ce premier signe; toutefois, comme la zone $e^{\frac{1}{2}}$, σ_1, s, e^2 est facile à établir rigoureusement sur le goniomètre, à cause de la netteté des faces qui la composent, et comme la réflexion sur σ_1, dans le sens de cette zone, est un peu plus brillante que dans le sens de la zone $p\ \sigma_1$, c'est au rhomboèdre $e^{\frac{11}{7}}$ et au signe qui en découle pour σ_1, que j'ai cru devoir m'arrêter. Ainsi que je l'ai déjà dit précédemment, en citant le rhomboèdre $e^{\frac{11}{7}}$, la zone entre le rhomboèdre douteux, la face σ_1 et p, ne peut guère être constatée qu'à l'œil; il est donc très-possible que cette zone ne soit pas géométrique, et qu'on ait le rhomboèdre $e^{\frac{13}{8}}$ avec le symbole $\sigma_1 = (d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\sigma_2 = (d^{\frac{1}{3}}\ d^1\ b^{\frac{2}{3}})$	$(b^{\frac{3}{5}}\ b^1\ h^{\frac{3}{5}})$ hémièdre.

Ce plagièdre, aussi rare que le précédent, ne s'est également trouvé que sur un petit cristal d'Australie; quoiqu'il paraisse bien rapproché de σ_1, il m'a offert sur $e^{\frac{1}{2}}$ et sur p des incidences si précises et si constamment différentes de celles de σ_1, qu'on peut l'admettre à peu près avec certitude. Le cristal qui présente cette nouvelle face porte aussi sous une des faces $e^{\frac{1}{2}}$ un rhomboèdre un peu plus net que celui du cristal fig. 34, pl. II; sa mesure ne permet d'hésitation qu'entre les deux rhomboèdres voisins $e^{\frac{13}{8}}$ et $e^{\frac{5}{3}}$; il est d'ailleurs facile de constater, aussi bien à l'œil que sur le goniomètre, qu'il n'y a pas zone entre ce rhomboèdre, la face σ_2 et p; ce serait le rhomboèdre $e^{\frac{3}{2}}$, inobservé sur le cristal en question, qui se trouverait dans la zone $\sigma_2\ p$. La projection sphérique pl. IV donne l'indication de cette zone, ainsi que celle de la zone également inobservée $k_9\ \sigma_2\ a^1$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
?? $\sigma_3 = (d^{\frac{3}{5}}\ d^1\ b^{\frac{3}{4}})$	$(b^{\frac{5}{7}}\ b^1\ h^{\frac{5}{7}})$ hémièdre.

Le cristal d'Ala (fig. 58, pl. II), qui fait partie de la collection du Muséum, offre une face composée de petits gradins, dont l'ensemble appartient à la zone $e^{\frac{1}{4}}\ s\ c^2$; il paraît aussi à l'œil que cette face forme une bande à côtés parallèles, entre p et un rhomboèdre fortement strié, qu'une mesure approximative m'a engagé à regarder comme $e^{\frac{4}{5}}$; les deux zones ainsi déterminées permettent donc de calculer le symbole de la face douteuse, sans que l'observation directe de ses incidences puisse infirmer ou confirmer le résultat du calcul; en conséquence, je range cette face parmi les modifications douteuses du quartz, quoique la forme de son symbole hexagonal montre qu'elle fait partie d'une même zone avec les faces σ, a^1 et θ.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? L $= (d^{\frac{1}{2}}\ d^1\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{3}})$ homoèdre.

Ce symbole très-simple s'applique à une face observée sur plusieurs cristaux de Traverselle (fig. 59, pl. II); cette face est toujours brillante, mais tellement arrondie, qu'en mesurant son inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$, on peut indifféremment s'arrêter à l'un des trois nombres approximatifs 161° 35′, 164° 45′, ou 168° 40′, suivant que l'on prend le bord inférieur, la partie centrale ou le bord supérieur de la réflexion allongée qu'elle fournit; si l'on ne considère que les deux nombres extrêmes, on peut admettre, sous toutes réserves, une combinaison résultant de deux faces qui passeraient insensiblement l'une à l'autre, et dont la première étant L $= (d^{\frac{1}{2}}\ d^1\ b^1)$, la seconde serait $\tau = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^1)$.

On remarquera que le signe de L représente un plan situé dans la zone inobservée $p\ e^1$, et coupant l'axe vertical au même point que les faces culminantes du rhomboèdre primitif; ce plan

constitue une sorte de limite entre les plagièdres précédents, qui tous rencontrent l'axe au-dessus du sommet, et les plagièdres suivants, dont ce sommet forme un point d'intersection commun. L'existence de L paraît d'ailleurs assurée par une seconde zone dont elle fait partie, et qui comprend les faces : $k_4\ \varepsilon\ \mathrm{L}\ \gamma_1\ b^{\frac{3}{2}}\ a^1\ b^{\frac{1}{2}}\ \gamma\ t_2\ \Delta$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{5}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^1\ h^{\frac{1}{3}})$ homoèdre.

Il est arrivé, sur un assez grand nombre de cristaux de Traverselle, qu'une face arrondie, analogue à L, n'offrait, dans la mesure de ses angles, que des écarts de 1 à 2 degrés; aussi, en choisissant parmi les vingt-sept cristaux qui portent cette face, ceux où l'incidence de τ sur $e^{\frac{1}{2}}$ oscille autour de 167 degrés et ceux où cette incidence oscille autour de 168 degrés, on trouve que la moyenne des mesures faibles diffère assez peu de la moyenne des mesures fortes, puisque la première est égale à 167° 41′, et la seconde à 168 degrés. Des incidences semblables se présentent sur le beau cristal du Brésil (fig. 60, pl. II), qui appartient à la collection de l'École des Mines; de plus, sur deux cristaux de Traverselle, dont un est représenté fig. 10, pl. I, la face τ paraît en zone entre p et $e^{\frac{5}{5}}$; l'existence de cette face est donc beaucoup plus certaine que celle de L; son signe même me semble parfaitement assuré; car, si mes propres mesures sur les cristaux de Traverselle présentent quelque incertitude, M. Dana, dans la dernière édition de son *Traité de Minéralogie*, cite, sur un cristal de Milk-Row, N. Y. un plagièdre dont l'inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$ est de 167° 40′, nombre précisément égal à celui que donne le symbole attribué à τ; il est bon de remarquer que le plagièdre τ se trouve dans la zone $k_2\ \mu\ \eta\ a^1\ t_3\ u$ que j'ai déjà citée.

La face douteuse L et la face certaine τ ne se sont jamais présentées sur un même cristal des deux côtés à la fois de la face $e^{\frac{1}{2}}$;

parmi les vingt-sept cristaux sur lesquels la face τ a été observée, huit offraient cette modification à droite, et dix-neuf à gauche de $e^{\frac{1}{2}}$; j'ajouterai que dans l'hélice formée par les plagièdres dont elle fait partie, la face τ s'est montrée de même sens que la rotation; de sorte que, comme cette face est supérieure à s, les cristaux dextrogyres, par exemple, portent τ à la gauche de l'observateur qui aurait devant lui la face $e^{\frac{1}{2}}$, vers laquelle s'incline ce plagièdre, et réciproquement pour les cristaux lévogyres.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_1 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{7}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{6}}\ b^1\ h^{\frac{1}{6}})$ hémièdre.

Cette face, souvent assez nette, a été observée sur quarante-six cristaux de Traverselle, tantôt à droite, tantôt à gauche de $e^{\frac{1}{2}}$, mais toujours dans le même sens sur chaque cristal, que ce cristal fût extérieurement simple ou composé : la moyenne générale de soixante-huit mesures ne différant que de 2 minutes de l'angle fourni par le calcul, l'existence de cette face et son symbole ne laissent aucune incertitude; sur sept cristaux portant τ_1 dont j'ai reconnu la rotation, ce phénomène s'est toujours manifesté dans le sens de l'hélice à laquelle appartient τ_1, et par conséquent dans un sens opposé à sa position relativement à $e^{\frac{1}{2}}$; le symbole de τ_1 montre que cette face ferait partie de la zone latérale p, $e^{\frac{1}{7}}$ qui n'a pas encore été observée; la projection sphérique pl. IV fait aussi voir que τ_1 est comprise dans la zone $k_1\ \Lambda\ a^1\ b^5\ \varpi\ y$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_2 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{2}{5}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{5}}\ b^1\ h^{\frac{1}{5}})$ hémièdre.

Ce plagièdre, trouvé sur six cristaux de Traverselle, est assez net pour qu'on puisse répondre de ses incidences à quelques minutes près, de sorte que son existence paraît assurée; il s'est montré, sur les six cristaux qui le portent, à la droite de $e^{\frac{1}{2}}$; et

quoique aucun de ces cristaux n'ait été taillé, comme le cristal fig. 61, pl. II, et un autre cristal non figuré portent à la fois τ_1 et τ_2 en opposition, il est clair, d'après ce que je viens de dire sur le sens de l'hélice qui renferme τ_1, que τ_2 appartient à une hélice contraire à la rotation du cristal.

De même que pour la face précédente, je n'ai jamais rencontré la zone $p\ \tau_2\ e^{\frac{2}{3}}$, indiquée par le symbole de τ_2; j'en dirai autant de la zone $k\ p\ \tau_2\ a^1\ \Phi\ x$.

Un petit cristal limpide de New-York m'a offert une facette légèrement arrondie, dont l'inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$ paraît comprise entre celles de τ_1 et de τ_2; comme aucun symbole simple ne correspondrait à la moyenne de ces deux incidences, il est probable que la face du cristal de New-York doit se rapporter à τ_2.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_3 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{7}{11}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{6}}\ b^1\ h^{\frac{1}{6}})$ hémièdre.

Ce plagièdre, assez fréquent sur les cristaux de Traverselle, possède quelquefois assez de netteté pour que ses incidences ne présentent pas de trop grandes oscillations; la moyenne générale de dix-huit mesures, prises sur seize cristaux, a donné pour l'inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$, 173° 31′, nombre qui diffère seulement de 3 minutes de l'angle calculé; la notation de cette nouvelle face présente donc autant de certitude que celle de τ_1; à l'exception d'un seul cristal, qui malheureusement a été perdu, et que je n'ai pas pu soumettre par conséquent à un examen approfondi, tous les échantillons où j'ai trouvé τ_3 ne portaient cette face que d'un seul côté de $e^{\frac{1}{2}}$. Le cristal fig. 11, pl. I, qui a été taillé, et un certain nombre de cristaux portant τ_3 en opposition avec τ ou τ_1, prouvent que cette face fait, comme τ_2, partie d'une hélice opposée au sens de la rotation. J'ajouterai, comme pour les deux faces précédentes, que je n'ai jamais observé la zone $p\ \tau_3\ e^{\frac{7}{11}}$ indiquée par le symbole rhomboédrique de τ_3, et que la même remarque

peut s'appliquer à la zone $\tau_3\ a^1\ \varphi$ qui nous est révélée par la forme de son symbole hexagonal.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_4 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{13}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{7}}\ b^1\ h^{\frac{1}{7}})$ hémièdre.

Ce plagièdre s'est montré sur dix-huit cristaux de Traverselle; la moyenne de vingt-deux mesures assez concordantes est égale à 174° 31′; elle offre donc une différence de 10 minutes avec le nombre fourni par le seul symbole simple qui puisse être attribué à τ_4; mais pour cette face, comme pour toutes celles qui ne donnent pas une réflexion parfaitement nette, une pareille différence n'a rien d'étonnant, et son admission est évidemment préférable à celle d'un signe cristallographique trop compliqué : comme les faces τ_3 et τ_4 ont des inclinaisons sur $e^{\frac{1}{2}}$ très-voisines, je ne les aurais pas distinguées l'une de l'autre, si elles ne s'étaient présentées que sur un ou deux cristaux; mais les dix-huit mesures de τ_3 ayant toujours donné des nombres compris entre 173 et 174 degrés, et les vingt-deux mesures de τ_4 des nombres compris entre 174 et 175 degrés, je n'ai pas cru devoir les rapporter à une même modification. La face τ_4 ne s'est jamais trouvée sur un même cristal que d'un seul côté à la fois de $e^{\frac{1}{2}}$; cependant tous les cristaux où on l'a rencontrée, portant en opposition avec elle une face τ ou τ_1, comme le fait voir la figure 10, pl. I, elle appartient, sur ces cristaux, à une hélice de direction contraire à celle de la rotation; tandis que, sur un des cristaux qui ont été taillés, elle semble faire partie d'une hélice de même sens que ce phénomène; il est vrai que ce dernier cristal n'est pas simple, et que la face τ_4 n'y est pas parfaitement assurée.

L'examen du symbole hexagonal de τ_4 montre que cette face détermine avec la base a^1 une zone dans laquelle entrent les deux faces très-rares v et δ citées par Miller.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_5 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{10}{17}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{9}}\ b^1\ h^{\frac{1}{9}})$ homoèdre?

Cette face s'est présentée sur quatorze cristaux de Traverselle, et elle a fourni des mesures assez constantes; la moyenne de vingt et une observations ne diffère que de 2 minutes du nombre calculé d'après le symbole; sur deux des cristaux où j'ai observé ce plagièdre, il existe à droite et à gauche de la même face $e^{\frac{1}{2}}$; il est donc certain, comme le font voir du reste plusieurs cristaux taillés, et, entre autres, le cristal fig. 14, pl. I, que la rotation se fait indifféremment dans la direction de l'hélice qui comprend τ_5 ou dans une direction contraire; le plagièdre τ_5 serait en zone avec une face p postérieure et le rhomboèdre inverse $e^{\frac{10}{17}}$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$? \ \tau_6 = (d^{\frac{1}{3}} \ d^{\frac{4}{7}} \ b^1)$	$(b^{\frac{1}{11}} \ b^1 \ h^{\frac{1}{11}})$ hémièdre.

Les mesures qui conduisent à ce symbole ont été obtenues sur quatorze cristaux de Traverselle; leur moyenne diffère de 13 minutes du nombre calculé : aussi cette modification me semble-t-elle moins certaine que la précédente et que la suivante; cependant, comme vingt-quatre observations m'ont fourni des nombres constamment compris entre 176 et 177 degrés, j'ai cru devoir signaler l'expression qui paraît faire passage entre τ_5 et τ_7. Le signe hexagonal de τ_6 fait voir que cette face ferait partie de la zone inobservée $k_2 \ t_5 \ a^1$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\tau_7 = (d^{\frac{1}{3}} \ d^{\frac{5}{9}} \ b^1)$	$(b^{\frac{1}{14}} \ b^1 \ h^{\frac{1}{14}})$ hémièdre.

Cette face s'est montrée sur dix cristaux de Traverselle avec une inclinaison sur $e^{\frac{1}{2}}$, toujours supérieure à 177 degrés; on ne peut donc pas douter qu'elle ne diffère réellement de τ_5, et même sur certains cristaux, comme sur celui qui est représenté fig. 8, pl. I, il ne paraît pas possible de la confondre avec τ_6. En examinant ce cristal (fig. 8) très-remarquable par son hémitropie, on voit qu'il porte à son sommet supérieur trois faces τ_7, deux à

gauche et une à droite de $e^{\frac{1}{2}}$, et qu'à son sommet inférieur il en porte seulement une à gauche de $e^{\frac{1}{2}}$; quant aux faces notées τ_6, il y en a trois à droite et une à gauche de $e^{\frac{1}{2}}$. Le cristal fig. 12, pl. I, montre aussi un τ_6 droit et un gauche; par conséquent, les faces τ_6 et τ_7 se trouvent indifféremment à droite et à gauche de $e^{\frac{1}{2}}$, et quelquefois elles sont de sens contraire sur un même cristal; l'hélice dans laquelle elles se trouvent ne peut donc pas être en rapport avec la rotation.

La moyenne des mesures de τ_7 surpasse de 14 minutes le nombre calculé d'après le symbole écrit ci-dessus; mais comme ce nombre se rapproche des quatre ou cinq observations les moins incertaines, je l'ai préféré à celui qui résulterait du symbole $(d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{11}}\ b^1)$; ce signe, qui s'éloigne encore un peu plus de la moyenne que le premier, aurait le seul avantage de trouver son inverse dans la zone $p\ s\ e^2$: or, en discutant la probabilité du rhomboèdre $e^{\frac{10}{17}}$, j'ai dit que certains cristaux où l'on peut admettre ce rhomboèdre offriraient des plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$ correspondant aux plagièdres τ_6 et τ_7 de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, si l'on remplaçait le rhomboèdre inverse $e^{\frac{10}{17}}$ par le direct $e^{\frac{10}{7}}$. Les cristaux fig. 5, 6, 7, 8 et 9, pl. I, sont dans ce cas; mais, outre les raisons que j'ai exposées précédemment, ce qui m'a confirmé dans la pensée que les faces de ces cristaux doivent être prises telles que je les ai indiquées sur mes figures, c'est que j'ai toujours trouvé les incidences de τ_7 un peu plus faibles que celles du plagièdre qui lui correspondrait dans la zone $p\ s\ e^2$. J'ajouterai que le symbole adopté ici offre encore l'avantage de placer τ_7 dans une zone qui comprendrait les faces $\Pi_1\ a^1\ \alpha$.

En résumant les observations que je viens de présenter sur chacun des plagièdres supérieurs de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, on voit que des huit faces de cette espèce, dont la position relative à $e^{\frac{1}{2}}$ a été

déterminée sur des cristaux de rotation connue, τ et τ_1 sont les seules qui paraissent faire partie d'hélices de même sens que ce phénomène. Comme je l'ai déjà indiqué à la page 441, on ne peut donc pas généraliser la règle qui suppose la rotation connue, quand on connaît la direction de l'hélice comprenant tous les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et il est plus exact de dire qu'un cristal sera dextrogyre ou lévogyre, suivant que la face rhombe se trouvera à la droite ou à la gauche de l'observateur qui regarderait devant lui la face primitive p, portant ce rhombe sur l'un de ses angles latéraux.

Si la face rhombe n'existait pas, on pourrait en général, sans crainte de se tromper, remplacer les indications qu'elle fournit par celles de l'un des plagièdres inférieurs u, y, x, $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$; seulement rien ne prouve que des cristaux de quelque nouvelle localité encore inconnue ne viendront pas un jour atténuer la valeur de ces indications, en montrant, dans la disposition des plagièdres inférieurs, la même incertitude que j'ai fait remarquer pour les plagièdres supérieurs.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\beta = (d^{\frac{7}{20}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$	$(b^1\ b^{\frac{2}{7}}\ h^{\frac{2}{9}})$ hémièdre.

Cette face, que je n'ai pas inscrite au tableau des plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, appartient pourtant encore à cette même zone; seulement, au lieu de se trouver sur une des arêtes inférieures $\frac{e^2}{s}$ ou $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{s}$ de la zone, elle modifie l'arête supérieure formée par la rencontre d'une face $e^{\frac{1}{2}}$ et de son adjacente p; cette ligne fait donc partie des arêtes culminantes de la pyramide hexagonale. Pour indiquer la différence qui existe entre cette position et celle des plagièdres dont le symbole général est $(d^{\frac{1}{2}}\ d^x\ b^1)$, j'ai écrit la notation de β sous la forme $(d^{\frac{7}{20}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$; cette expression montre

que les longueurs $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{2}$, 1 doivent être prises sur les mêmes arêtes rhomboédriques et dans le même sens que les quantités correspondantes qui fixent sur le rhomboèdre primitif la position des plagièdres τ, τ_1, τ_2, etc. et celle de la face $e^{\frac{1}{2}}$.

J'ai trouvé la face β sur deux cristaux de Traverselle, représentés fig. 5, pl. I, et fig. 61, pl. II; je l'ai également rencontrée sur un long cristal incolore à deux sommets, et sur un gros cristal chlorité du Dauphiné; sur un petit cristal de Neffiez en Languedoc, qui m'a été communiqué par M. Fournet, et qui est représenté fig. 81, et sur plusieurs cristaux bipyramidés tapissant, avec de la célestine cristallisée, des fissures dans des boules de calcaire marneux compacte venant de Meillans, département de l'Isère; enfin le beau cristal limpide à double sommet fig. 76, pl. III, qui ressemble beaucoup à certains échantillons de Québec ou du comté de New-York, me l'a aussi offerte avec une grande netteté. J'ai dit précédemment, en discutant le rhomboèdre $c^{\frac{1}{17}}$, que M. Haidinger avait figuré une face semblable à β dans le catalogue inédit de l'ancienne collection Allan. La troncature produite par β est généralement assez unie et brillante, et la seule chose qui rende difficile la mesure exacte de ses incidences, ce sont les ondulations qui, presque toujours, couvrent les faces p et même les faces $e^{\frac{1}{2}}$ des cristaux où on la rencontre; cependant, en isolant les parties les plus nettes de ces faces, et cachant le reste à l'aide d'un enduit suffisamment terne, on arrive à des nombres bien concordants sur tous les échantillons : c'est toujours sur la face $e^{\frac{1}{2}}$ que j'ai trouvé la plus grande inclinaison de cette troncature. Les deux cristaux de Traverselle (fig. 5, pl. I, et fig. 61, pl. II), et le gros cristal chlorité du Dauphiné, non figuré, ne la portent que sur une seule arête; le cristal fig. 76, pl. III, l'offre sur une arête du sommet supérieur et sur deux arêtes alternes du sommet inférieur; enfin sur le cristal allongé du Dauphiné, qui n'a pas non plus été figuré, la modifi-

cation remplace trois arêtes de l'un des sommets, dont deux contiguës; ces deux dernières facettes ont leur plus grande inclinaison sur une même face $e^{\frac{1}{2}}$; la troisième, au contraire, fait un angle de 171 degrés avec la face opposée à celle-ci, face qui devrait être regardée comme appartenant au rhomboèdre p, si le cristal était simple; mais l'existence de deux faces rhombes sur deux angles adjacents du prisme hexagonal, et de nombreux indices d'enchevêtrements prouvent que ce cristal est composé, et que, par suite, on peut considérer la face en question comme une face $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}$ retournée; il est donc probable que β ne possède pas son inverse, mais qu'elle peut exister, tantôt sur les six arêtes du sommet, tantôt sur trois seulement de ces arêtes, et qu'elle présente ainsi une ressemblance de plus avec quelques-uns des plagièdres supérieurs que je viens de décrire. Le cristal de Neffiez (fig. 81, pl. III), nous montre β en zone avec une nouvelle face Λ, et le prisme e^2. On pourrait peut-être admettre pour β les symboles rhomboédrique et hexagonal $(d^{\frac{6}{11}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ et $(b^1\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{5}})$ un peu plus simples que ceux que j'ai adoptés; mais alors l'incidence $\beta\ e^{\frac{1}{2}}$ est égale à 171° 14′, nombre un peu trop fort, quand on le compare à toutes les observations directes : de plus, comme je le ferai voir plus loin, le signe de Λ, qui satisfait à la zone $\beta\ e^2$, devient bien compliqué.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\mathrm{H} = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$	$(b^1\ b^{\frac{3}{14}}\ h^{\frac{3}{17}})$ hémièdre.

Un très-gros cristal du Piémont, sur lequel cette modification a été observée, a des dimensions telles, qu'il est impossible de mesurer aucune de ses incidences autrement qu'à l'aide du goniomètre d'application, et mieux à l'aide d'empreintes en cire d'Espagne; heureusement les faces de la combinaison dont H fait partie sont très-nettes et miroitantes, et ces empreintes fournissent des mesures très-exactes. L'angle solide qui porte cette

combinaison est représenté fig. 80, pl. III; il est tellement engagé dans le reste du cristal, qu'il est difficile de voir à quelles zones appartiennent les plans dont on mesure les inclinaisons mutuelles : aussi ai-je hésité longtemps sur le symbole qu'il convenait d'assigner à la face H. En effet, si l'on fait entrer comme éléments dans le calcul de ce symbole les angles plans, grossièrement appréciables au rapporteur, que forment entre elles les arêtes d'intersection des faces p, x et H, on est conduit à une face $(d^{\frac{0}{13}}\ d^{\frac{1}{17}}\ b^1)$, qui n'est comprise dans aucune des zones connues du quartz, mais dont toutes les incidences s'accordent bien avec l'observation directe. Si, au contraire, en considérant que le signe hexagonal de cette face est rendu tout à fait improbable par sa complication inusitée, on admet une erreur de 2 à 3 degrés dans la détermination des angles plans, l'emploi des seuls angles dièdres conduit à une troncature située sur l'arête de la pyramide, en opposition avec β, puisque sa plus grande inclinaison a lieu sur p. Cette troncature pourrait être considérée comme exactement inverse de β, si ses angles avec p et avec x se mesuraient moins nettement : aussi, quoique les incidences de H diffèrent seulement d'environ 1 degré des incidences correspondantes de l'inverse de β, dont la notation rhomboédrique serait $(d^{\frac{2}{15}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$, je crois qu'on ne doit pas chercher à établir de relations entre les faces β et H, jusqu'à ce que de nouvelles observations, faites sur de petits cristaux à plans bien miroitants, viennent nous apprendre si elles doivent ou non jouer, l'une par rapport à l'autre, le même rôle que les deux faces suivantes :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\gamma = (d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$	$(b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{2}})$ homoèdre.
$\gamma_1 = (d^{\frac{2}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{2}})$ homoèdre.

On remarque sur le cristal enfumé du Brésil (fig. 64, pl. II), et sur le cristal incolore de la même localité (fig. 65, pl. II), deux

petites faces symétriquement placées sur deux des arêtes contiguës de la pyramide; ces faces sont donc situées, comme β et comme H, sur l'arête $\frac{p}{e^{\frac{1}{2}}}$ de la zone p, $e^{\frac{1}{2}}$, s, e^2, et, lorsqu'on les rapporte au rhomboèdre, elles doivent avoir chacune leur signe propre qui indique, l'un une face plus inclinée sur $e^{\frac{1}{2}}$ que sur p, l'autre, au contraire, une face plus inclinée sur p que sur $e^{\frac{1}{2}}$. Contrairement à la plupart des modifications du quartz, ces deux troncatures ne paraissent présenter ici aucune hémiédrie, et elles formeraient des modifications homoèdres dans le système hexagonal; en effet, tandis que dans ce système cristallographique la réunion des plagièdres ordinaires du quartz et de leurs inverses constituerait seulement un scalénoèdre moitié du solide qui serait produit, si le même cristal portait à la fois les plagièdres droits et gauches, les faces γ et γ_1 produiraient un didodécaèdre complet : car on peut supposer que ces faces existent sur les six arêtes de la pyramide, puisque nous les trouvons sur deux arêtes contiguës dans des cristaux dont l'apparence extérieure est géométriquement simple. Malheureusement, sur les deux cristaux fig. 64 et 65, les faces produites par ces troncatures sont étroites et arrondies, de sorte que, si leur existence est certaine, leur mesure présente beaucoup de difficultés; leur notation a été calculée en partant des incidences le plus rapprochées possible de la moyenne des observations, tout en conservant une grande simplicité aux signes rhomboédrique et hexagonal; ces signes sont écrits dans le même sens que celui de β, afin de faire également ressortir la position des faces γ et γ_1 sur le rhomboèdre primitif. Les faces γ et γ_1 se trouvent en opposition de chaque côté de la base a^1 dans une zone qui comprend les faces k_4 ε L γ_1 $b^{\frac{3}{2}}$ a^1 b^3 γ t_2 Δ (voy. la projection sphérique pl. IV.)

Le gros cristal chlorité du Dauphiné sur lequel j'ai déjà cité la modification β, offre en outre, sur l'arête qui porte cette modification, une large troncature arrondie, dont la position et les

incidences ne peuvent se rapporter qu'à γ ; mais ici, contrairement à ce qui a lieu sur les cristaux du Brésil cités plus haut, cette face paraît être hémièdre[1].

V. — Plagièdres de la zone $p\,s\,e^2$.

Si l'on suppose l'axe principal du rhomboèdre primitif placé verticalement, tous les plagièdres de cette zone, inférieurs ou supérieurs à s, couperont les faces primitives p suivant une ligne

[1] Dans le courant de 1856 (voy. *Annales de Poggendorff*, tome XCIX), M. Websky a publié une note sur une série de faces analogues à mes formes γ γ_1 et H, qu'il avait observées sur des cristaux de Guttanen en Suisse, de Striegau, de Prieborn et de Järischau en Silésie, du comté Herkimer aux États-Unis, et d'une localité inconnue. Ces faces qui, d'après M. Websky, seraient au nombre de dix, sont plus ou moins arrondies, et elles ne paraissent pas susceptibles de mesures parfaitement exactes. Quelques-unes d'entre elles ayant des symboles assez compliqués, il est probable qu'elles ne doivent pas toutes être adoptées définitivement. Les plus simples formeraient des zones horizontales avec la base a^1, plusieurs des prismes dodécagones que j'ai observés, et certains plagièdres bien connus dans le quartz; leur existence paraît donc parfaitement assurée. Elles ont pour signe cristallographique :

1° $(d^{\frac{2}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ et $(d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$, en zone avec a^1 ε et k_4; ce sont ces deux faces que j'ai désignées par γ_1 et γ.

2° $(d^{\frac{1}{11}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ en zone avec a^1 u et k_2.

3° $(d^{\frac{1}{14}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ en zone entre a^1 y et k_1. Cette modification serait précisément l'inverse de ma face β représentée par le symbole $(d^{\frac{5}{11}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$, dont j'ai indiqué l'admission comme possible, en décrivant cette face page 466.

4° $(d^{\frac{1}{17}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ en zone entre $a^1 x$ et k : ce symbole est très-voisin de $(d^{\frac{1}{16}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$, que j'ai donné à ma modification H; aussi, quoique certaines incidences de cette modification aient pu, comme je l'ai dit, être mesurées avec assez d'exactitude pour qu'on doive chercher à rapprocher le plus possible les angles calculés des angles observés directement, il me paraît préférable d'adopter le signe de M. Websky, puisque avec ce signe la face H a l'avantage de faire partie de la zone $a^1\ x\ k_4$, et que les différences entre le calcul et l'observation des incidences rentrent dans la limite des erreurs possibles.

Enfin $(d^{\frac{1}{17}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ forme une zone avec a^1 et w. La série observée par M. Websky se termine par une face $(d^{\frac{1}{11}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$ qui fait, avec la face de la pyramide adjacente, un angle de 176° 59′.

partant de l'angle plan inférieur de ces faces, et aboutissant au milieu de l'un des deux côtés qui forment l'angle plan supérieur; par conséquent, d'après la notation de Lévy, l'expression $(d^1\ d^x\ b^{\frac{1}{2}})$, dans laquelle x est plus petit que l'unité, sera le symbole général de tous ces plagièdres, ce qui permettra de les distinguer immédiatement des plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$.

1° Plagièdres inférieurs à s.

Les plagièdres de cette première catégorie sont toujours plus ou moins profondément striés parallèlement à l'axe de leur zone, de sorte que leur mesure ne peut pas toujours se prendre avec une grande exactitude; ce caractère est si constant, qu'il empêche toute confusion entre les faces de la zone $p\ s\ e^2$, et celles de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et que dans certains enchevêtrements douteux on peut l'employer pour fixer la position relative des faces p et $e^{\frac{1}{2}}$.

Les plagièdres inférieurs connus jusqu'ici étaient les suivants :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\theta = (d^1\ d^{\frac{7}{12}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de σ.	$(b^1\ b^{\frac{6}{7}}\ h^1)$ homoèdre.
$\pi = (d^1\ d^{\frac{5}{14}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{6}}\ h^1)$ hémièdre.
$\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^1)$ hémièdre.
$w = (d^1\ d^{\frac{7}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{7}}\ h^1)$ hémièdre.
$q = (d^1\ d^{\frac{8}{17}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{8}}\ h^1)$ hémièdre.
$\mu = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de u.	$(b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$ homoèdre.
$n = (d^1\ d^{\frac{6}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{12}}\ h^1)$ hémièdre.

J'en ai en outre observé huit nouveaux, qui sont :

$N = (d^1\ d^{\frac{6}{15}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{11}{12}}\ h^1)$ hémièdre.
$N_1 = (d^1\ d^{\frac{3}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{2}{3}}\ h^1)$ hémièdre.

?? $\mu_1 = (d^1\ d^{\frac{7}{13}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{2}{7}}\ h^1)$ hémièdre.
$\mu_2 = (d^1\ d^{\frac{7}{19}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{6}{21}}\ h^1)$ hémièdre.
$\rho = (d^1\ d^{\frac{5}{8}}\ b^{\frac{1}{2}})$	inverse de x.	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ homoèdre.
$\lambda = (d^1\ d^{\frac{11}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{6}{23}}\ h^1)$ hémièdre.
? $\lambda_1 = (d^1\ d^{\frac{20}{44}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{5}{29}}\ h^1)$ hémièdre.
$n_1 = (d^1\ d^{\frac{7}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{1}{21}}\ h^1)$ hémièdre.
? $n_2 = (d^1\ d^{\frac{9}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$		$(b^1\ b^{\frac{1}{27}}\ h^1)$ hémièdre.

Je n'ai que peu de chose à dire des plagièdres déjà connus.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\theta = (d^1\ d^{\frac{7}{22}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{6}{7}}\ h^1)$ homoèdre.

Cette face, citée par Miller, se rencontre assez rarement; quoiqu'elle soit exprimée par un signe un peu compliqué, et qu'elle porte, comme les faces analogues de sa zone, des stries parallèles à son intersection avec le rhombe, les incidences que j'ai pu en prendre sur de petits cristaux du Brésil et du Valais ne me paraissent pas pouvoir conduire à un symbole différent; on a vu d'ailleurs, parmi les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ que la face σ, inverse de θ, offrait la notation très-simple $(b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{8}})$.

Le cristal fig. 51, pl. II, présente une bordure étroite, $\varkappa = (b^{\frac{7}{40}}\ d^{\cdot}\ d^{\frac{1}{2}})$, qui paraît en zone entre θ et le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\pi = (d^1\ d^{\frac{5}{14}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{5}}\ h^1)$ hémièdre.

Ce plagièdre est beaucoup plus abondant que le précédent; on le trouve sur des cristaux du Dauphiné, du Valais et de Carrare, et c'est surtout dans cette dernière localité qu'il se présente avec une grande régularité : ainsi la figure 47, pl. II, reproduit un cristal

de Carrare, dont les trois angles alternes portent le rhombe s, brillant et uni, et dont les trois autres angles sont tronqués par la face π, légèrement arrondie. J'ai déjà cité, au rhomboèdre $e^{\frac{5}{7}}$, la zone $e^{\frac{6}{7}}\ \pi\ e^{\frac{7}{8}}$, qui paraît exister sur le cristal fig. 26, pl. I.

Le cristal fig. 21, pl. I, nous montre aussi la face π, qui semble faire zone entre les deux rhomboèdres $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{11}{9}}$; mais les symboles de ces trois faces ne pouvant pas faire partie d'une même zone, et les deux rhomboèdres se déterminant exactement par leurs incidences, on est conduit à admettre que cette zone apparente n'est qu'une zone approximative et non une zone rigoureuse; en effet, si l'on part de $e^{\frac{7}{2}}$, qui ne peut être douteux, aucun rhomboèdre inverse, de signe à peu près simple, ne se trouve dans la zone $e^{\frac{7}{8}}\ \pi$; et si l'on regarde les deux rhomboèdres $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{11}{9}}$ comme parfaitement assurés, on ne trouve plus de plagièdre admissible dans la zone latérale de ces deux faces; les stries qui couvrent π et $e^{\frac{11}{9}}$ rendent d'ailleurs impossible la vérification de la zone sur le goniomètre.

Le même cristal, fig. 21, nous offre deux autres zones approximatives du même genre : la première entre $e^{\frac{7}{2}}$, θ et $e^{\frac{20}{19}}$; la seconde entre $e^{\frac{7}{2}}$, w et $e^{\frac{13}{19}}$. Cette particularité de trois faces qui se rencontrent en formant une zone excessivement approchée, sans qu'un léger changement dans leurs incidences et dans leurs symboles puisse rendre la zone exacte, paraît assez rare sur les cristaux de quartz; cependant, comme je l'ai rencontrée plusieurs fois, j'ai dû en conclure qu'une zone n'était parfaitement établie sur un cristal, que lorsque j'avais pu vérifier, à l'aide du goniomètre, si les trois faces qui la composent étaient rigoureusement parallèles à une même droite; on voit en effet que, dans certains cas, la rencontre d'une face bien déterminée, par deux autres faces dont les incidences ne laissent pas d'incertitude sur leur notation, peut se faire suivant deux lignes si peu inclinées l'une vers l'autre,

que l'œil est incapable à lui seul de saisir le petit défaut de parallélisme qu'elles présentent.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{2}{6}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face est assez commune sur les cristaux d'Ala, du Valais, etc. Le cristal déjà cité fig. 24, pl. I, appartenant à la collection du Muséum, fournit des mesures qui permettent de déterminer avec certitude les quatres rhomboèdres $e^{\frac{20}{19}}$, $e^{\frac{8}{7}}$, $e^{\frac{6}{5}}$, et $e^{\frac{4}{3}}$; entre ces rhomboèdres et le plagièdre u se trouve une petite bordure brillante où l'on peut distinguer, à l'aide d'une mesure assez approximative, les faces π, ε, q; de ces trois faces, les deux dernières seules sont situées rigoureusement dans les zones u, $e^{\frac{8}{7}}$ et $u\ e^{\frac{4}{3}}$; quant à la première, elle serait comprise dans la zone $u\ e^1$; mais le rhomboèdre $c^{\frac{20}{19}}$ est trop net pour pouvoir être confondu avec son voisin e^1, et l'on est amené, comme précédemment, à admettre encore sur ce cristal une zone très-approchée, mais non géométriquement rigoureuse, entre u, π et $e^{\frac{20}{19}}$.

Le cristal légèrement enfumé fig. 25, pl. I, offre aussi la zone $u\ \varepsilon\ e^{\frac{8}{7}}$; seulement sur ce cristal la détermination directe de $e^{\frac{8}{7}}$ est presque impossible, vu le peu de netteté de ce rhomboèdre.

Le cristal composé fig. 23, pl. I, offre la zone $e^{\frac{7}{3}}\ \varepsilon$ et $\mathfrak{a}^{\frac{2}{5}}$; j'ai déjà dit, en parlant du rhomboèdre $e^{\frac{5}{4}}$, que, sur de gros cristaux du Valais, la zone existait très-probablement entre les faces $e^{\frac{7}{5}}$, ε, et $e^{\frac{5}{4}}$.

La face ε ferait encore partie de la zone inobservée $k_4\ \varepsilon\ \mathrm{L}\ \gamma_1\ b^{\frac{1}{2}}\ a^1\ b^3\ \gamma\ t_2\ \Delta$.

Le cristal fig. 21, déjà cité plus haut, présente encore la zone approximative $e^{\frac{7}{2}}$, ε et $e^{\frac{13}{11}}$.

Sur le cristal fig. 27, pl. I, la troncature que j'ai indiquée par la seule lettre w, parce que c'est ce plagièdre qui y domine, porte aussi sur de petites longueurs, au-dessus et au-dessous de w, des portions appartenant à ε et à q.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$w = (d^1\ d^{\frac{7}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{7}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face est assez commune dans plusieurs localités; je l'ai trouvée sur des cristaux de Suisse, du Valais, du Brésil, d'Australie; outre la zone $e^{\frac{7}{2}}\ w\ e^{\frac{4}{3}}$, citée par M. Rose sur un cristal composé (voir fig. 30 de son Mémoire, et ma fig. 23, pl. I), j'ai trouvé, sur un gros cristal blanc de la collection du Muséum, la zone très-probable $\mathfrak{I}^{\frac{7}{2}}\ w\ u$; les stries qu'on remarque sur quelques parties du cristal fig. 27, pl. I, porteraient à croire que dans ce cristal le rhomboèdre inverse $c^{\frac{5}{4}}$ tient la place du rhomboèdre direct $\mathfrak{I}^{\frac{7}{2}}$; d'après ce que j'ai dit en discutant l'existence du rhomboèdre $e^{\frac{5}{4}}$, il en est sans doute de même sur quelques gros cristaux du Valais.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$q = (d^1\ d^{\frac{8}{17}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{8}}\ h^1)$ hémièdre.

La zone $u\ q\ e^{\frac{4}{3}}$ (fig. 28 du Mémoire de M. Rose), est assez commune sur les cristaux du Valais (fig. 22 et 24, pl. I); le cristal fig. 21 offre encore la zone très-approchée $e^3\ q\ e^{\frac{13}{10}}$; sur le cristal fig. 41, pl. II, la face q paraît se présenter dans deux directions opposées aux deux extrémités d'une même arête verticale. Cette particularité, analogue à celle que M. Rose a citée sur quelques cristaux du Dauphiné où l'on trouve un plagièdre x droit, et le même plagièdre gauche sur deux angles solides contigus ou alternes, tient sans doute ici à ce que le cristal en question offre une hémitropie particulière; en effet, tandis qu'en général

deux individus de même rotation se réunissent pour composer les assemblages hémitropes qui font voir les faces de même nom des deux sommets opposés situées de chaque côté d'une même face verticale, comme sur les figures 8, pl. I, 54, pl. II, et 69, pl. III, le groupe cristallin représenté par la figure 41 offre au sommet supérieur un cristal gauche et au sommet inférieur un cristal droit; ces deux cristaux eux-mêmes ne sont pas simples, mais les limites de leur enchevêtrement sont assez difficiles à saisir, et ce n'est que sur un petit nombre de faces que ces limites sont indiquées par de légers moirages ou des stries plus ou moins serrées.

Je viens de dire que le sommet supérieur appartenait à un cristal gauche : cela est vrai, en effet, pour la partie visible de la figure, dont un angle solide porte un rhombe placé à la gauche de l'observateur; mais, dans la partie invisible, l'angle solide opposé à celui-ci offre, au contraire, un plagièdre x droit qui semble annoncer la présence d'un individu dextrogyre : j'ai indiqué sur le dessin, à gauche de la face rhombe, une petite bordure située dans la zone $p\ s\ e^2$, que ses incidences rapprochent tout à fait de la face q; à droite du même rhombe existe une autre bordure très-étroite que je décrirai plus loin, et qui se trouve dans la zone du rhombe s et d'un rhomboèdre légèrement strié ayant pour symbole $e^{\frac{17}{7}}$.

Un seul angle solide du sommet inférieur est modifié; cet angle, situé sur la même arête que le rhombe supérieur dont il vient d'être question, porte lui-même un rhombe s qui serait à la droite de l'observateur, si l'on retournait complétement le cristal, et qui dans cette position aurait à sa droite une face q dans la zone $p\ s\ e^2$, et à sa gauche une face x dans la zone $a\ s\ e^2$: ce sommet appartient donc sans doute en entier à un cristal dextrogyre.

Il est d'ailleurs impossible de distinguer les faces p des faces $e^{\frac{1}{2}}$, car chaque face des deux sommets porte les mêmes ondulations et les mêmes saillies coniques, et l'on doit croire qu'elles

sont toutes de la même espèce, et qu'elles appartiennent exclusivement au rhomboèdre direct p et au même solide d : c'est seulement au milieu des faces verticales, et surtout au milieu des rhomboèdres subordonnés aux plans culminants, qu'on remarque, comme je l'ai dit tout à l'heure, de petites plages irrégulières, se distinguant du reste de la face par des stries plus fines et plus serrées, et produisant ainsi une sorte de moirage; celles de ces plages qui sont enchâssées dans le rhomboèdre $e^{\frac{17}{7}}$, paraissent avoir sur l'axe une inclinaison identique à celle de ce solide, dont la mesure se prend avec assez d'exactitude; elles doivent donc très-probablement être rapportées à l'inverse $e^{\frac{5}{3}}$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\mu = (d^1\, d^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}})$ inverse de u.	$(b^1\, b^{\frac{1}{2}}\, h^1)$ homoèdre.

Cette face est assez fréquente sur les cristaux enfumés du Valais et sur des cristaux du Brésil, de Québec et d'Australie; c'est surtout dans la zone $x\ \mu\ e^{\frac{5}{3}}$ (fig. 31, pl. I) qu'on la rencontre sur les échantillons du Valais; elle se trouve aussi comprise dans la zone $k_2\ \tau\ \eta\ a^1\ t_3\ u$, où elle occupe, par rapport à a^1, une position exactement inverse à celle de u.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$n = (d^1\, d^{\frac{5}{5}}\, b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\, b^{\overline{12}}\, h^1)$ hémièdre.

Cette face est au moins aussi rare que θ; je ne l'ai vue que sur quelques cristaux du Brésil (fig. 20, pl. I), sur un cristal de Québec et sur un cristal d'Australie; ce qu'elle offre de plus remarquable, c'est la zone $e^{\frac{6}{5}}$ supérieur, n supérieur, x inférieur, qui existe sur un cristal à deux sommets de Dissentis (Grisons), représenté par la figure 23 de M. Rose.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$N = (d^1\, d^{\frac{6}{15}}\, b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\, b^{\frac{11}{12}}\, h^1)$ hémièdre.

Ce nouveau plagièdre, dont l'inclinaison sur p se rapproche beaucoup de celle de s, forme sur quelques cristaux de Pfitsch en Tyrol, rapportés dernièrement par M. Hugard, de petites faces assez nettes pour qu'on puisse répondre de leurs incidences et de leur symbole (fig. 52, pl. II).

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$N_1 = (d^1\ d^{\frac{3}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{7}{9}}\ h^1)$ hémièdre.

Un cristal du Valais, de la collection du Muséum, m'a offert au-dessous de s une facette analogue à la précédente, mais faisant avec p un angle un peu moins obtus que celle-ci; le symbole choisi pour représenter la position de N_1 est assez simple, et les incidences qu'on en déduit se rapprochent suffisamment de l'observation directe; cette face s'est également trouvée sur le gros cristal du Brésil représenté fig. 49, pl. II.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
?? $\mu_1 = (d^1\ d^{\frac{1}{13}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{7}}\ h^1)$ hémièdre.

Deux cristaux d'Australie, dont la figure 34, pl. II, peut donner une idée, portent au-dessous de q, une face fortement striée, dont l'angle avec p est trop faible pour qu'on puisse la rapporter à μ; de plus, un cristal du Valais, de la collection du Muséum, représenté fig. 62, pl. II, offre une face cannelée qui paraît en zone entre c^2 et e ; seulement il n'est pas possible de s'assurer si la zone est exacte, à cause des stries qui couvrent les faces qui la composent; il faut donc se contenter d'admettre avec doute qu'il peut exister une face μ_1 moins inclinée sur p que μ, et dont le symbole est celui qui a été adopté ici.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\mu_2 = (d^1\ d^{\frac{7}{12}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{21}}\ h^1)$ hémièdre.

Deux cristaux enfumés, l'un de Viesch en Valais, et l'autre de

la vallée de Chamouni, m'ont offert une petite face fort nette dont les incidences sont bien représentées par le symbole que je viens d'écrire; cette face, facile à distinguer de ρ, est beaucoup mieux assurée que la précédente μ_1, qui pourrait bien se confondre avec elle. Sur un petit cristal incolore du Valais, j'ai observé le nouveau plagièdre μ_2 dans la zone latérale $e^{\frac{3}{2}}\ x$. Le symbole hexagonal de μ_2 nous montre que cette face se trouverait dans une même zone avec la base a^1 et avec Π, qui sera décrite plus loin.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\rho = (d^1\ d^{\frac{5}{8}}\ b^{\frac{1}{8}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ homoèdre.

Ce plagièdre, inverse de x, a été figuré à tort par Lévy dans son atlas de la description de la collection Turner; en effet, à l'époque où cet ouvrage a été publié, on ne savait pas distinguer des cristaux simples les cristaux enchevêtrés qui depuis ont été si bien décrits par M. Rose, et il est clair que les figures de Lévy qui portent l'inverse de x, se rapportent à des individus composés. Toutefois, j'ai été ramené à admettre la face ρ, par la zone $e^{\frac{13}{8}}\ \rho\ u$ indiquée sur le cristal du Valais (fig. 33, pl. II), et par des mesures directes prises sur des cristaux du Valais, d'Ala et d'Australie (fig. 34 et 35, pl. II, et fig. 48 et 51, pl. II): seulement, sur les échantillons où je l'ai observée, cette face est encore plus fortement striée que les autres plagièdres de la même zone, et je n'ai pu obtenir pour son inclinaison sur p, que des nombres oscillant entre 124 et 126 degrés; l'existence même de ρ ne me paraît donc pas douteuse, et les profondes cannelures qui la sillonnent parallèlement à l'axe de sa zone ne permettent jamais de la confondre avec x; la détermination directe de ses incidences laisse seule quelque chose à désirer; sur les cristaux d'Australie (fig. 34, pl. II), cette modification ne paraît pas hémièdre, car elle se trouve à la fois sur une même face verticale, à droite et à gauche de l'observateur. Un gros cristal du Brésil m'a offert, dans

la zone $p\ e^{-}$, un plagièdre strié que je n'ai pu déterminer directement; mais la zone qu'il paraît former avec x et avec le rhomboèdre strié $e^{\frac{11}{7}}$ me fait penser qu'on doit aussi le rapporter à ρ.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\lambda = (d^1\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{33}}\ h^1)$ hémièdre.

Je n'ai trouvé ce nouveau plagièdre que sur un cristal incolore du Valais (fig. 35, pl. II), sur un cristal enfumé gigantesque de Sibérie (fig. 36) tous deux appartenant à la collection du Muséum; sur deux cristaux incolores du Brésil, dont un est représenté fig. 2, et sur un cristal de Québec.

Le cristal fig. 35 est le seul qui m'ait permis de prendre des mesures un peu précises, et de constater l'exactitude de la zone $r\ \lambda\ e^{\frac{1}{2}}$, malgré les stries assez profondes qui rendent un peu incertaine la détermination du rhomboèdre $e^{\frac{11}{7}}$. Comme le signe hexagonal de λ est un peu compliqué, on peut chercher à simplifier son signe rhomboïdal; mais, à moins de s'écarter beaucoup des erreurs possibles dans la mesure des diverses incidences de cette face, on ne peut pas trouver de rhomboèdre d'un signe simple qui satisfasse à la zone $x\ \lambda$. Je décrirai dans quelques pages une face z_1 qui serait en zone avec λ et avec la base a^1.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$? \ \lambda_1 = (d^1\ d^{\frac{20}{63}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{29}}\ h^1)$ hémièdre.

Le symbole rhomboédrique de cette face, qui paraît un peu barbare au premier aspect, n'a pourtant pas un correspondant hexagonal plus compliqué que celui de λ. La face λ_1 se présente sur deux petits cristaux de l'Oisans (fig. 45, pl. II), où elle forme une bordure très-étroite entre x et un rhomboèdre strié, dont les incidences un peu incertaines peuvent convenir à $e^{\frac{13}{8}}$ ou à son voisin $e^{\frac{5}{3}}$; malheureusement cette bordure est si étroite, que ce

n'est qu'au moyen d'une loupe fixée en avant du goniomètre qu'on peut mesurer ses angles, dont, par conséquent, on ne répond pas à 1 degré près; cependant l'inclinaison sur p ayant toujours oscillé entre 123° 30′ et 124° 25′, je n'ai pas cru pouvoir la rapporter à l'incidence correspondante de λ, et j'ai admis la zone x, λ_1, $e^{\frac{13}{8}}$, qui exige le signe compliqué $(d^1\ d^{\frac{29}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$: toutefois, comme il est à peu près impossible de s'assurer d'une manière rigoureuse si λ_1 fait bien partie des plagièdres de la zone $p\ s\ c^2$, on peut aussi supposer que cette face appartient à la zone $x\ e^{\frac{5}{3}}$, mais qu'elle n'est pas exactement dans la zone $p\ s\ e^2$. Le signe le plus simple auquel on puisse alors arriver, en se rapprochant autant que possible des incidences observées, est $(d^1\ d^{\frac{11}{10}}\ b^{\frac{5}{11}})$, dont le correspondant hexagonal est le symbole inadmissible $(b^1\ b^{\frac{5}{24}}\ h^{\frac{5}{29}})$: on est donc conduit à admettre, ou bien que les mesures de λ_1 sont impossibles à prendre exactement, et que cette face se confond avec λ, ce qui paraît peu probable, ou bien que λ_1 est réellement un nouveau plagièdre à symbole compliqué. Si cette face était un peu plus nette, et si la dernière hypothèse pouvait être confirmée, on aurait à ajouter à la face α, dont il sera question plus loin, un nouvel exemple de la nécessité, dans quelques cas, de modifier la loi autrefois admise par Haüy sur la simplicité des rapports qui expriment la position des faces des cristaux.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$n_1 = (d^1\ d^{\frac{7}{6}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{21}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face paraît encore plus rare que la face n de M. Rose: je ne l'ai trouvée que sur le cristal du Valais (fig. 43, pl. II), et sur un cristal du Brésil, où elle est douteuse; comme la face n de M. Rose, elle est surtout remarquable par la zone qui existe entre n_1 inférieur, $e^{\frac{5}{3}}$ inférieur et x supérieur. La forme du symbole hexagonal de n_1 fait voir en outre que cette face serait dans une même zone avec les faces a^1 χ_1 et Σ.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? $n_2 = (d^1\ d^{\frac{9}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{17}}\ h^1)$ hémièdre.

Un très-gros cristal du Piémont, dont la figure 80, pl. III, représente un des angles solides, porte une petite bordure assez nette, en zone entre la face x supérieure et un rhomboèdre inférieur fortement strié, qui paraît devoir être rapporté à $e^{\frac{7}{4}}$; en admettant que la détermination de ce rhomboèdre soit exacte, on aurait une troisième face n_2 analogue aux deux précédentes n et n_1. Parmi les mesures directes qu'on peut prendre, à l'aide d'empreintes en cire d'Espagne, sur ce gros cristal, l'incidence de x sur $e^{\frac{1}{4}}$ est la seule qui conduise à admettre la zone x, n_2, $e^{\frac{1}{4}}$; car le nombre que j'ai trouvé pour x sur n_2 est assez incertain pour pouvoir être également bien rapporté à l'inclinaison de x sur n_1.

2° Plagièdres supérieurs à s.

Un petit nombre seulement des faces de cette seconde catégorie offrent les stries caractéristiques des plagièdres inférieurs que je viens de décrire; les autres sont plus ou moins arrondies, et il est souvent impossible de les distinguer des faces correspondantes de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$; c'est ce qui arrive notamment pour les plagièdres t_1, t_3, t_5 et t_6.

Le seul plagièdre supérieur reconnu par M. Rose est :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t = (d^1\ d^{\frac{7}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^{\frac{2}{3}}\ b^1\ h^{\frac{2}{3}})$ hémièdre.

Les six nouvelles faces analogues que j'ai trouvées sont les suivantes :

$t_1 = (d^1\ d^{\frac{5}{23}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de σ_1.	$(b^{\frac{5}{6}}\ b^1\ h^{\frac{5}{6}})$	homoèdre.
$t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de L.	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{2}})$	homoèdre?
$t_3 = (d^1\ d^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ.	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^1\ h^{\frac{1}{3}})$	homoèdre.

? $t_4 = (d^1\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ_5. $(b^{\frac{1}{9}}\ b^1\ h^{\frac{1}{9}})$ homoèdre?

$t_5 = (d^1\ d^{\frac{1}{14}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ_6. $(b^{\frac{1}{11}}\ b^1\ h^{\frac{1}{11}})$ homoèdre.

$t_6 = (d^1\ d^{\frac{1}{12}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inv. de $(d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{11}}\ b^1)$. $(b^{\frac{1}{17}}\ b^1\ h^{\frac{1}{17}})$ hémièdre.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t = (d^1\ d^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^{\frac{2}{3}}\ b^1\ h^{\frac{2}{3}})$ hémièdre.

Ce plagièdre n'est pas rare sur les cristaux de Baveno (fig. 30 du Mémoire de M. Rose), ni sur ceux du Valais (fig. 21 et 26, pl. I; 51 et 62, pl. III); en général très-étroit, je l'ai trouvé prenant une grande extension sur quelques cristaux d'Australie. Les cristaux fig. 21 et 26, pl. I, et fig. 51, pl. II, font voir la face t en zone entre $e^{\frac{1}{2}}$ et $e^{\frac{7}{2}}$. Les cristaux fig. 26 et 51 montrent en outre dans cette zone la face φ que j'ai déjà citée pour la seconde zone qu'elle forme avec p et y. La projection sphérique, pl. IV, fait voir que la face t serait aussi comprise dans la zone $k_6\ a^1$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t_1 = (d^1\ d^{\frac{5}{23}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de σ_1.	$(b^{\frac{5}{6}}\ b^1\ h^{\frac{5}{6}})$ homoèdre.

Ce plagièdre, moins incliné sur p que le précédent, s'est trouvé sur deux cristaux de Traverselle (fig. 59, pl. II), sur un cristal incolore de Fairfield (New-York), et sur un cristal limpide de la collection de M. Brooke, venant probablement du Dauphiné, et représenté par la figure 63, pl. II. La moyenne des incidences observées sur les cristaux de Traverselle et sur le cristal de M. Brooke s'accorde bien avec le calcul du signe $(d^1\ d^{\frac{5}{23}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de $\sigma_1 = (d^{\frac{7}{22}}\ d^1\ b^{\frac{7}{11}})$, dont le symbole a été discuté précédemment. Les mesures prises sur le cristal de Fairfield sembleraient conduire au symbole plus simple $(d^1\ d^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de $(d^{\frac{4}{13}}\ d^1\ b^{\frac{8}{13}})$; mais comme ce cristal est moins net que le cristal

limpide de M. Brooke, le signe $(d^1\ d^{\frac{5}{2\,3}}\ b^{\frac{1}{2}})$ me paraît devoir être préféré, malgré sa complication apparente.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de L.	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^1\ h^{\frac{1}{9}})$ homoèdre?

Cette face, très-rare, n'a été observée que sur le remarquable cristal du Brésil (fig. 60, pl. II); comme elle est très-étroite et un peu arrondie, sa mesure ne peut pas être prise avec une grande exactitude; cependant l'inclinaison sur p, calculée avec le symbole adopté ici, différant très-peu de la moyenne des observations, et ce symbole, fort simple lui-même, étant l'inverse de la face probable $\mathrm{L} = (d^{\frac{1}{2}}\ d^1\ b^1)$, discutée précédemment, tout porte à croire à la réalité de $t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{2}})$. La position réciproque des faces L et t_2 les place d'ailleurs symétriquement de chaque côté de la base a^1, dans la zone $k_4\ \Delta\ t_2\ \gamma\ b^3\ a^1\ b^{\frac{1}{2}}\ \gamma_1\ \mathrm{L}\ \varepsilon$, que j'ai déjà citée en décrivant L.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t_3 = (d^1\ d^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ.	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^1\ h^{\frac{1}{3}})$ homoèdre.

Cette face, aussi rare que la précédente, n'a également été trouvée que sur un cristal enfumé du Brésil (fig. 64, pl. II); comme elle n'est pas très-nette, sa mesure offre quelque incertitude; mais le signe fort simple $(d^1\ d^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$ étant exactement l'inverse du plagièdre $\tau = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^1)$, on peut admettre que c'est là le véritable symbole de t_3 : les incidences, calculées d'après ce symbole, sont d'ailleurs très-voisines de la moyenne des observations. t_3 étant l'inverse de τ, il est évident que dans la zone $k_2\ \mu\ \tau\ \eta\ a^1\ t_3\ u$, dont j'ai parlé en décrivant τ, ces deux faces seraient situées en opposition à égale distance de a^1.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? $t_4 = (d^1\ d^{\frac{1}{2\,6}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ_5.	$(b^{\frac{1}{9}}\ b^1\ h^{\frac{1}{9}})$ homoèdre.

Je n'ai trouvé l'inclinaison conduisant à ce symbole que sur deux cristaux de Traverselle, dont un est représenté fig. 59, pl. II; aussi je considérerais la face t_4 comme excessivement douteuse, si une incidence très-voisine de la sienne n'était donnée dans la nouvelle édition de la Minéralogie de Dana, comme s'étant présentée sur un cristal de la carrière dite Milk-Row (New-York).

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t_5 = (d^1\ d^{\frac{1}{24}}\ b^{\frac{1}{2}})$, inverse de τ_6.	$(b^{\frac{1}{11}}\ b^1\ h^{\frac{1}{17}})$ homoèdre.

Cette face, quoique légèrement arrondie, a fourni, sur les vingt-cinq cristaux de Traverselle où je l'ai trouvée, des mesures si constamment comprises entre 176 et 177 degrés, que son existence ne saurait être mise en doute. Le symbole que je lui ai attribué fournit un nombre qui diffère de 9 minutes de la moyenne des quarante et une observations qui ont été faites; mais comme ce symbole a l'avantage de représenter exactement l'inverse de la face τ_6, et que, d'après ce que je viens de dire, la face t_5 n'a pas une netteté parfaite, on peut très-bien négliger cette faible différence. Le plagièdre t_5 s'est montré sur un assez grand nombre de cristaux, à droite et à gauche d'une même face p; sur d'autres échantillons, on a d'un côté une face t_5, et du côté opposé une face t_6. La forme du symbole hexagonal de t_5 indique l'existence d'une zone entre les formes χ_2 t_5 a^1 et τ_6; et comme t_5 et τ_6 sont exactement inverses l'une de l'autre, ces deux faces se trouvent à des distances égales de chaque côté de la base a^1.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$t_6 = (d^1\ d^{\frac{1}{52}}\ b^{\frac{1}{2}})$	$(b^{\frac{1}{17}}\ b^1\ h^{\frac{1}{17}})$ hémièdre.

La mesure des inclinaisons sur p, qui m'a fait admettre ce symbole, ne m'a fourni que des nombres compris entre 177 et 178 degrés; la moyenne de quatre-vingt-quinze observations, faites sur quarante et un cristaux de Traverselle et sur un cristal

limpide de Little-Falls (New-York), diffère seulement de 7 minutes du nombre calculé; on peut donc croire que les erreurs provenant de la rondeur habituelle à cette face et à ses analogues se trouvent suffisamment palliées ici par la grande quantité des observations. J'ai dit, en décrivant le plagièdre τ_7, que la moyenne de ses incidences était notablement supérieure au nombre résultant du signe $(d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{9}}\ b^1)$, mais qu'elle serait cependant encore plus mal représentée par le symbole $(d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{11}}\ b^1)$. Cette dernière expression correspond, en effet, exactement dans la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ à la face t_6 de la zone $p\ s\ e^2$, et comme mes mesures m'ont toujours montré l'inclinaison de τ_7 sur $e^{\frac{1}{2}}$ inférieure à celle de t_6 sur p, je n'ai pas cru devoir regarder les deux modifications τ_7 et t_6 comme rigoureusement inverses l'une de l'autre. De même que t_5, la face t_6 s'est trouvée à la fois à droite et à gauche d'une même face p. La forme du symbole hexagonal de t_6 fait voir que cette face se trouverait en zone avec v_2 et a^1.

L'examen comparatif de toutes les faces que j'ai décrites jusqu'ici semblerait montrer que la tétartoédrie, attribuée au quartz par les minéralogistes qui rapportent la cristallisation de ce minéral au système hexagonal, n'est pas aussi générale qu'on le supposait. En effet, sur les cinquante-neuf rhomboèdres dont j'ai donné les symboles, dix-sept sont inverses les uns des autres, sans compter les deux rhomboèdres types p et $e^{\frac{1}{2}}$, et parmi les quarante-deux plagièdres, trois inférieurs sur vingt-quatre et cinq supérieurs sur vingt-trois ont des incidences égales dans les deux zones $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, $p\ s\ e^2$; or, dans le système hexagonal, les rhomboèdres directs et leurs inverses constituent des dodécaèdres à triangles isocèles homoèdres, et les plagièdres correspondants des deux zones forment, par leur réunion sur un même angle du prisme, des hémididodécaèdres simplement hémièdres; mais ces solides ne doivent être regardés que comme des abstractions géométriques, et toutes les observations tendent à prouver que leurs

diverses parties constituantes ne sont pas identiques sous tous les rapports.

Dans le système rhomboédrique, la combinaison des deux espèces de rhomboèdres ne produit, au contraire, que des pseudo-isocéloèdres composés de deux sortes d'éléments; quant aux plagièdres qui possèdent les mêmes incidences, mais des positions inverses, chacun d'eux appartient à un scalénoèdre droit ou gauche, dont les faces ne peuvent être combinées ensemble, puisqu'elles ne sont pas symétriquement placées sur la forme primitive. Ces scalénoèdres se réduisent presque tous par hémiédrie à un solide composé de six plans quadrangulaires, représentant seulement la moitié des véritables scalénoèdres qu'engendrerait la coexistence des plagièdres droits et gauches de la même espèce sur les angles latéraux du rhomboèdre; quelques faces pourtant, comme je l'ai fait remarquer dans la description détaillée de chacune d'elles, paraissent pouvoir former des scalénoèdres complets : telles sont les faces v, v_2, τ_3, τ_5, τ_7 dans la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, et les faces ρ, t_5 et t_6 dans la zone $p\ s\ e^2$.

J'ai signalé les différences physiques très-reconnaissables qui existent entre la plupart des rhomboèdres directs et inverses, et entre les plagièdres des zones $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ ou $p\ s\ e^2$; ces différences, en s'ajoutant à plusieurs autres raisons, me paraissent devoir être considérées comme un argument à peu près sans réplique en faveur de l'opinion anciennement émise par Haüy, savoir, qu'on devait regarder le rhomboèdre comme étant le type cristallin du quartz et celui de sa molécule.

VI. — Prisme hexagonal e^2 situé sur les angles latéraux du rhomboèdre primitif.

Cette face, combinée à la pyramide hexagonale qui se compose des faces des deux rhomboèdres inverses p et $e^{\frac{1}{2}}$, est certainement la forme dominante des cristaux de quartz de presque toutes

les localités; je n'ai donc rien à ajouter à ce qui en a été dit par tous les observateurs.

VI *bis*. — Base du prisme hexagonal a^1.

J'ai rencontré dans le cours de mes recherches une face excessivement rare, tronquant la pyramide hexagonale suivant un plan perpendiculaire à l'axe principal du rhomboèdre primitif, et ayant par conséquent pour symbole rhomboédrique a^1, et pour symbole hexagonal p. Deux cristaux seulement m'ont offert cette base, inobservée jusqu'à présent : l'un, incolore, vient probablement du Brésil; l'autre, noir, à peine translucide sur les bords, est d'une localité inconnue. Le premier, représenté fig. 66, pl. II, appartient à la collection de l'École des Mines; le second, représenté fig. 67, pl. II, est la propriété de M. Achard. Le cristal de l'École des Mines n'a que sa partie supérieure complète, la partie inférieure étant cassée; la base a^1 n'est pas assez unie pour se prêter à une mesure exacte; elle porte dans diverses directions des stries plus ou moins régulières, limitées par trois lignes légèrement saillantes, qui, du centre de l'hexagone, se dirigent assez exactement vers trois de ses angles alternes, et semblent, par conséquent, indiquer la projection des faces rhombes s; mais ce qui suffit pour prouver que cette base est bien réellement perpendiculaire à l'axe, ce sont les six bordures étroites comprises chacune entre deux lignes parallèles, qui représentent les intersections avec la base et avec les faces verticales e^2, de deux rhomboèdres dont je n'ai pu déterminer les symboles à cause des cannelures qui les recouvrent.

Autant que j'ai pu en juger à travers deux faces non polies, et dont l'une était simplement noyée dans de la térébenthine, ce cristal, vu dans la lumière blanche polarisée, paraît en partie composé de couches alternatives de rotations inverses, dont l'arrangement est difficile à bien saisir.

Le cristal fig. 67, pl. II, est plus complet que le précédent :

d'un côté, il offre la base hexagonale terne et granulée, bordée par des portions étroites des six faces de la pyramide, dont les incidences sont faciles à déterminer; de l'autre côté existe un sommet complet, formé par trois faces p, prédominantes et fortement ondulées, et par trois faces $e^{\frac{1}{2}}$ plus petites, et n'offrant que de légères ondulations. La disposition de ce cristal rappelle donc celle des cristaux pyro-électriques de zinc silicaté.

Outre les bases bien caractérisées dont je viens de donner la description, j'ai encore trouvé sur l'un des sommets d'un petit cristal bipyramidé, à prisme très-court, une face entièrement arrondie, qui, par sa position, ne peut évidemment appartenir qu'à la modification a^1; mais, vu son peu de netteté, je n'en parle que pour mémoire.

Haüy avait noté dans sa collection, comme cristaux basés perpendiculairement à l'axe, de petits cristaux comprimés en escalier, de Beralston en Devonshire; un examen attentif de ces cristaux, connus en Angleterre sous le nom de *babel-quartz*, m'a montré qu'on ne pouvait pas les considérer comme l'avait fait Haüy, et que leur forme rentrait dans celle des cristaux dont une face s'est développée anormalement aux dépens des autres.

La figure 68, pl. III, représente un cristal isolé de Beralston, dont la position respective des faces a été déterminée au moyen de mesures directes. On sait que les échantillons qui portent ces singuliers cristaux se présentent à l'observateur sous deux aspects bien différents : on a en effet, d'un côté, des cristaux prismatiques ordinaires à double sommet pyramidé, groupés confusément en masses géodiques; de l'autre côté, on voit parfaitement la trace de gros cristaux cubiques de fluorine, maintenant disparus, sur lesquels les cristaux prismatiques de quartz ont dû se déposer; c'est de l'empreinte produite par ce contact que sortent, sous forme de gradins polygonaux plus ou moins saillants, les cristaux que Haüy regardait comme basés; et c'est par la face p de la pyramide inférieure, invisible sur la figure 68, que ces cristaux

se fondent dans la masse qui s'est appuyée sur la fluorine : cette face est devenue tout à fait prédominante, et elle sert de support aux piles de lames décroissantes sur lesquelles on retrouve les autres faces p et une face $e^{\frac{1}{2}}$ de la même pyramide inférieure, trois faces e^2, et deux petites faces rhombes, dont une visible sur la figure, et enfin des faces de la pyramide supérieure, dont la seule visible est une face primitive p, parallèle à celle qui sert de point d'appui : cette face p offre toujours, jusque dans ses plus petites dimensions, la figure d'un hexagone ou d'un heptagone à côtés inégaux et assez irrégulier.

On rencontre souvent en Angleterre de gros cristaux de chaux fluatée, recouverts de petits cristaux de quartz très-brillants; lorsqu'on enlève un de ces petits cristaux, on trouve à sa place, dans la fluorine, une empreinte plus ou moins profonde, dont la forme rappelle tout à fait celle de la face libre du *babel-quartz*.

La même association de quartz et de fluorine produit du véritable *babel-quartz* dans des géodes qu'on trouve près de Saint-Yrieix (Haute-Vienne).

Parmi les gros cristaux du Brésil que j'ai examinés, j'en ai trouvé quelques-uns dont une des faces p portait des excroissances semblables à celles qui constituent le *babel-quartz* de Beralston; comme rien, dans ces cristaux, n'annonce un contact avec de la fluorine ou d'autres corps étrangers, il est possible qu'on puisse assigner à ce développement anormal, dans la direction d'une seule face, plusieurs causes différentes.

On a souvent noté, dans les collections, comme offrant la base, des cristaux dont les faces du sommet sont plus ou moins complétement remplacées par un seul plan, qui paraît quelquefois à l'œil presque perpendiculaire à l'axe. J'ai examiné un grand nombre de ces échantillons, et j'ai trouvé que ce plan, souvent assez régulier, pouvait être considéré comme produit, tantôt par le contact du quartz contre une surface unie, tantôt par une cristallisation dont une cause quelconque aurait gêné le libre déve-

loppement; ce qu'il y a de curieux, c'est que l'oblitération ne paraît pas s'être faite tout à fait au hasard : quelquefois, en effet, la face oblitérée est parallèle à une arête d'intersection de la pyramide avec le prisme e^2, comme on s'en assure facilement à l'aide des stries horizontales qui couvrent ce prisme; l'angle de cette face avec l'axe a été trouvé de 124 degrés sur un cristal, et de 102 degrés environ sur un second cristal; d'autres fois, et c'est le cas le plus fréquent, la face n'est plus parallèle à aucune des arêtes d'intersection de la pyramide et du prisme, mais sa plus grande inclinaison sur l'axe est encore comprise généralement entre 107 et 103 degrés. Il ne m'a jamais paru qu'il y eût là une loi assez constante pour être exprimée par des nombres, et je n'ai signalé ces faits que pour bien montrer qu'ils n'ont aucun rapport avec la base des cristaux fig. 66 et 67.

VII. — Prisme hexagonal d^1 sur les arêtes latérales du rhomboèdre primitif.

Ce second prisme, toujours très-subordonné au prisme e^2, est excessivement rare sur les cristaux de certaines localités, tandis que dans certaines autres il se rencontre assez fréquemment; parmi ces dernières, il faut mettre en première ligne Carrare et le Brésil. Je l'ai aussi trouvé sur un cristal de Traverselle, sur plusieurs cristaux d'Australie, et sur certains cristaux bruns d'Espagne, qu'on sait maintenant transformer par la chaleur en pierres d'une teinte d'un beau jaune d'or, assez estimées dans la joaillerie.

Quoique le prisme d^1 n'offre jamais que des faces étroites et un peu rugueuses, on parvient quelquefois à mesurer assez exactement son inclinaison sur e^2; on l'observe tantôt sur trois arêtes alternes, tantôt sur les six arêtes verticales du prisme e^2; la plupart des cristaux de Carrare le portent sur les trois arêtes alternes au-dessus desquelles ne se trouve pas le rhombe s, de sorte qu'il arrive souvent que d^1 est placé entre les deux faces d'un prisme

symétrique à six pans (fig. 69, pl. III); d'autres fois d^1 est sur les trois arêtes portant s, et le prisme symétrique modifie les trois autres arêtes (voy. le cristal du Brésil, fig. 60, et le cristal de Carrare, fig. 70); dans d'autres cas plus rares, d^1 existe à la fois sur les trois arêtes qui ne portent pas de prisme symétrique, et sur les arêtes portant le prisme, dans les intervalles où cette modification est interceptée (fig. 71).

D'après une communication récente que j'ai reçue de M. Miller, M. Rose a également observé le prisme d^1 sur les six arêtes verticales d'un cristal simple de Sundwich, près Iserlohn en Westphalie.

VIII. — Prismes symétriques à six ou à douze pans.

Les modifications de cette espèce, qui se rencontrent fréquemment sur les cristaux de Carrare, sont assez rares dans les autres localités; on les trouve cependant sur quelques cristaux du Brésil, de Sibérie et de Suisse; le plus généralement elles sont hémièdres, et ne modifient que trois des arêtes verticales du prisme c^2; cependant M. Haidinger a cité un cristal dont les six arêtes étaient modifiées à la fois. J'ai aussi trouvé dans la collection de l'École des Mines un petit cristal jaunâtre du Brésil, dont toutes les arêtes verticales portent une double troncature; seulement cette troncature ne paraît pas être la même sur les six arêtes, et quoique la mesure de ses incidences soit très-difficile à cause de la rondeur de ses faces et de leur peu de netteté, on peut constater sur trois arêtes un prisme à faces larges et arrondies, faisant avec e^2 un angle d'environ 164 degrés, tandis que sur les trois autres arêtes il y a un autre prisme à faces étroites inclinées sur e^2, de 166 à 167 degrés.

L'arrondissement des faces des prismes symétriques est un fait général, commun aux cristaux de toutes les localités; aussi leurs angles offrent-ils toujours un peu d'incertitude. Les nombreux cristaux de Carrare que M. le duc de Luynes a bien voulu mettre

à ma disposition m'ont fourni une série de mesures assez différentes les unes des autres; mais, comme j'ai pu prendre la moyenne d'un grand nombre d'observations, j'ai été conduit à admettre plusieurs prismes différents, dont les uns sont bien certains, et dont les autres sont seulement probables.

Le signe rhomboédrique général de tous ces solides est de la forme $(b^x\, d^1\, d^y)$, x et y étant des nombres fractionnaires liés entre eux par la relation $\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{y}$; leur signe hexagonal est, suivant la notation de Lévy, h^m, m se déduisant immédiatement du signe rhomboédrique au moyen de la formule :

$$m = \frac{2y+1}{1-y}.$$

Je vais indiquer rapidement les faces de cette espèce qui étaient connues jusqu'ici et celles dont j'ai constaté l'existence.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k = (b^{\frac{5}{11}}\, d^1\, d^{\frac{5}{7}})$	h^5 hémièdre.

Ce prisme, cité par M. Rose, et que j'ai retrouvé sur un cristal d'Australie, est celui dont les faces sont le plus inclinées sur le prisme e^2; il se trouve dans une zone formée par une face p inférieure et par le rhomboèdre $e^{\frac{11}{5}}$, mais cette zone n'a jamais été observée. Je ferai aussi remarquer que si le prisme k avait ses douze faces développées à la fois, deux quelconques de ces faces parallèles entre elles détermineraient, avec la base a^1, une zone dans laquelle seraient comprises les modifications $\rho\ \tau_2\ a^1\ \Phi\ x$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_1 = (b^{\frac{1}{3}}\, d^1\, d^{\frac{1}{2}})$	h^4 hémièdre.

Ce prisme offre des faces assez larges, arrondies et fortement cannelées, sur le cristal incolore du Brésil (fig. 60, pl. II); il ne modifie que trois arêtes alternes du prisme vertical, dont les trois

autres arêtes portent une face d^1 étroite, brillante et tellement arrondie, qu'on pourrait peut-être admettre qu'elle est accompagnée d'un autre prisme symétrique, faisant avec e^2 un angle de 153° 40′. Le symbole rhomboédrique de k_1 montre que cette face fait partie d'une zone jusqu'ici inobservée, qui se composerait d'une face p inférieure, du plagièdre $v = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{8}{3}})$, et du rhomboèdre e^1. Deux faces parallèles quelconques du prisme k_1 supposé dodécagone, formeraient avec a^1, comme celles du prisme k, une zone qui comprendrait les faces $\tau_1\ \Lambda\ a^1\ b^5\ \varepsilon\ y$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_2 = (b^{\frac{2}{7}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$	h^3 hémièdre.

Ce prisme est celui qui forme des troncatures très-étroites sur trois arêtes alternes du petit cristal jaunâtre du Brésil dont j'ai parlé ci-dessus; je n'ai retrouvé sur aucun autre échantillon les incidences qui conduisent au symbole adopté ici : c'est donc surtout sa grande simplicité qui rend son existence probable; le prisme k_2 se trouverait dans la zone inobservée, p inférieur, $k^2\ e^{\frac{?}{?}}$. On peut encore appliquer à ce prisme la même remarque qu'aux deux précédents; si ses douze faces étaient développées, chaque couple de faces parallèles serait situé dans une zone comprenant les formes $\mu\ \tau\ \eta\ a^1\ t_3\ u$, comme il est facile de le voir sur la projection sphérique pl. IV.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_3 = (b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{5}{3}})$	$h^{\frac{5}{3}}$ hémièdre.

C'est ce prisme qui accompagne le précédent sur le cristal du Brésil dont il vient d'être question, et qui forme des troncatures larges et arrondies sur les trois arêtes où k_2 n'existe pas.

J'ai retrouvé les incidences qui conduisent au symbole de k_3 sur un autre cristal jaunâtre du Brésil, faisant aussi partie de la collection de l'École des Mines; ce cristal, analogue au précédent,

ne porte également k_3 que sur trois arêtes alternes; les trois autres arêtes sont modifiées par un second prisme qui paraît devoir être rapporté à k_1; enfin les mêmes incidences ont été observées sur un fragment de cristal jaune du Brésil de la collection du Muséum.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_4 = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$	h^2 hémièdre.

Ce prisme, dont le signe est très-simple, se rencontre sur trois arêtes alternes du beau cristal à deux sommets du Brésil (fig. 50, pl. II), qui fait partie de la collection de la Sorbonne; seulement les faces n'en sont mensurables que sur une seule de ces arêtes, les deux autres étant entièrement arrondies et parsemées de petites pyramides saillantes qui ont la forme des clous dits *à tête de diamant*. Des trois autres arêtes de ce cristal, deux sont pures, la troisième est arrondie et cannelée obliquement par des lignes courbes.

Le prisme k_4 est celui que Lévy cite dans sa Description d'une collection de minéraux appartenant à M. Turner, et quoique je ne l'aie observé que sur le seul cristal que je viens de citer, la simplicité de son signe m'a engagé à l'adopter : il formerait zone avec une face inférieure p, et le rhomboèdre e^5. On remarquera aussi que deux faces parallèles de ce prisme supposé dodécagone déterminent avec a^1 une zone dans laquelle se trouve la nombreuse série des modifications ε L γ_1 $b^{\frac{3}{2}}$ a^1 b^3 γ t_2 Δ. (Voy. la projection sphérique pl. IV.)

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$c = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$	$h^{\frac{7}{4}}$ homoèdre.

Ce prisme a été depuis longtemps cité par M. Haidinger, comme existant à la fois sur les six arêtes de quelques cristaux de Suisse; ses incidences le placent entre le précédent et le suivant.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_5 = (b^{\frac{1}{7}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$	$h^{\frac{6}{5}}$ hémièdre.

Ce prisme est un des plus communs sur les cristaux de Carrare, et la double troncature qu'il forme sur trois arêtes alternes est presque toujours modifiée par le prisme d^1; la moyenne de son inclinaison sur e^2, obtenue à l'aide de nombreuses mesures prises sur six cristaux, ne diffère que de quelques minutes de l'angle fourni par le calcul; l'existence du symbole adopté ici est donc à peu près certaine.

Le cristal fig. 69, pl. III, qui porte k_5, offre une hémitropie fréquente dans les échantillons de Carrare; on voit en effet sur ce cristal que le prisme k_5, qui ne devrait exister que sur les trois arêtes alternes où ne se trouve pas le rhombe s, se montre cependant sur quatre des arêtes verticales; mais il est aussi facile de reconnaître, par l'inspection des faces du sommet et des plagièdres que porte le cristal, que, si la partie supérieure restant fixe, on fait décrire à la partie inférieure un angle de 60 degrés autour de l'axe, tout se trouve remis à sa place; les diverses parties de k_5, maintenant interrompues, viennent s'ajuster les unes au-dessus des autres, et le cristal reprend l'aspect d'un cristal régulier à deux sommets.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_6 = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{7}})$	$h^{\frac{5}{2}}$ hémièdre.

C'est ce prisme que portent le plus fréquemment, et avec les faces les plus nettes, les cristaux de Carrare; la moyenne générale d'un très-grand nombre d'observations faites sur neuf cristaux, ne diffère que dans les secondes de l'incidence fournie par le calcul; on peut donc regarder comme parfaitement assurées l'existence de k_6 et sa notation; cette face se trouverait dans la zone formée par une face p inférieure et par le rhomboèdre e^8. Elle déterminerait également avec la base a^1 une zone dans laquelle on rencontre le plagièdre t.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
?? $k_7 = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$	$h^{\frac{10}{7}}$ hémièdre.

Les angles qui conduisent à ce symbole ne s'étant trouvés que sur un seul cristal de Carrare, je ne le cite que pour mémoire, et je crois que ce prisme doit se confondre avec le suivant.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_8 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{9}})$	$h^{\frac{1}{8}}$ hémièdre.

Ce prisme a été trouvé sur quatre cristaux de Carrare, et la moyenne des nombreuses mesures prises sur ces cristaux ne diffère que de 1′ 30″ du nombre calculé d'après le signe cristallographique adopté ici; k_8 peut donc être rangé parmi les faces à peu près certaines; la zone inobservée jusqu'ici dont il fait partie contiendrait une face p inférieure, et le rhomboèdre e^{10} que j'ai cité sur les cristaux de Traverselle.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$k_9 = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\frac{1}{10}})$	$h^{\frac{1}{5}}$ hémièdre.

Cette face, trouvée sur cinq cristaux de Carrare et sur une arête du cristal fig. 21, pl. I, offre des incidences assez variables et voisines de celles de la face précédente, dont elles paraissent cependant différer sensiblement. Généralement l'inclinaison sur e^2 a offert une mesure un peu plus forte que le nombre fourni par le symbole attribué à k_9; mais comme ce symbole est le seul simple qui rentre dans les limites de l'observation, et que, d'ailleurs, un ou deux cristaux de Carrare ont donné des incidences à peine différentes des nombres calculés, l'existence de k_9 me paraît très-probable. J'ai cité sur les cristaux de Traverselle un rhomboèdre e^{11} qui composerait une zone latérale avec k_9 et une face p inférieure; la projection sphérique, pl. IV, montre aussi l'existence de la zone $k_9\ \sigma_2\ a^1$; ces zones, comme toutes celles où peuvent entrer les divers prismes symétriques que je viens de décrire, n'ont pu être constatées directement: cela tient, pour les unes, à ce fait assez remarquable que les cristaux de Carrare, sur lesquels se trouvent le plus grand nombre de prismes symétriques, ne présentent aucun

des rhomboèdres pouvant former des zones avec ces prismes et avec une face inférieure du rhomboèdre primitif, et pour les autres, à l'excessive rareté de la base a^1.

C'est au prisme k_9 qu'on devrait rapporter les faces douteuses qui, sur trois arêtes alternes du cristal fig. 60 dont j'ai parlé plus haut, semblent accompagner le prisme d^1, si l'on voulait regarder l'arrondissement de ce prisme comme produit par sa combinaison avec un prisme symétrique.

IX. — Faces isolées faisant partie d'une ou de deux zones avec les faces précédemment décrites.

1° Isocéloèdres.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\xi = (d^{\frac{1}{2}}\ \ d^{\frac{1}{5}}\ b^1)$	a^2 homoèdre.

Dans son Traité de Minéralogie, Haüy dit qu'il possède dans sa collection des cristaux de quartz hyalin violet d'Oberstein, offrant sur les arêtes de la pyramide une troncature qui constitue la variété à laquelle il a donné le nom d'*émarginée*. On sait que cette collection classique, après avoir passé de longues années en Angleterre, a été rachetée naguère par le Gouvernement français, et qu'elle se trouve maintenant déposée dans les galeries du Muséum; j'ai donc pu, grâce à l'obligeance de M. Dufrénoy, passer en revue tous les cristaux de quartz qu'elle renferme; mais, malgré le soin respectueux avec lequel on a recueilli et replacé tout ce qui restait des anciennes étiquettes de Haüy, il m'a été impossible d'apercevoir l'échantillon de la variété émarginée.

Après avoir cherché sans succès cette variété sur un très-grand nombre d'échantillons, j'ai été assez heureux pour la trouver indiquée sur des cristaux d'améthyste tapissant une plaque d'agate que je possédais depuis longtemps, et tout récemment je l'ai rencontrée en bordures très-nettes sur quelques améthystes violettes

qui garnissent l'intérieur de grandes géodes d'agate de l'Uruguay, et sur de petits cristaux d'un violet très-pâle, provenant des mines de cuivre du lac Supérieur, aux États-Unis; les riches filons de cuivre natif de cette localité ont été injectés dans un terrain de trapp et d'amygdaloïdes, qui offre une certaine analogie avec celui d'Oberstein; aussi y a-t-on rencontré fréquemment des rognons d'agate et des cavités tapissées par des cristaux de quartz et d'améthyste, par des cristaux de calcaire et par diverses zéolites, telles que la prehnite, l'apophyllite, la laumonite et l'analcime.

La face ξ s'étant montrée sur plusieurs arêtes contiguës de la pyramide, on ne saurait douter de l'existence d'une modification tangente aux six arêtes de cette forme, et produisant un isocéloèdre homoèdre; seulement cette modification doit être rangée, avec la troncature perpendiculaire à l'axe, parmi les faces les plus rares que présente la cristallisation du quartz.

Les petits cristaux bipyramidés, plus ou moins fortement colorés en rouge, qu'on rencontre dans les gypses de quelques parties des Pyrénées françaises et espagnoles, et qui sont généralement connus dans les collections sous le nom d'hyacinthes de Compostelle, ont assez souvent les arêtes de leur pyramide légèrement arrondies, de sorte qu'on croit aussi y entrevoir une légère troncature; mais cette troncature, si elle existe, est si étroite et offre si peu de netteté, qu'elle est tout à fait indéterminable; d'ailleurs ces cristaux, de quelque localité qu'ils proviennent, sont tous, malgré leur apparence de simplicité extérieure, des cristaux composés d'individus de rotations inverses et régulièrement enchâssés les uns dans les autres. On reconnaît facilement cette structure en examinant dans la lumière polarisée des lames coupées perpendiculairement à l'axe de ces cristaux (fig. 5, 6 et 7, pl. V): il est donc très-possible que l'arrondissement des arêtes de la pyramide ne tienne qu'à un assemblage imparfait des faces du sommet des divers individus enchevêtrés; certains cristaux, rapportés dernièrement du Tyrol par M. Hugard, offrent en effet, en creux, un phénomène analogue à celui que les hyacinthes pré-

senteraient en relief; la figure 52, pl. II, qui représente un cristal de Pfitsch, fait voir sur les six arêtes culminantes de petites gouttières dont l'intérieur plus ou moins ondulé laisse reconnaître les deux facettes étroites et brillantes qui forment l'angle rentrant; l'ensemble du cristal paraît donc résulter du rapprochement incomplet de six secteurs de 60 degrés groupés autour d'un cylindre ou d'un prisme central, de manière à laisser voir au sommet une face entière et des bandes étroites appartenant à deux faces adjacentes de la pyramide de chaque individu, dans lequel on peut supposer que les secteurs auraient été découpés.

On peut encore expliquer autrement l'arrondissement des arêtes pyramidales de tous les cristaux désignés sous le nom d'hyacinthes; je ferai en effet remarquer que, lorsqu'on fait digérer pendant quelques heures, suivant la méthode de M. Daniell[1], des cristaux de quartz dans de l'acide fluorhydrique étendu, l'attaque, très-

[1] C'est à J. Frederick Daniell que doit être attribuée la première idée d'analyser la structure des sels et des cristaux en les plongeant dans des dissolvants appropriés à la nature de chacun d'eux; car on trouve dans les Annales de chimie et de physique (1re série, tome II, année 1816), l'extrait d'un mémoire intitulé, *On some phenomena attending the process of solution and their application to the laws of crystallisation*, qui avait été inséré en entier et avec plusieurs planches dans *A Journal of Science and the Arts*, publié par la *Royal Institution of Great Britain*. Dans ce mémoire, M. Daniell décrit le dessin en creux et en relief qu'il a vu se produire:

1° Sur l'alun, le borax, le sulfate de fer, le sulfate de magnésie, le nitrate de potasse et quelques autres sels solubles, soumis pendant un certain temps à l'action de l'eau pure ou déjà en partie saturée par le sel en expérience;

2° Sur le carbonate de chaux, le carbonate de baryte et le carbonate de strontiane, traités par du vinaigre;

3° Sur un culot de bismuth fondu, et sur de l'antimoine soumis à l'acide nitrique faible;

4° Sur du nickel et sur de la galène traités par l'acide nitrique fort;

5° Enfin sur un cristal de quartz et sur une cornaline rouge plongés dans l'acide fluorhydrique étendu; au bout d'un séjour assez court du cristal de quartz dans cet acide, les faces du prisme et celles de la pyramide furent couvertes de figures rectilignes dont les côtés étaient en rapport avec la forme rhomboédrique de ce minéral; quant à la plaque polie de cornaline, elle présenta le même arrangement de couches concentriques qu'on connaît dans les agates, quoique rien n'indiquât d'abord cette structure.

inégale sur les différentes faces, se porte principalement sur les arêtes du sommet, que ces arêtes soient celles du rhomboèdre primitif, ou qu'elles représentent l'intersection des faces de la pyramide hexagonale entre elles ou avec la face rhombe; il en résulte, à la place de ces arêtes, une ou deux facettes cannelées, arrondies, quelquefois assez larges, dont la position, comme celle de certains plagièdres, paraît généralement en rapport avec le sens de la rotation, et qui offrent des interruptions indiquant les enchevêtrements des divers individus; quant aux faces qui concourent vers le sommet, elles sont le plus souvent beaucoup plus profondément altérées que les faces verticales; et comme les sillons creusés par l'acide n'ont pas la même orientation sur les faces p que sur les faces $e^{\frac{1}{2}}$, ces enchevêtrements y produisent des moirages très-variés. Des plaques taillées perpendiculairement à l'axe et soumises au même traitement, éprouvent des effets tout à fait analogues, et l'on peut suivre exactement, sur leurs faces travaillées, les contours des pièces nombreuses qui font de ces plaques une véritable marqueterie.

Lorsque l'action de l'acide a été convenablement ménagée, les moirages sur les plans des sommets et les petites facettes qui remplacent leurs arêtes d'intersection prennent une telle ressemblance avec ce qu'on observe sur certains échantillons du Dauphiné, du Brésil, de Jærischau, de Sibérie, etc. et sur les hyacinthes dont je viens de parler, qu'on se demande naturellement si ces échantillons n'auraient pas subi l'action lente et prolongée d'un gaz ou d'un liquide faiblement corrosif. On est d'autant plus porté à croire à une action de ce genre, qu'on en trouve dans la nature des exemples qui ne paraisssent guère contestables : ainsi, il existe en différents points des Alpes, et notamment à Guttanen, au-dessous du Grimsel, canton de Berne, des cristaux de quartz de toutes dimensions, dont les arêtes culminantes sont remplacées par des facettes plus ou moins larges, toujours brillantes, et qui finissent quelquefois par donner à la pyramide l'aspect d'un cône fortement

corrodé. Les faces de cette pyramide portent des entailles en forme de triangles isocèles renversés, dont le sommet est tourné vers l'arête d'intersection de la pyramide et du prisme, tandis que leur base, rigoureusement parallèle à cette ligne, se dirige vers le sommet du cristal; ces entailles atteignent parfois une profondeur de 1 à 2 centimètres, et s'étendent sur plusieurs des faces prismatiques, de sorte que certains échantillons prennent l'apparence de ces buissons de jade disséqués et fouillés par la main patiente des Chinois; assez souvent le sommet lui-même a été complétement coupé, et le cristal paraît avoir une base presque régulière. La forme et la symétrie des parties restées en relief permettant difficilement de penser à la destruction d'une substance étrangère interposée dans le quartz, on est porté à admettre qu'une eau légèrement acide ou alcaline, agissant pendant un temps indéfini et d'une manière continue, possède une puissance beaucoup plus grande qu'on ne le croit généralement, et peut produire des effets dont nous ne nous rendons pas un compte bien exact.

Du reste, je ne veux indiquer que très-sommairement les faits qui se passent dans l'attaque des cristaux de quartz par l'acide fluorhydrique; car, pendant que je préparais les matériaux du travail que je publie aujourd'hui, ces faits étaient étudiés en détail par M. Leydolt, à qui l'on doit déjà des observations curieuses sur la structure des verres et des agates. Les principaux résultats obtenus par ce savant sont consignés dans un mémoire présenté, en novembre 1854, à l'Académie des Sciences de Vienne, et inséré dans le volume XV des comptes rendus de cette Académie, sous le titre : *Ueber eine neue Methode, die Structur und Zusammensetzung der Krystalle zu untersuchen, mit besonderer Berücksichtigung der Varietaten des rhomboedrischen Quarzes.*

M. Leydolt a cru pouvoir conclure de ses expériences que tout cristal simple, composé seulement des faces du prisme et de la pyramide hexagonale, offre, après un séjour d'environ douze heures dans l'acide fluorhydrique étendu, une face rhombe *s*, placée sur trois angles alternes; un plagièdre supérieur de la

zone $p\ s\ e^2$, correspondant à $t = (d^1\ d^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$; un ou deux hémiscalénoèdres inverses l'un de l'autre, situés sur trois des six arêtes de la pyramide, et dont le plus habituel s'inclinant davantage sur $e^{\frac{1}{2}}$ que sur p, correspond exactement à ma face $\gamma_1 = (d^{\frac{2}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$; enfin, un hémiscalénoèdre obtus, situé sur les arêtes culminantes du rhomboèdre primitif, et ayant pour symbole $b^{\frac{16}{9}}$. De ces quatre faces, deux seulement sont bien assurées par des mesures directes; ce sont le rhombe s et l'hémiscalénoèdre γ_1; les deux autres n'ont été déterminées qu'à l'aide des zones qu'elles paraissent former, l'une avec γ_1 et une face antérieure e^2, l'autre avec γ_1 et une ligne horizontale. Or j'ai fait remarquer plusieurs fois, en parlant de certains parallélismes apparents, que, dans le quartz, une zone, pour être assurée, doit fournir sur le goniomètre une série de réflexions parallèles à une même droite; rien de semblable n'ayant pu avoir lieu pour les faces regardées comme t et comme $b^{\frac{16}{9}}$, à cause de leur peu d'éclat, leur position pourrait bien devoir être exprimée par d'autres symboles.

Dans les essais que j'avais tentés de mon côté, j'ai en effet remarqué des phénomènes semblables à ceux qu'a signalés M. Leydolt; mais ces phénomènes ne m'ont pas conduit à des lois aussi absolues et aussi générales, et je ne sais si l'on peut établir un signe bien déterminé pour des faces toujours fort rugueuses, et dont les incidences paraissent assez peu constantes; ainsi un cristal du Dauphiné et quelques améthystes m'ont offert sur les arêtes de la pyramide une troncature creuse, à peu près également inclinée sur les deux faces qui se coupaient suivant cette arête; cette troncature se rapproche par conséquent de la modification ξ.

Plusieurs cristaux simples de Carrare ont eu, après leur séjour dans l'acide étendu, trois des arêtes de la pyramide remplacées par une seule face plus inclinée sur p que sur $e^{\frac{1}{2}}$, et dont les incidences différaient très-notablement de l'hémiscalénoèdre γ, inverse de γ_1; le plagièdre supérieur de la zone $p\ s\ e^2$, produit sur ces

mêmes cristaux, paraît devoir être rapporté à $t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$ bien plutôt qu'à t; enfin, l'hémiscalénoèdre situé sur les arêtes culminantes du rhomboèdre primitif a aussi sa plus grande inclinaison sur p, et cette inclinaison conduit au signe $b^{\frac{5}{2}}$.

Un petit cristal très-pur de New-York, et un autre cristal du Brésil, m'ont offert, sur trois arêtes pyramidales, une double troncature beaucoup plus rapprochée de γ et de γ_1 que les faces analogues dont je viens de parler; le plagièdre supérieur formé sur ces cristaux ne pouvait guère se rapporter qu'à ma face t_2, et l'hémiscalénoèdre placé sur les arêtes culminantes rhomboédriques était, comme précédemment, voisin de $b^{\frac{5}{2}}$.

Les faces artificielles dont j'ai mesuré les incidences ne forment donc aucune des zones que M. Leydolt a signalées, mais qu'il n'a pu constater directement; d'après ce que j'ai dit plus haut, ces zones pourraient bien n'être qu'approximatives, et alors les faces vues par M. Leydolt différeraient sans doute assez peu de celles qui se sont produites sur mes cristaux.

M. Leydolt a aussi conclu de ses expériences que la position des faces artificielles sur les arêtes culminantes était toujours en rapport avec le sens de la rotation du cristal; quelques cristaux de Carrare m'ont paru prouver, au contraire, qu'on ne pouvait pas tirer de cette position une règle plus générale que celle qu'on avait cherché à déduire du sens dans lequel se rencontrent certains plagièdres.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Gamma = (d^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{1}{7}}\ b^1)$	$a^{\frac{9}{8}}$ hémièdre.

Un gros cristal enfumé de Sibérie, appartenant à M. Damour, et représenté fig. 72, pl. III, offre à son extrémité inférieure une face parfaitement plane, quoique piquetée, dont l'inclinaison est la même sur les deux pans du prisme vertical adjacent à cette face; si, comme on doit le croire, à cause de sa netteté et de la symétrie de sa position, ce n'est pas là un simple plan de contact, la face Γ,

supposée sur trois angles alternes du prisme, constituerait, comme la face rhombe, un hémiisocéloèdre. L'observation montre que son inclinaison sur le prisme e^2 est à très-peu près égale à 127 degrés; il n'est donc pas possible d'admettre que cette modification soit la même que ξ, dont l'incidence sur e^2 est égale à 129° 51'.

2° Hémiscalénoèdres parallèles aux arêtes culminantes ou latérales du rhomboèdre primitif.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$b^{\frac{3}{2}}$	$(b^{\frac{1}{2}}\ b^1\ h^{\frac{1}{5}})$ hémièdre.

Je n'ai rencontré cette modification que sur un cristal incolore du Valais, sur plusieurs cristaux d'améthyste du Brésil (fig. 73, pl. III), et sur une améthyste de Hongrie : dans les améthystes du Brésil, elle forme une troncature hémiédrique sur les trois arêtes culminantes du rhomboèdre primitif, dont les faces, excessivement prédominantes, ont presque complétement fait disparaître les faces $e^{\frac{1}{2}}$; les plans de cette troncature sont suffisamment larges et unis pour être facilement déterminés malgré leur peu d'éclat, et ils appartiennent évidemment à un hémiscalénoèdre. La figure 74, pl. III, représente un groupe très-remarquable de deux petits cristaux d'améthyste qui portent chacun trois faces $b^{\frac{3}{2}}$. Dans le cristal placé à gauche de ce groupe, c'est la face $b^{\frac{3}{2}}$ de droite qui a sa plus grande inclinaison sur p; dans le cristal placé à droite sur la figure, cette plus grande inclinaison a au contraire lieu pour la face $b^{\frac{3}{2}}$ de gauche; la pénétration complète des deux individus, et la réunion de leurs troncatures inversement inclinées, donnerait donc naissance à la forme $b^{\frac{3}{2}}$ homoèdre.

Le scalénoèdre $b^{\frac{3}{2}}$ fait partie de la zone inobservée $k_4\ \varepsilon\ \mathrm{L}\ \gamma_1\ b\ a^1\ b^3\ \gamma\ t_2\ \Delta$ (voy. la projection sphérique, pl. IV).

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
b^3	$(b^1\, b^{\frac{1}{3}}\, h^{\frac{1}{6}})$ hémièdre.

Le cristal limpide du Brésil, (fig. 65, pl. II), offre, sur une arête culminante du rhomboèdre primitif p, une modification faisant des angles inégaux avec les deux faces qui déterminent cette arête, et qui, par son développement complet sur un cristal rhomboédrique homoèdre, donnerait lieu à un scalénoèdre obtus. Les deux cristaux sur lesquels j'ai observé cette modification, plus rare encore que la précédente, semblent prouver qu'elle n'existe que d'un seul côté à la fois de l'arête modifiée; on doit donc aussi la considérer comme déterminant un hémiscalénoèdre. Un cristal d'améthyste à deux sommets, d'une couleur pâle, probablement de Hongrie, m'a montré, sur une de ses arêtes rhomboïdales culminantes, l'assemblage peu commun des deux modifications $b^{\frac{3}{2}}$ et b^3 formant, l'une au-dessus de l'autre, deux troncatures étroites, mais brillantes et parfaitement déterminables.

Il est facile de voir que les faces $b^{\frac{1}{2}}$ et b^3 se trouvent en opposition de chaque côté de la base, dans la zone déjà citée $k_4\, \varepsilon\, \mathrm{L}\, \gamma_1\, b^{\frac{3}{2}}\, a^1\, b^3\, \gamma\, t_2\, \Delta$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
b^5	$(b^1\, b^{\frac{1}{5}}\, h^{\frac{1}{6}})$ hémièdre.

Le remarquable cristal fig. 23, pl. I, intéressant pour ses enchevêtrements et pour les sutures qu'il présente sur trois de ses arêtes verticales, porte encore, sur une des arêtes culminantes du rhomboèdre primitif, une petite face étroite mais bien déterminable, dont les incidences diffèrent notablement de celles de b^3, et qui se rapportent parfaitement au scalénoèdre obtus b^5; cette face, hémièdre comme les deux précédentes, est aussi rare qu'elles, et n'a été trouvée que sur le cristal fig. 23 : elle ferait partie de la zone inobservée $k_1\, \tau_1\, \Lambda\, a^1\, \varkappa\, y$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$d^{\frac{17}{10}}$	$(b^{\frac{7}{10}}\ b^{\frac{7}{17}}\ h^1)$ hémièdre.

Un cristal d'améthyste du Brésil, dont les faces $e^{\frac{1}{2}}$ ont presque totalement disparu, par suite du développement excessif du rhomboèdre p, m'a offert, sur une des arêtes latérales de ce rhomboèdre, une face large, unie, et suffisamment miroitante pour qu'on puisse répondre de ses incidences, à quelques minutes près; aussi, quoique le symbole hexagonal écrit ci-dessus soit un peu compliqué, j'ai dû l'adopter pour ne pas trop m'écarter des angles observés. Quant au signe rhomboédrique correspondant, il ne présente rien d'extraordinaire; car j'ai démontré l'existence très-probable du rhomboèdre $e^{\frac{10}{17}}$, et il est facile de voir que, sur un cristal dont un plan p supérieur serait tourné vers l'observateur, il y aurait zone entre une face p postérieure, le rhomboèdre inverse $e^{\frac{10}{17}}$ et l'hémiscalénoèdre $d^{\frac{17}{10}}$, situé sur l'arête latérale primitive adjacente à ce rhomboèdre.

Cette modification est du reste très-rare, et je ne l'ai jamais rencontrée que sur le cristal que je viens de citer (voy. fig. 75, pl. III).

Lévy a figuré, dans l'atlas de sa Description d'une collection de minéraux formée par M. Heuland, une double face homoèdre, située comme celle-ci sur une arête latérale du rhomboèdre primitif, et appartenant par conséquent à un hémiscalénoèdre aigu. Le symbole $d^{\frac{3}{2}}$ qu'il lui assigne est beaucoup plus simple que le mien; mais comme je me suis assuré, en consultant les notes qui ont servi à la publication de l'ouvrage de Lévy, que ce symbole a été obtenu à l'aide de mesures approximatives prises au goniomètre d'application, sur de petits cristaux à faces arrondies des Féroë, il n'est peut-être pas impossible que les deux modifications $d^{\frac{17}{10}}$ et $d^{\frac{3}{2}}$ n'en fassent réellement qu'une. On sait aussi, d'après le Mémoire de M. Rose, que les cristaux des Féroë portent quelquefois en même temps le plagièdre x droit et gauche;

l'homoédrie de la face $d^{\frac{1}{2}}$, figurée par Lévy, n'a donc rien d'étonnant, puisque ces cristaux sont généralement, comme les améthystes incolores de l'Uruguay, composés d'un individu droit et d'un individu gauche.

3° Hémiscalénoèdres placés d'une manière quelconque sur les angles latéraux du rhomboèdre primitif.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$D = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{5}{16}})$	$(b^{\frac{1}{17}}\ b^{\frac{1}{9}}\ h^1)$
$D_1 = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{5}{29}})$	$(b^{\frac{1}{17}}\ b^{\frac{1}{27}}\ h^1)$

Ces deux modifications se sont rencontrées dans un petit cristal limpide du Brésil, où elles forment une double troncature sur l'arête d'intersection d'une face e^2 antérieure et d'un rhomboèdre $e^{\frac{11}{6}}$ placé à droite de cette face; les quatre plans e^2, D_1, D, $e^{\frac{11}{6}}$ paraissant appartenir à une même zone, et le peu d'éclat de D_1 et de D ne permettant pas de mesurer très-exactement leurs incidences, c'est en admettant cette zone et en prenant la moyenne de plusieurs observations, que j'ai calculé les symboles que je viens d'écrire. Le cristal qui porte les modifications D et D_1 offre en même temps sur une de ses arêtes, et précisément au-dessous de ces modifications, deux faces de l'hémiprisme dodécagone $k_5 = (b^{\frac{1}{7}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\omega = (d^1\ d^{\frac{1}{11}}\ b^{\frac{1}{18}})$	$(b^{\frac{1}{9}}\ b^{\frac{2}{15}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette face, en zone entre le rhomboèdre inverse $e^{\frac{5}{7}}$ et une face verticale e^4 placée tantôt à droite tantôt à gauche de ce rhomboèdre, s'est trouvée sur plusieurs cristaux de Carrare. Les figures 37, pl. II, et 71, pl. III, représentent deux de ces cris-

taux; le premier a fourni des mesures suffisamment exactes pour confirmer l'existence du rhomboèdre $e^{\frac{5}{3}}$, observé sur d'autres cristaux dont j'ai parlé précédemment, et pour assurer le symbole de ω qui a été adopté ici.

La face ω ou une face tout à fait analogue se rencontre assez souvent sur des cristaux de Carrare, sans qu'on puisse mesurer ses incidences, pas plus que celles du rhomboèdre avec lequel elle fait zone, à cause de leur peu d'éclat. Comme il est certain que les cristaux de cette localité offrent souvent, au lieu de $e^{\frac{5}{3}}$, son voisin $e^{\frac{13}{8}}$, il est possible qu'il existe aussi entre $e^{\frac{13}{8}}$ et e^2 une face ayant pour symbole $\omega_1 = (d^1\ d^{\frac{1}{14}}\ b^{\frac{1}{13}})$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? $\zeta = (b^{\frac{9}{37}}\ d^1\ d^{\frac{2}{13}})$	$(b^{\frac{1}{92}}\ b^{\frac{1}{99}}\ h^{\frac{1}{91}})$ hémièdre.

Le cristal fig. 21 offre entre les rhomboèdres bien déterminables par leurs incidences, $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{13}{10}}$, une bordure très-étroite qui, à l'œil, paraît dans la zone formée par l'intersection de ces deux rhomboèdres; mais le peu d'éclat de cette bordure, et les fines stries horizontales qui couvrent $e^{\frac{13}{10}}$ s'opposant à ce qu'on puisse vérifier sur le goniomètre l'exactitude de la zone $e^{\frac{13}{10}}$ ζ $e^{\frac{7}{2}}$, on est conduit, en considérant les signes inadmissibles de ζ qu'exigerait cette zone et que j'ai écrits ci-dessus, à penser, comme je l'ai déjà dit, que certaines zones peuvent paraître exactes à l'œil, sans être géométriquement rigoureuses. S'il en est ainsi dans le cas qui nous occupe, on peut essayer, pour le signe rhomboédrique de ζ, plusieurs simplifications dont la plus remarquable consiste à prendre la notation $(d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{1}{4}})$, qui est précisément celle d'un isocéloèdre aigu, ayant pour symbole hexagonal $a^{\frac{3}{5}}$, et dont les incidences calculées ne diffèrent de l'observation que d'une quantité rentrant dans les limites des erreurs possibles.

La simplicité de ce résultat porterait à croire que la face ζ appartient à un hémi-isocéloèdre, ne formant qu'une zone très-approchée avec les rhomboèdres $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{13}{10}}$, mais situé en réalité dans la zone que j'ai déjà décrite entre u, ε et $e^{\frac{1}{7}}$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
? $\zeta_1 = (b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{5}{53}})$	$(b^{\frac{1}{8}}\ b^{\frac{1}{9}}\ h^{\frac{5}{29}})$ hémièdre.

Le cristal fig. 21 porte encore, au-dessus de la face ζ, une petite bordure analogue à la précédente, mais qui paraît faire zone entre les rhomboèdres $e^{\frac{7}{2}}$ et $e^{\frac{11}{9}}$. Les symboles de ζ_1, dans le système rhomboédrique comme dans le système hexagonal, sont plus simples que ceux de ζ supposé dans la zone $e^{\frac{13}{10}}\ e^{\frac{7}{2}}$, et peuvent à la rigueur être admis; cependant, comme l'exactitude de la zone $e^{\frac{11}{9}}\ \zeta_1\ e^{\frac{7}{2}}$ ne se vérifie pas mieux que celle de la zone $e^{\frac{13}{10}}\ \zeta\ e^{\frac{7}{2}}$, il serait également possible que la bordure ζ_1 ne formât qu'une zone approximative, et que son symbole fût susceptible de quelques simplifications. Si l'on essaye le signe $(d^1\ d^{\frac{7}{13}}\ b^{\frac{1}{4}})$, dont le correspondant hexagonal est $(b^{\frac{7}{10}}\ b^{\frac{7}{11}}\ h^1)$, on obtient des incidences calculées qui ne s'éloignent pas encore trop de l'observation directe; et s'il était permis de substituer au rhomboèdre $e^{\frac{11}{9}}$ le rhomboèdre $e^{\frac{5}{4}}$, inverse de $e^{\frac{7}{2}}$, dont j'ai signalé précédemment l'existence probable, on aurait une zone formée par les trois faces $e^{\frac{5}{4}}$, $\zeta_1 = (d^1\ d^{\frac{9}{13}}\ b^{\frac{1}{4}})$ et $e^{\frac{7}{2}}$; la seule considération qui s'oppose à l'adoption de cette hypothèse, c'est que l'inclinaison de $e^{\frac{11}{9}}$ sur $e^{\frac{1}{2}}$ s'est mesurée d'une manière trop nette pour qu'on puisse faire abstraction de la différence de près de 1 degré qui existe entre cette incidence et l'inclinaison correspondante de $e^{\frac{5}{4}}$.

Si l'on voulait avoir un symbole encore plus simple, on pourrait prendre $\zeta_1 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{4}})$; mais les incidences qu'on déduit de

cette expression s'éloignent trop des nombres observés, et le rhomboèdre $e^{\frac{8}{7}}$, qui ferait zone avec cette nouvelle valeur de ζ_1 et avec $e^{\frac{7}{2}}$, rencontre $e^{\frac{3}{2}}$ sous un angle trop différent de l'inclinaison de $e^{\frac{11}{9}}$, pour qu'on puisse le substituer à ce dernier.

On peut donc dire que, pour la face ζ_1, le mieux paraît être de s'en tenir, soit au premier signe assez compliqué $(d^1\ d^{\frac{8}{53}}\ b^{\frac{1}{4}})$ qui satisfait à la zone $e^{\frac{11}{9}}\ e^{\frac{7}{2}}$, soit au second signe $(d^1\ d^{\frac{2}{13}}\ b^{\frac{1}{4}})$ qui ne forme qu'une zone approximative entre ces deux rhomboèdres.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\varkappa = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{2}})$ hémièdre.

La figure 51, pl. II, représente un petit cristal chlorité du Valais qui offre, entre la face rhombe s et le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$, une petite bordure étroite mais mensurable, placée exactement dans la zone que j'ai déjà citée entre ces deux faces et le rhomboèdre $e^{\frac{5}{4}}$, zone qui comprend en outre les faces d^1 et y latérales, et où l'on trouve par conséquent la série $d^1\ y\ e^{\frac{7}{2}}\ \varkappa\ s\ e^{\frac{5}{5}}$; on voit que cette nouvelle modification, rencontrée sur un seul cristal, s'exprime par un symbole très-simple, qui établit un accord suffisant entre les angles calculés et les angles observés; la face $\varkappa$ me paraît donc tout à fait assurée : on voit aussi, d'après la forme de son symbole rhomboédrique, que $\varkappa$ fait partie de la zone $p\ u$, caractérisée par les modifications $\Upsilon\ \Upsilon_1\ \Upsilon_2$, dont il sera question plus loin.

La projection sphérique, pl. IV, montre encore que $\varkappa$ se trouverait dans une troisième zone déterminée par les formes $k_1\ \tau_1\ \Lambda\ a^1\ b^5\ y$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\mathrm{R} = (d^1\ d^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{3}{5}})$	$(b^{\frac{1}{6}}\ b^1\ h^{\frac{1}{2}})$ hémièdre.

Certains cristaux du Brésil, analogues à celui qui est représenté fig. 64, pl. II, offrent quelquefois une face arrondie, dont les incidences se rapprochent de celles de ρ, mais qui ne fait pas partie de la zone $p\ s\ e^2$; cette face est en bordure entre le rhombe s et le rhomboèdre assez bien déterminable $e^{\frac{13}{7}}$; le symbole fort simple qui exprime sa position conduit à des nombres suffisamment voisins de l'observation, et ne peut guère laisser d'incertitude sur son existence.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$? \Phi = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{5}{11}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{5}}\ h^{\frac{2}{3}})$ hémièdre.

Le cristal fig. 41, qui présente une hémitropie et une disposition de faces très-remarquables, que j'ai déjà décrites en détail en parlant du plagièdre q, semble indiquer l'existence d'une nouvelle face située dans une zone opposée à celle dont R fait partie; en effet, les incidences des deux modifications Φ et R sont très-voisines les unes des autres; mais aucun des moirages qu'on remarque sur le rhomboèdre subordonné $e^{\frac{17}{7}}$ ne se trouve placé de manière à faire croire que la face Φ soit une face R retournée par suite de quelque enchevêtrement peu visible; parmi les divers agencements qu'à défaut de signes de reconnaissance bien positifs, on peut assigner aux faces du cristal fig. 41, le plus simple est aussi celui que j'ai indiqué sur mon dessin. Comme probabilité de l'existence de Φ, je ferai encore remarquer que cette face appartiendrait à une seconde zone dont j'ai déjà parlé et qui comprend les modifications $k\ \rho\ \tau_2\ a^1\ x$.

Le rhomboèdre $e^{\frac{13}{8}}$ ayant pour inverse $e^{\frac{8}{3}}$, une face qui serait rigoureusement l'inverse de R appartiendrait à la zone $s\ e^{\frac{5}{2}}$; mais, d'une part, son symbole serait notablement plus compliqué que celui de Φ, et, d'autre part, le rhomboèdre $e^{\frac{17}{7}}$ se mesure assez nettement pour qu'on ne puisse pas le confondre avec $e^{\frac{8}{3}}$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Omega = (d^1\ d^{\frac{1}{13}}\ b^{\frac{1}{13}})$	$(b^{\frac{2}{13}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^1)$ hémièdre.

J'ai trouvé sur le cristal de Carrare (fig. 77, pl. III), une face terne qui, au premier coup d'œil, semble faire suite au prisme symétrique k_9, mais qui s'en distingue bien par les mesures directes; cette face paraît être en zone entre le rhomboèdre $e^{\frac{1}{5}}$ et le prisme e^2 qui se trouve à sa droite; elle appartient donc à la zone $x\ e^{\frac{1}{5}}\ c^2$ reconnue par M. Rose; son symbole a été calculé de manière à satisfaire à cette zone et à fournir les incidences le plus rapprochées possible de l'observation.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\alpha = (d^1\ d^{\frac{22}{37}}\ b^{\frac{11}{24}})$	$(b^{\frac{1}{70}}\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ hémièdre.

J'ai rencontré cette nouvelle facette sur plusieurs cristaux du Haut-Valais, en zone entre une face verticale e^2 et le plagièdre x situé tantôt à droite, tantôt à gauche de cette face (fig. 43 et 46, pl. II). Cette zone est donc la même que la zone $e^2\ x\ e^{\frac{1}{4}}$ du cristal fig. 1. Le cristal fig. 46 est celui qui m'a offert la modification α la plus nette et la mieux développée. Son incidence sur e^2 s'est mesurée avec une telle précision, que, pour ne pas m'éloigner des nombres observés, j'ai dû adopter le signe rhomboédrique écrit ci-dessus, malgré sa complication apparente; on remarquera, du reste, que le symbole hexagonal correspondant est fort simple. Le seul signe rhomboédrique moins compliqué qu'on pourrait assigner à α serait $(d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{5}{11}})$; mais, d'une part, le correspondant hexagonal de ce signe est $(b^{\frac{1}{63}}\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$, moins simple que le premier; et, d'autre part, l'incidence de α sur e^2 qu'on en déduit, offre avec l'incidence observée une différence de 18 minutes, que la netteté de α ne permet pas d'admettre. Le symbole hexagonal de α, tel qu'il est adopté ici, a d'ailleurs

l'avantage de placer cette face dans une seconde zone qui comprendrait les formes Π_1 a^1 et τ_7.

Il est donc impossible maintenant de ne pas reconnaître qu'il existe des faces parfaitement déterminées, dont la notation ne peut pas s'exprimer par des rapports aussi simples que le supposaient les lois primitivement établies par Haüy; on conçoit bien, au surplus, qu'il en doive être ainsi; et à mesure que les observations se multiplieront, avec des moyens d'investigation plus précis, on devra trouver, comme on l'a déjà fait pour certaines relations générales de la chimie et de la physique, qu'entre les nombres simples servant à fixer la position des faces des cristaux les plus ordinaires, et par conséquent les plus faciles à reconnaître, il y a place pour des nombres un peu plus compliqués, se rapportant en général à des modifications rares, peu développées, ou particulières à un petit nombre de localités.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Delta = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$	$(b^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{5}}\ h^1)$ hémièdre.

Les deux cristaux de Carrare (fig. 47, pl. II et 69, pl. III), et le cristal d'Algérie (fig. 29, pl. I), m'ont offert cette face dans la même zone que la précédente, mais avec des incidences entièrement opposées, puisqu'ici la plus grande inclinaison a lieu sur le plagièdre x; la bordure formée par Δ, entre x et e^2, est très-étroite, et sa mesure est assez difficile; cependant la zone dont elle fait partie pouvant être constatée sur le goniomètre, et la simplicité de son symbole ne laissant rien à désirer, son existence ne saurait être contestée. La projection sphérique, pl. IV, montre que Δ ferait encore partie d'une zone composée des faces $k_4\ \Delta\ t_2\ \gamma\ b^3\ a^1\ b^{\frac{1}{2}}\ \gamma_1\ \mathrm{L}\ \varepsilon$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Pi_1 = (b^{\frac{3}{11}}\ d^1\ d^{\frac{3}{4}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{14}}\ h^{\frac{1}{8}})$ hémièdre.

Cette modification, trouvée seulement sur un cristal incolore du Valais, représenté fig. 28, pl. I, forme une bordure étroite,

mais mensurable, entre le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$ et le plagièdre x, dans la zone latérale $e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{7}{2}}\ x$. Comme je l'ai déjà annoncé plus haut, Π_1 déterminerait une seconde zone avec les faces $a^1\ \tau_7$ et α; son existence est donc assurée.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$M = (b^{\frac{2}{37}}\ d^1\ d^{\frac{1}{35}})$	$(b^{\frac{1}{13}}\ b^{\frac{1}{36}}\ h^{\frac{1}{25}})$

Cette modification forme des faces larges, mais arrondies, sur des cristaux enfumés provenant de certains granites d'Algérie; elle se trouve dans la même zone que Π_1, entre φ et t; la mesure de ses incidences a offert des variations assez grandes, mais on a adopté pour son symbole rhomboédrique la seule expression qui pût fournir un symbole hexagonal admissible (voy. fig. 29, pl. I).

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Psi = (d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{9}}\ b^{\frac{1}{4}})$	$(b^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{11}})$

Une troncature étroite mais bien mensurable, observée sur un cristal de localité inconnue, entre une face $e^{\frac{1}{2}}$ et le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$, fait partie, comme les deux précédentes, de la zone déjà citée plusieurs fois entre $e^{\frac{1}{2}}\ t\ M\ \varphi\ \Pi_1\ e^{\frac{7}{2}}\ x$. Le cristal qui présente cette face est remarquable par le développement de ses plagièdres t et t_1 et par de nombreuses mâcles (voy. fig. 30, pl. I).

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Xi = (b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{16}}\ h^{\frac{1}{2}})$ hémièdre.

Cette intéressante modification ne s'est présentée que sur un gros cristal du Brésil, représenté fig. 2, pl. I, et sur un cristal plus petit de la même localité; les faces du prisme vertical e^2 sont remplacées, sur ces cristaux, par celles de deux rhomboèdres excessivement aigus: l'un, parallèle au primitif, ayant pour sym-

bole $e^{\frac{0}{1}}$, l'autre, inverse, et s'exprimant par $e^{\frac{1}{0}}$. Ce remplacement du prisme par une combinaison de deux rhomboèdres très-aigus est un fait très-commun dans les cristaux du Brésil; il en résulte que, lorsque le rhombe s et le plagièdre x existent sur ces cristaux, l'intersection $\frac{s}{x}$ n'est plus parallèle à celle de x avec le rhomboèdre qui remplace e^2; seulement il y a de ces rhomboèdres si peu différents du prisme vertical, que le défaut de parallélisme de ces lignes d'intersection peut à peine être saisi à l'œil, surtout lorsqu'elles sont un peu courtes, et qu'une mesure directe au goniomètre de réflexion peut seule avertir que la zone habituelle $e^{\frac{1}{2}}\ s\ x\ e^2$, n'a pas lieu sur le cristal qu'on examine.

La plupart des cristaux du Brésil que je me suis procurés à Londres, étant trop gros pour être montés sur un goniomètre de réflexion ordinaire, j'ai eu recours, pour déterminer leurs modifications, à un artifice qui réussit très-bien lorsque les faces des cristaux sont suffisamment brillantes, et qui consiste simplement à couvrir de cire d'Espagne fondue le bord des plans dont on veut prendre l'inclinaison; on peut obtenir ainsi, pourvu que ces plans ne soient pas trop étroits, des empreintes parfaitement nettes, et qui se mesurent avec la même exactitude que les cristaux eux-mêmes. C'est par ce moyen que j'ai constaté l'existence de la la zone $x\ \Xi\ e^{\frac{1}{0}}$ et les incidences de Ξ; cette face, quoique un peu arrondie, se mesure assez bien, et le symbole que j'ai adopté est le plus simple, dans les systèmes rhomboédrique et hexagonal, qui satisfasse à la zone $x\ e^{\frac{1}{0}}$, en fournissant des angles calculés très-voisins de l'observation[1].

[1] Depuis la rédaction de mon mémoire, j'ai eu l'occasion d'examiner un beau cristal du Brésil portant une face légèrement arrondie que les mesures directes ne permettent guère de rapporter qu'à Ξ; mais ce cristal, au lieu du rhomboèdre $e^{\frac{9}{4}}$, porte $e^{\frac{17}{7}}$ facilement déterminable; aussi la troncature formée par la face Ξ sur l'arête d'intersection des modifications x et $e^{\frac{17}{7}}$ ne paraît-elle pas limitée par deux lignes rigoureusement parallèles.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$z_1 = (b^{\frac{5}{17}}\ d^1\ d^{\frac{5}{7}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{33}}\ h^{\frac{10}{11}})$ hémièdre.

Le petit cristal du Brésil (fig. 48, pl. II), porte, dans la zone $x\ e^{\frac{11}{5}}$, au-dessus de la face z dont je vais parler tout à l'heure, une seconde face z_1, dont les incidences se mesurent assez nettement pour qu'une fois la zone admise entre x et le rhomboèdre $e^{\frac{11}{5}}$, il n'y ait pas d'hésitation sur le choix du symbole qui doit la représenter : celui que j'ai adopté ici n'est pas par trop compliqué; on peut cependant le joindre au signe de α, comme un nouvel exemple de relations moins simples que celles admises par Haüy.

La comparaison du signe hexagonal de cette face avec celui de λ nous révèle l'existence de la zone $\lambda\ a^1\ z_1$, qu'on ne peut pas constater directement.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$z = (b^{\frac{3}{8}}\ d^1\ d^{\frac{27}{34}})$	$(b^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{99}}\ h^{\frac{1}{11}})$ hémièdre.

Ou bien :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$(b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{9}{11}})$	$(b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{81}}\ h^{\frac{9}{17}})$ hémièdre.

Le gros cristal du Brésil (fig. 3, pl. I), offre la face z étroite, brillante, mais légèrement arrondie, de sorte que ses incidences ne peuvent être prises qu'approximativement. Cette face s'est retrouvée sur deux autres petits cristaux du Brésil, dont l'un est représenté fig. 48, pl. II, sur le cristal de la même localité fig. 49, et sur quatre à cinq cristaux du Dauphiné. Comme je vais le dire plus bas, en décrivant la zone $x\ \Sigma$ du cristal fig. 3, le rhomboèdre $e^{\frac{11}{5}}$ ayant été choisi pour faire partie de cette zone, on est conduit, malgré les incidences un peu faibles qu'il fournit, à l'admettre également sur le cristal fig. 48; la modification z

n'offre donc pas d'incertitude sur la zone où elle doit entrer; son symbole seul peut subir quelques variations, en restant dans les limites des erreurs possibles de l'observation. Le premier signe, $z = (b^{\frac{3}{5}}\ d^1\ d^{\frac{27}{34}})$ peut s'écrire $(b^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{9}{34}})$; il est donc un peu moins compliqué que le second, $z = (b^{\frac{1}{13}}\ d^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{9}{55}})$; le signe hexagonal correspondant à $(b^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{9}{34}})$ est aussi un peu plus simple que celui qui correspond à $(b^{\frac{1}{13}}\ d^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{9}{55}})$; de plus, la moyenne des incidences mesurées directement se rapproche plus des nombres obtenus par le calcul de la première expression que par le calcul de la seconde; tout porte donc à croire que la véritable notation de z est $(b^{\frac{3}{5}}\ d^1\ d^{\frac{27}{34}})$.

Dans tous les cas, qu'on adopte l'un ou l'autre de ces symboles, il est évident que la position de la face z sur le rhomboèdre primitif sera exprimée, comme celle des faces α et z_1, par des rapports beaucoup plus compliqués que ceux qu'on admettait habituellement jusqu'ici.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Sigma = (b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{21}}\ h^{\frac{1}{2}})$ hémièdre.

J'ai rencontré cette face sur quatre cristaux du Brésil : l'un incolore, de 17 centimètres de hauteur sur 12 centimètres de diamètre, représenté fig. 3, pl. I; les autres jaunâtres et beaucoup moins gros; l'observation ne m'ayant donné pour Σ et pour le rhomboèdre qui forme zone avec cette face et avec le plagièdre x, que des mesures un peu incertaines, j'ai eu à choisir entre deux zones et deux symboles différents. En effet, si le rhomboèdre direct qui fait partie de la zone $x\ \Sigma$ était $e^{\frac{11}{6}}$, la face Σ aurait pour notation rhomboédrique $(b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{11}{17}})$; mais si le rhomboèdre est $e^{\frac{11}{5}}$, le signe de Σ sera $(b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\infty})$. Or, la mesure goniométrique de l'inclinaison du rhomboèdre sur p, se rapporte mieux à $e^{\frac{11}{6}}$ qu'à

son voisin $e^{\frac{11}{5}}$; cependant comme le signe hexagonal correspondant à la première notation de Σ est $(b^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{3}{77}}\ h^{\frac{1}{7}})$, difficilement admissible, il m'a semblé préférable d'adopter pour Σ le signe simple $(b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$, et la zone $x\ \Sigma\ e^{\frac{11}{5}}$. Ce signe a de plus l'avantage de placer la face Σ dans la zone $n_1\ a^1\ \chi_1$, où χ_1 peut se déterminer d'une manière bien certaine.

Je ferai remarquer que les quatre faces Ξ, z_1, z et Σ jouent, par rapport à x et à un rhomboèdre très-aigu, le même rôle que la face R décrite précédemment, par rapport au rhombe s et à un rhomboèdre inverse; ces zones, entre une face très-commune sur tous les cristaux de quartz et un rhomboèdre aigu qui remplace le prisme hexagonal e^2, sont jusqu'ici tout à fait particulières à quelques échantillons du Brésil et du Dauphiné.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Sigma_1 = (b^{\frac{18}{43}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{61}}\ h^{\frac{3}{6}})$ hémièdre.

Cette modification, qui forme une petite bordure assez nette en zone entre x et le rhomboèdre $e^{\frac{31}{15}}$ très-voisin du prisme hexagonal, s'est présentée sur un cristal limpide d'une localité inconnue et sur un cristal du Dauphiné (fig. 4); la zone dont elle fait partie est facile à constater à l'œil aussi bien qu'avec le goniomètre, et comme ses incidences se mesurent assez exactement, on ne peut guère choisir un autre symbole que celui qui a été adopté ici, malgré la complication de ses rapports.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\chi = (b^{\frac{1}{40}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{81}}\ h^{\frac{1}{27}})$ hémièdre.

Cette face est la plus inclinée sur le rhomboèdre primitif de toute une série d'intéressantes modifications situées dans la zone $p\ x$; elle est aussi la plus rare de cette série, car je ne l'ai vue que sur le très-gros cristal du Brésil (fig. 3).

L'inclinaison de χ sur p, déterminée au moyen d'une empreinte en cire d'Espagne, s'accorde parfaitement avec le calcul du symbole que j'ai adopté et qui est fort simple.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\chi_1 = (b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{21}}\ h^{\frac{1}{17}})$ hémièdre.

Cette seconde face de la zone $p\ \chi\ x$, s'est trouvée sur le cristal enfumé gigantesque de Sibérie (fig. 36, pl. II), sur plusieurs cristaux du Brésil, dont le plus remarquable est représenté fig. 50, pl. II, sur le cristal limpide ressemblant à ceux du Dauphiné, que j'ai déjà cité pour le rhomboèdre $e^{\frac{31}{15}}$, et pour la modification Σ_1, et sur des cristaux enfumés d'Algérie, semblables à la figure 29, pl. I; elle est la plus commune des faces de cette zone, et par conséquent sa mesure a pu être prise plusieurs fois avec assez d'exactitude. La moyenne générale de six observations donne un nombre qui ne diffère que de 4 minutes du nombre calculé à l'aide du symbole adopté ci-dessus; on remarquera aussi que ce symbole offre un rapport simple avec celui de χ.

La face analogue à χ_1, citée sans mesures par M. Rose, et dont j'ai déjà dit un mot page 451, serait exprimée, d'après M. Wakkernagel, par le signe rhomboédrique $(b^{\frac{1}{18}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$; mais ce signe conduit à une inclinaison sur p trop différente de la moyenne de mes observations pour pouvoir être adopté. J'ai déjà cité, en décrivant n_1, la zone qui comprendrait les faces $n_1\ a^1\ \chi_1\ \Sigma$.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\chi_2 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{11}}\ h^{\frac{1}{7}})$ hémièdre.

Cette troisième face de la zone $p\,x$ n'a été observée que sur le beau cristal à double sommet du Brésil, représenté fig. 50, pl. II; mais son inclinaison sur p a pu être prise avec assez d'exactitude, et elle conduit sans hésitation au symbole $(b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, qui se trouve encore en rapport simple avec ceux des faces précédentes χ et χ_1.

Il a été question précédemment, à l'article des formes τ_6 et t_5, d'une zone comprenant ces faces, la base a^1 et χ_2; cette zone ne peut se reconnaître directement sur les cristaux, mais elle résulte immédiatement de l'inspection des symboles hexagonaux des modifications qui la composent.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\chi_3 = (b^{\frac{3}{20}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^1\ b^{\frac{3}{23}}\ h^{\frac{3}{11}})$ hémièdre.

Cette dernière face, qui fait encore partie de la zone $p\ x$, a été trouvée en bordure très-étroite sur des cristaux limpides rapportés dernièrement par M. Hugard, de Pfitsch en Tyrol. Le symbole que j'ai adopté ici, quoique un peu compliqué, offre pourtant encore une relation assez simple avec celui de la face χ_1; mais si l'on veut n'attacher à cette relation qu'une importance secondaire, on pourra admettre le signe rhomboédrique $(b^{\frac{5}{32}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, ayant pour correspondant hexagonal $(b^1\ b^{\frac{5}{37}}\ h^{\frac{5}{17}})$, et offrant l'avantage de conduire à des incidences calculées, qui diffèrent seulement de 2 minutes de la moyenne des observations.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\varphi = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$	$(b^1\ b^{\frac{1}{6}}\ h^{\frac{1}{2}})$ hémièdre.

J'ai observé cette face intéressante sur les deux petits cristaux que représentent les figures 26, pl. I, et 51, pl. II; sur ce dernier elle occupe deux positions différentes : dans l'une, elle paraît presque faire zone entre p et u; dans l'autre, elle forme une bordure étroite, en zone entre le plagièdre supérieur $t = (d^1\ d^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$ et le rhomboèdre direct $e^{\frac{7}{2}}$. La plupart des incidences de cette modification ayant pu être déterminées avec une grande exactitude, j'ai d'abord cherché le symbole qui lui convenait en satisfaisant à cette dernière zone, et la seule inspection de ce symbole m'a fait voir que la face φ se trouvait encore comprise dans la zone formée par les faces p et $y = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$, plagièdre

de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, infiniment plus rare que x. Ce plagièdre n'existe pas sur le cristal fig. 26, et il est si faiblement indiqué sur le second cristal fig. 51, où φ se rencontre, que son inclinaison sur la face $e^{\frac{1}{2}}$ de sa zone est difficile à mesurer exactement, et qu'il est impossible de constater directement la zone $p\ \varphi\ y$.

On remarquera aussi que, d'après la forme de l'expression $\varphi = (b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, il y aurait une autre zone entre une face inférieure du rhomboèdre primitif p, la face φ et le plagièdre $u = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$; mais cette troisième zone n'a pas été observée. Le symbole hexagonal de φ révèle encore une quatrième zone entre $\tau_3\ a^1$ et φ, que j'ai déjà indiquée en décrivant τ_3; on ne peut pas non plus la constater directement, à cause de l'absence habituelle de a^1.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\iota = (d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{6}{13}})$	$(b^{\frac{1}{36}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$ hémièdre.

La face ι se rencontre assez fréquemment sur des cristaux limpides ou enfumés du Haut-Valais; placée d'une manière analogue à la face α, décrite précédemment, elle fait zone entre une face verticale e^2 et le plagièdre u, situé à droite ou à gauche de cette face (fig. 31, pl. I, et fig. 53 et 54, pl. II). Cette modification fait donc partie de la zone $e^{\frac{2}{3}}\ u\ e^2$, citée par M. Rose; elle est, en général, assez nette pour qu'il soit facile de bien constater l'exactitude de cette zone. La mesure de ses incidences n'a, du reste, laissé aucun doute sur le symbole qui devait exprimer sa position.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\iota_1 = (d^1\ d^{\frac{6}{7}}\ b^{\frac{9}{19}})$	$(b^{\frac{1}{56}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$ hémièdre.

La face ι_1, beaucoup moins commune que la précédente, fait aussi partie de la zone $e^2\ u\ e^{\frac{2}{3}}$; je ne l'ai trouvée que sur deux petits cristaux du Valais, dont l'un, représenté fig. 55, pl. II,

appartient à M. Adam; mais ses incidences ont pu être prises avec assez d'exactitude pour qu'on doive la distinguer de la face ι.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\iota_4 = (d^1\ d^{\frac{10}{11}}\ b^{\frac{15}{31}})$	$(b^{\frac{1}{93}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$ hémièdre.

Cette troisième face, qui se trouve encore dans la même zone $e^2\ u\ e^{\frac{7}{2}}$ que les deux précédentes, nous ramène aux symboles compliqués sur lesquels j'ai présenté quelques considérations à propos des faces α, z_1, z, etc. et comme elle s'est offerte sur plusieurs cristaux du Valais (fig. 56, pl. II), avec des incidences constantes, faciles à mesurer, et notablement différentes de celles de ι_1, il est certain qu'on ne pourrait, sans s'écarter entièrement de l'observation directe, lui trouver une notation plus simple que celle qui a été adoptée ici.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\psi = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{3}{16}})$	$(b^{\frac{5}{19}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1)$ hémièdre.

Le remarquable cristal fig. 21 offre, sur trois arêtes alternes, une face également en zone entre le rhomboèdre direct $e^{\frac{7}{2}}$ et la face prismatique e^2, située à gauche de ce rhomboèdre. La modification ψ se montre en troncature très-étroite, dont les incidences sont cependant assez faciles à mesurer; je ne l'ai rencontrée que sur le cristal fig. 21, qui vient probablement d'Ala, et qui fait partie de la collection du Muséum.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Pi = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{3}{5}})$	$(b^1\ b^{\frac{5}{21}}\ h^{\frac{5}{7}})$ hémièdre.

Je n'ai observé cette face que sur deux cristaux du Valais, dont un est représenté fig. 27, pl. I; elle forme, dans la même zone que les quatre précédentes, une bordure étroite entre $e^{\frac{7}{2}}$ et u. La mesure de ses incidences est assez difficile à prendre très-

exactement; cependant j'y suis parvenu en cherchant à constater l'existence de la zone; la simplicité du signe rhomboédrique satisfaisant à cette zone, qui se déduit de la moyenne des observations, prouve d'ailleurs que je n'ai pas dû m'écarter beaucoup de la véritable valeur de ces incidences : on voit que la face II occupe entre $e^{\frac{7}{3}}$ et u une position tout à fait analogue à celle de Π_1 citée précédemment entre $e^{\frac{7}{2}}$ et x; on peut aussi remarquer que II fait encore partie de la zone déjà décrite $s\ \Phi\ e^{\frac{17}{7}}$, et qu'elle se trouverait également dans la zone $\mu_2\ a^1\ \Pi$, comme je l'ai dit en décrivant μ_2.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Upsilon = (b^{\frac{1}{72}}\ d^1\ d^{\frac{1}{0}})$	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{73}}\ h^{\frac{1}{21}})$ hémièdre.

Cette face s'est rencontrée sur deux cristaux du haut Valais avec des incidences un peu incertaines; parmi les mesures que j'en ai obtenues, j'ai choisi de préférence celles qui conduisaient à un symbole offrant un rapport simple avec le signe des faces suivantes, beaucoup plus faciles à déterminer exactement.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Upsilon_1 = (b^{\frac{1}{36}}\ d^1\ d^{\frac{1}{0}})$	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{37}}\ h^{\frac{1}{21}})$ hémièdre.

La face Υ_1 s'est présentée sur le cristal du Valais (fig. 31, pl. I) avec une si grande netteté, qu'il n'y a pas eu un instant d'hésitation sur la zone $p\,u$, dont elle fait partie, ni sur le symbole qu'on devait lui assigner.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Upsilon_2 = (b^{\frac{1}{12}}\ d^1\ d^{\frac{1}{0}})$	$(b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{13}}\ h^{\frac{1}{7}})$ hémièdre.

Cette face, qui se trouve, comme la précédente, dans la zone $p\,u$, s'est rencontrée sur des cristaux de Pfitsch en Tyrol (fig. 52, pl. II), sous la forme d'une très-petite troncature; elle se dis-

tingue de sa voisine χ_3 par un éclat un peu plus vif, et surtout parce que, sur le goniomètre, la zone à laquelle elle appartient est trop facile à constater pour être confondue avec la zone $p\ \chi_3\ x$.

Les signes cristallographiques des trois faces Υ, Υ_1, Υ_2, sont entre eux dans des rapports simples, de sorte qu'il existe entre ces trois faces et le plagièdre u la même relation que j'ai fait remarquer entre les faces χ, χ_1, χ_2 et le plagièdre x.

Il est assez intéressant de voir que le nombre des zones dans lesquelles se trouvent les trois plagièdres x, y, u, augmente en raison de l'importance que paraît posséder chacune de ces faces dans la cristallisation du quartz.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$x = (b^{\frac{7}{40}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	$(b^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{47}}\ h^{\frac{1}{19}})$ hémièdre.

Le petit cristal du Valais (fig. 51, pl. II), déjà si riche en facettes nouvelles, m'a encore offert une petite bordure linéaire qui paraît bien en zone entre le plagièdre θ et le rhomboèdre $e^{\frac{7}{2}}$; malgré le peu de largeur de cette bordure, on peut mesurer approximativement son inclinaison sur les deux faces qui l'entourent, et le seul symbole un peu simple qui satisfasse à la zone $\theta\ e^{\frac{7}{2}}$, en donnant des incidences calculées voisines de l'observation, est celui que j'ai adopté.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Theta = (d^1\ d^{\frac{15}{17}}\ b^{\frac{9}{16}})$	$(b^{\frac{6}{175}}\ b^1\ h^{\frac{3}{8}})$ hémièdre.

ou bien :

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Theta = (d^1\ d^{\frac{5}{6}}\ b^{\frac{6}{11}})$	$(b^{\frac{6}{85}}\ b^1\ h^{\frac{6}{11}})$ hémièdre.

Cette face, pour laquelle il n'est pas possible de trouver un symbole hexagonal simple, s'est présentée sur deux cristaux incolores du Brésil; sur l'un de ces cristaux (voy. fig. 49), Θ offre

assez de netteté pour qu'on puisse s'assurer qu'elle n'appartient à aucun plagièdre, et qu'elle fait seulement partie de la zone latérale des deux rhomboèdres $e^{\frac{11}{6}}$ et $e^{\frac{5}{3}}$; on peut aussi répondre de plusieurs de ses incidences, mesurées, soit directement sur le cristal, soit à l'aide d'empreintes en cire d'Espagne. Le premier symbole, malheureusement bien compliqué, est celui qui fournit les nombres les plus rapprochés de toutes les observations; le second symbole, un peu plus simple, s'en éloigne, au contraire, d'une manière assez notable. Quant aux rhomboèdres entre lesquels la face Θ est comprise, l'un, $e^{\frac{5}{3}}$, est bien uni et se détermine sans difficulté; l'autre, $e^{\frac{11}{5}}$, offre quelque incertitude dans sa mesure, et on pourrait peut-être le regarder comme $e^{\frac{13}{6}}$; mais, si l'on adoptait ce changement, la zone $e^{\frac{5}{3}}\ e^{\frac{13}{6}}$ exigerait pour Θ un signe tout à fait inadmissible.

Il serait bien intéressant de retrouver cette face sur des cristaux plus petits que ceux que j'ai eus entre les mains, car la détermination précise de toutes ses incidences permettrait d'établir un exemple frappant d'une notation très-compliquée.

Signe rhomboédrique.	Signe hexagonal.
$\Lambda = (d^{\frac{3}{5}}\ d^{\frac{3}{7}}\ b^{1})$	$(b^{\frac{1}{6}} b^{1}\ h^{\frac{2}{9}})$

Cette modification, qui fait partie d'une zone formée par la face β et par une face e^{2}, ne s'est rencontrée que sur un seul cristal transparent, représenté fig. 81, pl. III. Ce cristal, qui m'a été communiqué par M. Fournet, provient du terrain dévonien de Neffiez, dans le Languedoc, où l'on trouve fréquemment des cristaux bipyramidés dont l'un des sommets offre les plans du rhomboèdre b^{1}, ternes mais souvent très-développés. Λ ferait aussi partie de la zone inobservée $k_{1}\ \tau_{1}\ \Lambda\ a^{1}\ b^{5}\ \varepsilon\ y$; son existence paraît donc aussi certaine que celle de toutes les faces qu'on rencontre dans deux zones.

Comme je l'ai dit, page 466, on pourrait peut-être admettre pour

β le signe rhomboédrique $(d^{\frac{4}{11}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$; dans ce cas, les symboles rhomboédrique et hexagonal de Λ satisfaisant à la zone $\beta\ e^2$ seraient $(d^{\frac{4}{7}}\ d^{\frac{8}{19}}\ b^1)$ et $(b^{\frac{5}{22}}\ b^1\ h^{\frac{1}{5}})$, expressions notablement plus compliquées que celles qui sont adoptées ici.

Quoique le nombre des faces nouvelles décrites dans ce Mémoire s'élève à un total de cent trente-trois, ce qui porte les formes connues du quartz au nombre de cent soixante-huit, il est plus que probable que les observations futures en feront encore découvrir d'autres[1], et je n'ai pas la prétention d'avoir épuisé un sujet qui paraît beaucoup plus fécond qu'on ne l'avait supposé jusqu'à présent. Ce qui me semble digne de remarque dans les trente-cinq faces isolées qui, par une extension suffisante de leurs plans, formeraient des hémiscalénoèdres, situés d'une manière tout à fait arbitraire sur les angles solides du rhomboèdre primitif, c'est que ces faces sont toutes comprises au moins dans une, et quelquefois dans deux zones formées par deux modifications faciles à constater, et généralement assez communes dans la cristallisation du quartz.

M. Brooke a pourtant trouvé, sur des cristaux de sa collection, deux hémiscalénoèdres qui ne remplissent pas cette condition : l'un, η, a pour signe rhomboédrique $(b^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{7}}\ b^1)$; il ne fait partie que de la zone inobservée $k_2\ \mu\ \tau\ a^1\ t_3\ u$; l'autre, δ, est exprimé par le symbole $(d^{\frac{1}{11}}\ d^{\frac{2}{19}}\ b^1)$, et la seule zone où l'on pourrait le rencontrer, serait formée par les faces $v\ a^1\ \tau_4$. Du reste, ces deux modifications sont excessivement rares, et je n'ai jamais eu l'occasion de rien voir qui s'en rapprochât.

Voici maintenant le tableau comparatif des incidences calculées et des incidences observées directement; les inclinaisons mutuelles des faces y sont inscrites suivant l'ordre des diverses zones auxquelles ces faces appartiennent.

[1] Lorsque j'ai présenté mon mémoire à l'Institut, le nombre des faces nouvelles n'était que de cent dix-neuf. Depuis cette époque, j'en ai déjà retrouvé quatorze totalement inconnues jusqu'ici.

RHOMBOÈDRES DIRECTS.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
pa^{7}	= 168° 28′	168° 45′ à 169°.
	ou :	
$pa^{\frac{15}{2}}$	= 169° 12′	
pa^{1}	= 160° 38′	//
pe^{32}	= 177° 23′	177° 26′ moyenne.
pe^{26}	= 176° 46′	176° 34′ moyenne.
pe^{23}	= 176° 21′	176° 6′ moyenne.
pe^{20}	= 175° 48′	175° 42′ moyenne.
pe^{17}	= 175° 3′	175° 9′ moyenne.
pe^{15}	= 174° 24′	174° 31′ moyenne.
pe^{14}	= 173° 59′	173° 52′ moyenne.
pe^{12}	= 172° 59°	173° 1′ moyenne.
pe^{11}	= 172° 21′	172° 24′ moyenne.
pe^{10}	= 171° 35′	171° 35′ moyenne.
pe^{8}	= 169° 29′	169° 32′ moyenne.
$pe^{\frac{13}{2}}$	= 167° 4′	//
$pe^{\frac{11}{2}}$	= 164° 46′	164° 46′ moyenne.
pe^{5}	= 163° 16′	//
$pe^{\frac{31}{6}}$	= 160° 12′	160° 5′
$pe^{\frac{7}{2}}$	= 156° 29′	//
pe^{3}	= 152° 55′	//
$pe^{\frac{20}{10}}$	= 152° 5′	152° 11′ moyenne.
$pe^{\frac{11}{11}}$	= 151° 23′	151° 20′
$pe^{\frac{11}{4}}$	= 150° 44′	150° 45′
$pe^{\frac{8}{3}}$	= 149° 56′	//
$pe^{\frac{13}{5}}$	= 149° 16′	//
$pe^{\frac{5}{2}}$	= 148° 12′	148° 5′

Incidences calculées.	Incidences observées.
ou :	
$pe^{\frac{17}{7}} = 147° 24'$	$147° 24'$ moyenne.
$pe^{\frac{7}{3}} = 146° 17'$	$146° 25'$ moyenne.
$pe^{\frac{9}{4}} = 145° 15'$	$145° 16'$ moyenne.
$pe^{\frac{11}{5}} = 144° 36'$	$144° 2'$ moyenne.
ou :	
$pe^{\frac{13}{6}} = 144° 9'$	
$pe^{\frac{31}{15}} = 142° 46'$	$142° 40'$
$pe^{2} = 141° 47'$	//

RHOMBOÈDRES INVERSES.

$e^{\frac{1}{2}} b^{1} = 160° 38'$	//
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{10}{17}} = 176° 46'$	$176° 45'$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{7}{11}} = 175° 3'$	$175°$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{3}} = 173° 59'$	$173° 40'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{5}{7}} = 172° 21'$	$172° 34'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4}} = 171° 8'$	$171° 20'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{10}{13}} = 170° 30'$	$170° 18'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4}{5}} = 169° 29'$	$169° 13'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{7}{9}} = 167° 4'$	$167° 10'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{14}{15}} = 165° 16'$	$165° 19'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{19}{20}} = 164° 46'$	$164° 25'$ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}} e^{1} = 163° 16'$	//
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{20}{19}} = 161° 45'$	$161° 45'$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{11}{10}} = 160° 26'$	$160° 24'$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{9}{7}} = 159° 16'$	$159° 16'$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{6}{5}} = 157° 46'$	$157° 42'$
$e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{11}{9}} = 157° 11'$	$157° 13'$ moyenne.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{5}{4}}$	= 156° 29′	156° 30′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{13}{10}}$	= 155° 16′	155° 11′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{3}}$	= 154° 28′	154° 30′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{7}{5}}$	= 152° 55′	153°
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{25}{17}}$	= 151° 23′	151° 23′ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{3}{2}}$	= 150° 44′	150° 30′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{11}{7}}$	= 149° 16′	149° 30′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{13}{8}}$	= 148° 12′	//
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{5}{3}}$	= 147° 24′	147° 26′
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{19}{11}}$	= 146° 17′	146° 15′ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{7}{4}}$	= 145° 53′	146°
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{11}{6}}$	= 144° 26′	144° 27′ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{23}{13}}$	= 143° 4′	143° 14′ moyenne.
ou :		
$e^{1}\,e^{\frac{27}{14}}$	= 142° 53′	142° 48′ moyenne.
$e^{\frac{1}{2}}\,e^{2}$	= 141° 47′	//

FACE RHOMBE *s*.

$se^{\frac{1}{2}}$	= 151° 6′	151° 5′
se^{2}	= 142° 2′	142° 1′
sx	= 154° 3′	154°
sp	= 151° 6′	//
s infér. : *p* supér.	= 111° 19′	//
$se^{\frac{1}{2}}$ adjacent	= 150° 11′	150°
$se^{\frac{7}{2}}$ opposé	= 96° 1′	96°
$se^{\frac{1}{2}}$ adjacent	= 152° 55′	//
*s*ϐ adjacent	= 161° 24′	161° 35′

Zone $e^{\frac{7}{2}}$, ϐ, *s*, $e^{\frac{5}{3}}$, $e^{\frac{7}{2}}$.

Incidences calculées.	Incidences observées.
$sR = 156° 7'$	$156°$ à $156° 10'$
$se^{\frac{13}{8}} = 146° 3'$	$146°$
Zone s, R, $e^{\frac{13}{8}}$.	
$s\Phi = 156° 29'$	$156° 10'$
$se^{\frac{17}{7}} = 145° 36'$	$146°$ environ.
Zone s, Φ, $e^{\frac{17}{7}}$.	
$sd^1 = 155° 33'$	"
$sa^1 = 114° 27'$	"
Zone $a^1 s d^1$.	
$s = (d^1\ d^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{3}})$ ou $(b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$.	

PLAGIÈDRES INFÉRIEURS DE LA ZONE $e^{\frac{1}{3}}\ s\ e^2$.

$v_4\ e^{\frac{1}{2}} = 115° 1'$	$115° 1'$ moyenne.
$v_4 = (b^{\frac{11}{24}}\ d^1\ d^{\frac{11}{12}})$.	
$v_3\ e^{\frac{1}{2}} = 115° 59'$	$115° 55'$ moyenne.
$v_3\ e^2 = 177° 9'$	$177° 16'$ moyenne.
$v_3\ x = 170° 50'$	$170° 52'$
$v_3 = (b^{\frac{7}{16}}\ d^1\ d^{\frac{7}{8}})$.	
$v_2\ e^{\frac{1}{2}} = 116° 57'$	$116° 58'$ moyenne.
$v_2\ e^2 = 176° 11'$	$176° 11'$ moyenne.
$v_2\ s = 145° 31'$	$145° 41'$ moyenne.
$v_2\ p = 144° 16'$	"
$v_2 = (b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$.	
$v_1\ e^{\frac{1}{2}} = 118° 29'$ ou : $v_1\ e^{\frac{1}{2}} = 118° 56'$	$118° 50'$
$v_1\ e^2 = 174° 39'$ ou : $v_1\ e^2 = 174° 13'$	$174°$ environ.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$v_1\ s$ = 147° 23′		//
ou :		
$v_1\ s$ = 147° 49′		//
$v_1\ p$ adjacent = 145° 12′		//
ou :		
$v_1\ p$ adjacent = 145° 28′		//
$v_1 = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{10}{13}})$; zone p inf. $v_1\ e^{\frac{13}{5}}$,		
ou :		
$v_1 = (b^{\frac{5}{8}}\ d^1\ d^{\frac{3}{8}})$; zone p inf. $v_1\ e^{\frac{8}{3}}$.		
$ve^{\frac{1}{2}}$ = 122°		121° 19′ à 122°
ou :		
$ve^{\frac{1}{2}}$ = 120° 58′		
ve^3 = 171° 8′		171° 54′ à 172°
ou :		
ve^3 = 172° 10′		
vs = 150° 54′		150° 30′ à 151° 5′
ou :		
vs = 151° 56′		
vp adjacent = 147° 12′		//
ou :		
vp adjacent = 146° 37′		//
$v = (b^{\frac{6}{16}}\ d^1\ d^{\frac{5}{8}})$,		
ou :		
$v = (b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{2}{3}})$; zone p inf. k_1, v, e^3.		
$xe^{\frac{1}{2}}$ = 125° 9′		//
xe^3 = 167° 59′		168°
x droit : e^3 gauche,		
ou :		
x gauche : e^3 droit = 110° 48′		//

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$xe^{\frac{13}{5}}$	$= 171° 5'$	$171°$
$x\Omega$	$= 139° 45'$	//
Zone e^2 gauche, $e^{\frac{13}{5}}$ Ω, x droit,		
ou :		
e^2 droit, $e^{\frac{13}{5}}$ Ω, x gauche.		
$xe^{\frac{8}{3}}$	$= 171° 7'$	//
x droit : $e^{\frac{7}{4}}$ gauche,		
ou :		
x gauche : $e^{\frac{7}{4}}$ droit	$= 111° 22'$	$111° 25'$
Zone $e^{\frac{7}{4}}$ gauche, $e^{\frac{8}{3}}$, x droit,		
ou :		
$e^{\frac{7}{4}}$ droit, $e^{\frac{8}{3}}$, x gauche.		
x droit : $e^{\frac{1}{2}}$ gauche,		
ou :		
x gauche : $e^{\frac{1}{2}}$ droit	$= 111° 30'$.	
$xe^{\frac{7}{2}}$ adjacent	$= 169°$	$169° 10'$
$x\Pi_1$	$= 173° 8'$	$173°$
xM	$= 152° 11'$	$152° 25'$
Zone x gauche, Π_1, $e^{\frac{7}{2}}$ M, $e^{\frac{1}{2}}$ droit,		
ou :		
x droit, Π_1, $e^{\frac{7}{2}}$ M, $e^{\frac{1}{2}}$ gauche.		
$xe^{\frac{4}{3}}$	$= 129° 39'$	$129° 35'$
$x\mu$	$= 143° 13'$	$144°$ environ.
Zone x, μ, $e^{\frac{4}{3}}$.		
x supérieur : $e^{\frac{4}{3}}$ infér.	$= 157° 26'$.	//
x supérieur : n infér.	$= 167° 20'$.	//
Zone x supérieur n infér. $e^{\frac{4}{3}}$ infér.		

Incidences calculées.	Incidences observées.
$xe^{\frac{1}{3}} = 129° 17'$	129°
$x\lambda = 136° 14'$	136° 30′ environ.
Zone x, λ, $e^{\frac{5}{3}}$.	
$xe^{\frac{13}{8}} = 129° 22'$	//
$x\lambda_1 = 137° 10'$ ou : $x\lambda_1 = 139° 18'$	138° à 139°
Zone x, λ_1, $e^{\frac{13}{8}}$, ou : zone x, λ_1, $e^{\frac{5}{3}}$..	
x supérieur : $e^{\frac{5}{3}}$ infér. $= 163° 41'$..	163° 30′ environ.
x supérieur : n_1 infér. $= 167° 53'$..	168° environ.
Zone x supér. n_1 infér. $e^{\frac{5}{3}}$ inférieur.	
x supérieur : $e^{\frac{7}{4}}$ infér. $= 164° 55'$.	//
x supérieur : n_2 infér. $= 167° 58'$.	168° à 169°
Zone x supér. n_2 infér. $e^{\frac{7}{4}}$ inférieur.	
x droit : e^2 droit, ou :	
x gauche : e^2 gauche $= 128° 30'$..	//
$xe^{\frac{11}{4}}$ adjacent $= 171° 6'$	171° 5′
$x\alpha = 131° 58'$	131° 53′ moyenne.
$x\Delta = 169° 51'$	169° environ.
Zone e^2 gauche, α, Δ, x gauche, $e^{\frac{11}{4}}$, ou : e^2 droit, α, Δ, x droit, $e^{\frac{11}{4}}$.	
$xe^{9} = 169° 59'$	170° 7′ moyenne.
$x\Xi = 173°$	173° 8′
Zone x, Ξ, e^{9}.	
$xe^{\frac{11}{5}} = 169° 40'$	169° 41′ moyenne.
$xz_1 = 177° 43'$	//

Incidences calculées.	Incidences observées.
$xz = 173° 36'$	$173° 38'$ moyenne.
$x\Sigma = 172° 21'$	$172° 37'$ moyenne.
Zone x, z_1, z, Σ, $e^{\frac{11}{5}}$.	
$xe^{\frac{51}{16}} = 168° 38'$	$168° 15'$ environ.
$x\Sigma_1 = 171° 40'$	$171° 37'$ moyenne.
Zone x, Σ_1, $e^{\frac{31}{16}}$.	
xp adjacent $= 148° 46'$	$148° 47'$
$x\chi = 152° 4'$	$152° 5'$
$x\chi_1 = 155° 22'$	$155° 10'$
$x\chi_2 = 161° 57'$	$162°$
$x\chi_3 = 168° 20'$ ou : $x\chi_3 = 169° 7'$	$169° 5'$ moyenne.
Zone p, χ, χ_1, χ_2, χ_3, x.	
$x = (b^{\frac{1}{4}}\, d^1\, d^{\frac{1}{2}})$.	
$ye^{\frac{1}{2}} = 127° 43'$	//
$ye^2 = 165° 25'$	$165° 22'$
yp adjacent $= 149° 54'$	//
$y\varphi = 169° 27'$	//
Zone p, φ, y.	
$y = (b^{\frac{1}{5}}\, d^1\, d^{\frac{2}{5}})$.	
$ue^{\frac{1}{2}} = 131° 37'$	$131° 38'$
$ue^2 = 161° 31'$	//
u droit : e^2 droit, ou :	
u gauche : e^2 gauche $= 132° 38'$	$132° 38'$
$ue^{\frac{7}{2}} = 166° 17'$	$166° 15'$
$u\Pi = 176° 34'$	$176° 35'$
$ut = 136° 34'$	$136° 36'$

	Incidences calculées.	Incidences observées.
ut_1	$= 135° 21'$	//
ut_2	$= 134° 18'$	//
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, Π, u, t, t_1, t_2, e^2.		
$ue^{\frac{4}{3}}$ adjacent	$= 135° 3'$	$135°$
uq	$= 149° 58'$	$150°$
Zone u droit, q, $e^{\frac{4}{3}}$ droit.		
$ue^{\frac{6}{7}}$ adjacent	$= 135° 15'$	//
$u\varepsilon$	$= 153° 32'$	$153° 30'$
Zone u droit, ε, $e^{\frac{5}{7}}$ droit.		
$ue^{\frac{5}{4}}$	$= 135° 11'$	$135° 25'$
uw	$= 151° 37'$	$150° 45'$ environ.
Zone u, w, $e^{\frac{6}{4}}$ ou $\Xi^{\frac{7}{2}}$.		
$ue^{\frac{13}{8}}$	$= 134° 11'$	$134° 10'$
up	$= 143° 13'$	$144°$ environ.
Zone u, p, $e^{\frac{13}{8}}$.		
up adjacent	$= 151° 18'$	//
$u\Upsilon$	$= 154° 46'$	//
$u\Upsilon_1$	$= 157° 59'$	$158°$
$u\Upsilon_2$	$= 171° 3'$	$171° 17'$ moyenne.
Zone p, Υ, Υ_1, Υ_2, u.		
u	$= (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$.	
$\sigma e^{\frac{1}{2}}$	$= 144° 46'$	$144° 20'$ à $145°$
σe^2	$= 148° 22'$	//
σp adjacent	$= 152° 32'$	//
σ	$= (d^{\frac{1}{5}}\ d^1\ b^{\frac{1}{5}})$.	
$\sigma_1 e^{\frac{1}{2}}$	$= 154° 24'$	$154° 22'$ moyenne.
ou :		
$\sigma_1 e^{\frac{1}{2}}$	$= 153° 54'$	

PLAGIÈDRES SUPÉRIEURS DE LA ZONE $e^{\frac{1}{2}} s e^2$.

Incidences calculées.	Incidences observées.
$\sigma_1 p$ adjacent = 149° 53′	
ou :	150° 16′ moyenne.
$\sigma_1 p$ = 150° 5′	//
$\sigma_1 e^{\frac{11}{7}}$ 148° 9′	//
$\sigma_1 e^{\frac{13}{8}}$ = 147° 16′	//
$\sigma_1 = (d^{\frac{7}{22}} d^1 b^{\frac{7}{11}})$, ou : $\sigma_1 = (d^{\frac{4}{13}} d^1 b^{\frac{8}{13}})$.	
Zone p, σ_1, $e^{\frac{11}{7}}$, ou : zone p, σ_1, $e^{\frac{13}{8}}$.	
$\sigma_2 e^{\frac{1}{2}}$ = 155° 8′	155° 23′ moyenne.
$\sigma_2 p$ adjacent = 149° 34′	149° 56′ moyenne.
$\sigma_2 e^{\frac{3}{2}}$ adjacent = 149° 24′	//
$\sigma_2 = (d^{\frac{1}{3}} d^1 b^{\frac{2}{3}})$.	
Zone p, σ_2, $e^{\frac{3}{2}}$.	
$\sigma_3 e^{\frac{1}{2}}$ = 157° 5′	156° 40′ environ.
$\sigma_3 x$ = 148° 4′	149° environ.
$\sigma_3 p$ adjacent = 148° 42′	//
$\sigma_3 e^{\frac{4}{3}}$ adjacent = 152° 35′	//
$\sigma_3 = (d^{\frac{3}{5}} d^1 b^{\frac{3}{4}})$.	
Zone p, σ_3, $e^{\frac{4}{3}}$.	
$\mathrm{L} e^{\frac{1}{2}}$ = 162° 37′	161° 47′ moyenne.
$\mathrm{L} e^2$ = 130° 31′	130° 40′ à 131° 25′
$\mathrm{L} p$ adjacent = 145° 46′	//
$\mathrm{L} e^1$ adjacent = 160° 33′	//
$\mathrm{L} = (d^{\frac{1}{2}} d^1 b^1)$.	
Zone p, L, e^1.	
$\tau e^{\frac{1}{2}}$ = 167° 40′	167° 41′ à 168°
τe^2 = 125° 28′	125° environ.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
τp adjacent	$= 142^\circ\ 36'$	//
$\tau e^{\frac{5}{5}}$ adjacent	$= 166^\circ\ 51'$	//
$\tau = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{5}}\ b^1)$.		
Zone latérale p, τ, $e^{\frac{5}{5}}$.		
$\tau_1 e^{\frac{1}{8}}$	$= 170^\circ\ 29'$	$170^\circ\ 27'$ moyenne.
$\tau_1 p$ adjacent	$= 140^\circ\ 48'$	//
$\tau_1 e^{\frac{5}{7}}$ adjacent	$= 169^\circ\ 57'$	//
$\tau_1 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{7}}\ b^1)$.		
Zone latérale p, τ_1, $e^{\frac{5}{7}}$.		
$\tau_2 e^{\frac{1}{2}}$	$= 172^\circ\ 15'$	$172^\circ\ 16'$ moyenne.
$\tau_2 e^2$	$= 120^\circ\ 53'$	$120^\circ\ 35'$
$\tau_2 p$ adjacent	$= 139^\circ\ 30'$	//
$\tau_2 e^{\frac{2}{3}}$ adjacent	$= 171^\circ\ 58'$	//
$\tau_2 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{2}{3}}\ b^1)$.		
Zone latérale p, τ_2, $e^{\frac{2}{3}}$.		
$\tau_3 e^{\frac{1}{2}}$	$= 173^\circ\ 28'$	$173^\circ\ 31'$ moyenne.
$\tau_3 p$ adjacent	$= 138^\circ\ 38'$	//
$\tau_3 e^{\frac{7}{11}}$	$= 173^\circ\ 16'$	//
$\tau_3 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{7}{11}}\ b^1)$.		
Zone latérale p, τ_3, $e^{\frac{7}{11}}$.		
$\tau_4 e^{\frac{1}{2}}$	$= 174^\circ\ 21'$	$174^\circ\ 31'$ moyenne.
$\tau_4 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{7}}\ b^1)$.		
$\tau_5 e^{\frac{1}{2}}$	$= 175^\circ\ 34'$	$175^\circ\ 32'$ moyenne.
$\tau_5 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{10}{17}}\ b^1)$.		
Zone latérale p, τ_5, $e^{\frac{10}{17}}$.		
$\tau_6 e^{\frac{1}{2}}$	$= 176^\circ\ 21'$	$176^\circ\ 34'$ moyenne.
$\tau_6 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{7}}\ b^1)$.		

Incidences calculées.	Incidences observées.
$\tau_7 e^{\frac{1}{2}} = 177^\circ\ 7'$ ou : $\tau_7 e^{\frac{1}{2}} = 177^\circ\ 37'$	$177^\circ\ 21'$ moyenne.
$\tau_7 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{9}}\ b^1)$, ou $\tau_7 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{11}}\ b^1)$.	
$\beta e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $= 170^\circ\ 13'$	170° à 171°
βp opposé $= 143^\circ\ 31'$	142° à 143°
βe^3 adjacent $= 137^\circ\ 38'$	$137^\circ\ 40'$
Zone β, Λ, e^3, et zone $e^{\frac{1}{2}}$, β, p.	
$\beta = (d^{\frac{7}{10}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$.	
Hp adjacent $= 172^\circ\ 19'$	$172^\circ\ 20'$
Hx adjacent $= 147^\circ\ 37'$	148°
Hs inférieur $= 112^\circ\ 23'$	113° environ.
Hx inférieur $= 118^\circ\ 13'$	119° environ.
$H = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$.	
Zone p, H, $e^{\frac{1}{2}}$.	
γp adjacent $= 164^\circ\ 58'$	$164^\circ\ 46'$ moyenne.
$\gamma e^{\frac{1}{2}}$ opposé $= 148^\circ\ 46'$	150° moyenne.
$\gamma = (d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$.	
Zone p, γ, $e^{\frac{1}{2}}$.	
$\gamma_1 e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $= 164^\circ\ 58'$	$164^\circ\ 46'$
$\gamma_1 p$ opposé $= 148^\circ\ 46'$	"
$\gamma_1 \gamma$ adjacent $= 163^\circ\ 48'$	$164^\circ\ 20'$ environ.
$\gamma_1 = (d^{\frac{2}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$.	
Zone $e^{\frac{1}{2}}$ γ_1 p.	

PLAGIÈDRES INFÉRIEURS DE LA ZONE pse^3.

N$p = 149^\circ\ 28'$	$149^\circ\ 31'$ moyenne.
N$e^3 = 143^\circ\ 40'$	"

Incidences calculées.	Incidences observées.
$Ne^{\frac{1}{5}}$ adjacent $=$ 151° 35′.....	//
$N = (d^1\, d^{\frac{5}{15}}\, b^{\frac{1}{2}})$.	
$N_1 p =$ 146° 22′.....	146° 27′ moyenne.
$N_1 e^3 =$ 146° 46′.....	//
$N_1 c^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 152° 17′.....	
$N_1 = (d^1\, d^{\frac{3}{10}}\, b^{\frac{1}{2}})$.	
$\theta p =$ 144° 46′.....	144° 35′
$\theta e^3 =$ 148° 22′.....	/
$\theta e^{\frac{1}{3}}$ adjacent $=$ 152° 32′.....	//
$\theta e^{\frac{7}{2}}$ adjacent $=$ 145° 44′.....	//
$\theta \varkappa =$ 152° 32′.....	152° 20′ environ.
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, $\varkappa$, θ.	
$\theta e^{\frac{7}{4}} =$ 150° 59′.....	151°
$\theta = (d^1\, d^{\frac{7}{22}}\, b^{\frac{1}{2}})$ inverse de σ.	
$\pi p =$ 141° 31′.....	141° 35′
$\pi e^3 =$ 151° 37′.....	151° 39′
$\pi c^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 152° 45′.....	153° environ.
$\pi e^{\frac{8}{7}} =$ 159° 16′.....	158° 40′ environ.
$\pi e^{\frac{7}{3}} =$ 143° 15′.....	//
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, π, $e^{\frac{8}{7}}$.	
$\pi e^{\frac{11}{9}} =$ 158° 56′.....	159°
$\pi = (d^1\, d^{\frac{5}{14}}\, b^{\frac{1}{2}})$.	
$\varepsilon p =$ 138° 13′.....	138° 10′
$\varepsilon e^3 =$ 154° 55′.....	154° 50′
$\varepsilon e^{\frac{1}{3}}$ adjacent $=$ 152° 37′.....	/
$\varepsilon e^{\frac{8}{7}} =$ 161° 43′.....	//
$\varepsilon e^{\frac{7}{3}}$ adjacent $=$ 140° 38′.....	140° 10′ environ.
$\varepsilon \mathfrak{Z}^{\frac{7}{3}}$ ou $e^{\frac{5}{4}} =$ 161° 31′.....	162° environ.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, ε, $\mathrm{E}^{\frac{7}{2}}$ ou $e^{\frac{5}{4}}$.		
$\varepsilon e^{\frac{13}{10}}$	$= 161° 9'$	$161° 35'$
$\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{3}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$.		
wp	$= 135° 35'$	$135° 40'$
we^2	$= 157° 33'$	$157° 30'$
$we^{\frac{1}{9}}$ adjacent	$= 152° 15'$	$''$
$we^{\frac{7}{2}}$ adjacent	$= 138° 29'$	$138° 20'$
$we^{\frac{4}{3}}$	$= 163° 22'$	$163° 35'$
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, w, $e^{\frac{4}{3}}$.		
$w\mathrm{E}^{\frac{7}{2}}$ ou $e^{\frac{5}{4}}$	$= 163° 34'$	$''$
Zone u, w, $\mathrm{E}^{\frac{7}{2}}$ ou $e^{\frac{5}{4}}$.		
$w = (d^1\ d^{\frac{7}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$.		
qp	$= 133° 25'$	$133° 30'$
qe^2	$= 159° 43'$	$159° 45'$
$qe^{\frac{1}{2}}$ adjacent	$= 151° 47'$	$''$
$qe^{\frac{4}{3}}$	$= 165° 5'$	$164° 30'$ environ.
qe^3	$= 136° 19'$	$136° 10'$
$qe^{\frac{13}{10}}$	$= 165° 8'$	$164° 52'$
Zone u, q, $e^{\frac{4}{3}}$.		
$q = (d^1\ d^{\frac{8}{17}}\ b^{\frac{1}{2}})$.		
μp	$= 131° 37'$	$''$
μe^2	$= 161° 31'$	$161° 30'$
$\mu e^{\frac{1}{2}}$ adjacent	$= 151° 18'$	$''$
$\mu e^{\frac{9}{7}}$	$= 166° 26'$	$166° 20'$
Zone x, μ, $e^{\frac{4}{3}}$ et zone u, μ, $e^{\frac{7}{5}}$.		
$\mu = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de u.		
$\mu_1 p$	$= 129° 27'$	$129° 45'$ moyenne.
$\mu_1 e^2$	$= 163° 41'$	$''$

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$\mu_1 e^{\frac{5}{3}}$ adjacent $=$ 167° 55′		//
$\mu_1 e^2$ latéral $=$ 131° 17′		//
Zone e^2, μ_1, $e^{\frac{5}{3}}$.		
$\mu_1 = (d^1\, d^{\frac{7}{13}}\, b^{\frac{1}{2}})$.		
$\mu_1 p =$ 127° 7′		127° 5′
$\mu_1 e^2 =$ 166° 1′		//
Zone x, μ_1, $e^{\frac{3}{2}}$.		
$\mu_1 = (d^1\, d^{\frac{7}{12}}\, b^{\frac{1}{2}})$.		
$\rho p =$ 125° 9′		124° à 126°
$\rho e^2 =$ 167° 59′		168° environ.
$\rho\theta =$ 160° 23′		160° 15′
$\rho e^{\frac{13}{6}} =$ 170° 58′		169° 30′ environ.
Zone u, ρ, $e^{\frac{13}{6}}$.		
$\rho e^{\frac{7}{4}} =$ 170° 16′		171°
$\rho = (d^1\, d^{\frac{5}{6}}\, b^{\frac{1}{2}})$ inverse de x.		
$\lambda p =$ 122° 30′		122° 30′
$\lambda s =$ 151° 24′		152° environ.
$\lambda e^2 =$ 170° 38′		//
$\lambda e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 147° 27′		147° 40′
$\lambda e^{\frac{5}{3}} =$ 173° 3′		173°
Zone x, λ, $e^{\frac{5}{3}}$.		
$\lambda = (d^1\, d^{\frac{11}{16}}\, b^{\frac{1}{2}})$.		
$\lambda_1 p =$ 123° 39′ ou : $\lambda_1 p =$ 124° 55′		123° 30′ à 124° 25′
$\lambda_1 e^{\frac{13}{6}} =$ 172° 12′ ou : $\lambda_1 e^{\frac{5}{3}} =$ 169° 59′		171° 10′ environ.

Incidences calculées.	Incidences observées.
Zone x, λ_1, $e^{\frac{18}{5}}$, ou zone x, λ_1, $e^{\frac{5}{3}}$ . .	
$\lambda_1 = (d^1 d^{\frac{29}{14}} b^{\frac{1}{2}})$, ou $\lambda_1 = (d^1 d^{\frac{11}{19}} b^{\frac{5}{14}})$.	
$np = 118° 29'$	118° environ.
$ne^2 = 174° 39'$	175° environ.
$ns = 147° 23'$	146° 50′ à 148°
$ne^{\frac{1}{2}}$ adjacent $= 145° 12'$	//
$ne^{\frac{4}{3}}$ adjacent $= 170° 6'$	//
Zone x supér. n infér. $e^{\frac{4}{3}}$ inférieur.	
$n = (d^1 d^{\frac{4}{5}} b^{\frac{1}{2}})$ inv. de $v_1 = (b^{\frac{5}{13}} d^1 d^{\frac{10}{13}})$.	
$n_1 p = 116° 15'$	116° 20′
$n_1 e^2 = 176° 53'$	176° 55′
$n_1 e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $= 143° 49'$	//
$n_1 e^{\frac{5}{3}}$ adjacent $= 175° 47'$	175° 30′
Zone x supér. n_1 infér. $e^{\frac{6}{3}}$ inférieur.	
$n_1 = (d^1 d^{\frac{7}{5}} b^{\frac{1}{2}})$.	
$n_2 p = 115° 34'$	//
$n_2 e^2 = 177° 34'$	//
$n_2 e^{\frac{7}{6}}$ adjacent $= 176° 57'$	//
zone x supér. n_2 infér. $e^{\frac{7}{6}}$ inférieur. .	
$n_2 = (d^1 d^{\frac{9}{10}} b^{\frac{1}{2}})$.	

PLAGIÈDRES SUPÉRIEURS DE LA ZONE pse^2.

$t_1 p = 154° 24'$	154° 14′ moyenne.
ou :	
$t_1 p = 153° 54'$	153° environ.
$t_1 e^2 = 138° 43'$	139° environ.
ou :	
$t_1 e^2 = 139° 13'$	

Incidences calculées.	Incidences observées.
$t_1 e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 149° 53′.....	//
ou :	
$t_1 e^{\frac{1}{2}} =$ 150° 5′.....	//
$t_1 = (d^1\ d^{\frac{5}{23}}\ b^{\frac{1}{2}})$.....	inverse de σ_1.
ou :	
$t_1 = (d^1\ d^{\frac{2}{9}}\ b^{\frac{1}{2}})$.....	
$tp =$ 158° 13′.....	158° 15′
$te^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 148° 9′.....	148° 10′
$te^{\frac{7}{2}}$ adjacent $=$ 154° 20′.....	154° 30′
$t\varphi =$ 163° 12′.....	163° 30′ environ.
Zone $e^{\frac{1}{2}}$, t, φ, $e^{\frac{7}{2}}$ et :	
Zone e^3 ant. t et γ_1 droits ou gauches.	
$t = (d^1\ d^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$.	
$t_2 p =$ 162° 37′.....	162° 30′
$t_2 s =$ 168° 29′.....	168° 20′
$t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de L.	
$t_3 p =$ 167° 41′.....	166° à 167°
$t_3 s =$ 163° 25′.....	163° 30′
$t_3 e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $=$ 142° 37′.....	//
$t_3 = (d^1\ d^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de τ.	
$t_4 p =$ 175° 34′.....	175° 36′ moyenne.
$t_4 = (d^1\ d^{\frac{1}{28}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de τ_5.	
$t_5 p =$ 176° 21′.....	176° 30′ moyenne.
$t_5 = (d^1\ d^{\frac{1}{34}}\ b^{\frac{1}{2}})$ inverse de τ_6.	
$t_6 p =$ 177° 37′.....	177° 29′ moyenne.
$t_6 = (d^1\ d^{\frac{1}{52}}\ b^{\frac{1}{2}})$.	

PRISMES SYMÉTRIQUES À SIX OU À DOUZE PANS.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
ke^2 adjacent	$= 171^\circ\ 3'$	$171^\circ\ 10'$
ke^2 opposé	$= 128^\circ\ 57'$	$128^\circ\ 20'$
$k\rho$	$= 171^\circ\ 57'$	//
$k\tau_2$	$= 144^\circ\ 44'$	//
ka^1	$= 90^\circ$	//
kx	$= 171^\circ\ 57'$	//
$k\Phi$	$= 168^\circ\ 1'$	//
k	$= (b^{\frac{5}{11}}\ d^1\ d^{\frac{5}{7}})$	//

Zone $k\ \rho\ \tau_2\ a^1\ \Phi\ x$, et :

Zone p inférieur, k, $e^{\frac{11}{5}}$ supérieur.

k_1e^2 adjacent	$= 169^\circ\ 6'$	$169^\circ\ 33'$ moyenne.
k_1k_1	$= 141^\circ\ 47'$	$142^\circ\ 30'$ environ.
$k_1\tau_1$	$= 145^\circ\ 30'$	//
$k_1\Lambda$	$= 142^\circ\ 17'$	//
k_1a^1	$= 90^\circ$	//
k_1y	$= 170^\circ\ 15'$	//
$k_1\varepsilon$	$= 161^\circ\ 1'$	//
k_1b^5	$= 123^\circ\ 55'$	//
k_1	$= (b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$	//

Zone $k_1\ \tau_1\ \Lambda\ a^1\ b^5\ \varepsilon y$ et :

Zone p inférieur, k_1, e^3 supérieur.

k_2e^2 adjacent	$= 166^\circ\ 6'$	$166^\circ\ 48'$ moyenne.
k_2e^2 opposé	$= 133^\circ\ 54'$	$134^\circ\ 7'$ moyenne.
$k_2\mu$	$= 167^\circ\ 41'$	//
$k_2\tau$	$= 146^\circ\ 47'$	//
$k_2\eta$	$= 116^\circ\ 58'$	//
k_2a^1	$= 90^\circ$	//

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$k_2 u$	$= 167° 41'$	"
$k_2 t_3$	$= 146° 47'$	"
k_2	$= (b^{\frac{2}{7}} d^1 d^{\frac{2}{5}})$.	
Zone $k_2 \mu \tau \eta a^1 t_3 u$ et :		
Zone p inférieur, k_2, $e^{\frac{7}{2}}$ supérieur.		
$k_3 e^2$ adjacent	$= 163° 54'$	$163° 47'$ moyenne.
$k_3 k_3$	$= 152° 12'$	$152° 30'$
k_3	$= (b^{\frac{1}{4}} d^1 d^{\frac{1}{3}})$.	
$k_4 e^2$ adjacent	$= 160° 54'$	$160°$ environ.
$k_4 \varepsilon$	$= 163° 26'$	"
$k_4 \mathrm{L}$	$= 149° 15'$	"
$k_4 \gamma_1$	$= 138° 14'$	"
$k_4 b^{\frac{3}{2}}$	$= 123° 54'$	'
$k_4 a^1$	$= 90°$	"
$k_4 \Delta$	$= 173° 13'$	"
$k_4 t_2$	$= 149° 15'$	"
$k_4 \gamma$	$= 138° 14'$	"
$k_4 b^3$	$= 130° 2'$	"
k_4	$= (b^{\frac{1}{5}} d^1 d^{\frac{1}{4}})$.	
Zone $k_4 \varepsilon \mathrm{L} \gamma_1 b^{\frac{3}{2}} a^1 b^3 \gamma t_2 \Delta$ et :		
Zone p inférieur, k_4, e^5, supérieur.		
$c e^2$ adjacent	$= 158° 57'$	"
c	$= (b^{\frac{1}{6}} d^1 d^{\frac{1}{5}})$.	
$k_5 e^2$ adjacent	$= 157° 33'$	$157° 21'$ moyenne.
$k_5 k_5$	$= 164° 54'$	$164° 50'$ moyenne.
k_5	$= (b^{\frac{1}{7}} d^1 d^{\frac{1}{6}})$.	
$k_6 e^2$ adjacent	$= 156° 35'$	$156° 36'$ moyenne.
$k_6 k_6$	$= 166° 50'$	$166° 35'$ environ.
$k_6 t$	$= 151° 33'$	"

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$k_6 a^1 = 90°$		′
$k_6 = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{7}})$.		
Zone $k_6\ t\ a^1$ et :		
Zone p inférieur, k_6, e^8 supérieur.		
$k_7 e^2$ adjacent $= 155° 49'$		$155° 45'$
$k_7 = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{8}})$.		
$k_8 e^2$ adjacent $= 155° 13'$		$155° 11'$ moyenne.
$k_8 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{9}})$.		
Zone p inférieur, k_8, e^{10} supérieur.		
$k_9 e^2$ adjacent $= 153° 40'$		$153° 37'$ à $154° 19'$
$k_9 \sigma_2 = 153° 15'$		//
$k_9 a^1 = 90°$		//
$k_9 = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\frac{1}{10}})$.		
Zone $k_9\ \sigma_2\ a^1$ et :		
Zone p inférieur, k_9, e^{11} supérieur.		

ISOCÉLOÈDRES.

$\xi e^{\frac{1}{2}}$ ou $\xi p = 156° 52'$		$156° 55'$
$\xi e^2 = 129° 51$		//
$\xi d^1 = 137° 43'$		//
$\xi a^1 = 132° 17'$		//
Zone a^1, ξ, d^1.		
$\xi = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^1)$.		
$\Gamma e^2 = 127° 15'$		$127°$
$\Gamma p = 156° 42'$		//
$\Gamma a^1 = 135° 39'$		//
$\Gamma = (d^{\frac{1}{3}}\ d^{\frac{1}{7}}\ b^1)$.		

SCALÉNOÈDRES.

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$b^{\frac{3}{2}}p$ adjacent	= 147° 39′	147° à 148°
$b^{\frac{1}{3}}p$ opposé	= 126° 36′	127°
$b^{3}p$ adjacent	= 162° 2′	162° moyenne.
$b^{5}p$ adjacent	= 168° 33′	168° 30′
$b^{5}p$ opposé	= 105° 42′	105° 50′
$d^{\frac{17}{16}}p$ adjacent	= 148° 29′	148° 27′
$d^{\frac{3}{2}}p$ adjacent	= 145° 2′	146° environ.

FACES ISOLÉES.

$p\mathrm{D}$	= 128° 28′	"
$\mathrm{D}e^{\frac{11}{6}}$	= 160° 5′	160° 15′
$\mathrm{D}e^{2}$	= 139° 53′	140° 30′ environ.
D	= $(d^{1}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{3}{16}})$.	
$p\mathrm{D}_{1}$	= 137° 35′	"
$e^{2}\mathrm{D}_{1}$	= 157° 27′	156° 40′ à 158°
$\mathrm{D}_{1}e^{\frac{11}{6}}$	= 142° 31′	142° environ.
D_{1}	= $(b^{\frac{1}{5}}\ d^{1}\ d^{\frac{3}{20}})$.	
Zone e^{2}, D_{1}, D, $e^{\frac{11}{6}}$.		
ωp	= 135° 5′	135° 20′ moyenne.
$\omega e^{\frac{1}{2}}$	= 136° 16′	136° 15′
$\omega e^{\frac{5}{3}}$ adjacent	= 151° 5′	151°
ωe^{2} latéral	= 148° 46′	148° 35′
Zone $e^{\frac{5}{3}}$, ω, e^{2} latéral.		
ω	= $(d^{1}\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{15}})$.	

Incidences calculées.	Incidences observées
$\zeta p = 146° 29'$	145° environ.
ou :	
$\zeta p = 145°$	
$\zeta e^{\frac{7}{2}}$ adjacent $= 152° 14'$	152° 30′
ou :	
$\zeta e^{\frac{7}{2}} = 151° 2'$	
$\zeta e^{\frac{13}{10}}$ adjacent $= 149° 44'$	150° 15′
ou :	
$\zeta e^{\frac{13}{10}} = 150° 54'$	
$\zeta = (b^{\frac{9}{37}}\ d^1\ d^{\frac{9}{13}})$: zone $e^{\frac{7}{2}}$, ζ, $e^{\frac{13}{10}}$,	
ou :	
$\zeta = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{1}{4}})$, hémi-isocéloèdre.	
$\zeta_1 p = 147° 43'$	148° environ.
ou : 147° 13′	
ou : 149° 11′	
$\zeta_1 e^{\frac{7}{2}}$ adjacent $= 152° 56'$	152° 40′ environ.
ou : 152° 35′	
ou : 153° 54′	
$\zeta_1 e^{\frac{11}{9}}$ adjacent $= 149° 19'$	151° environ.
ou : 149° 22′	
ou : 148° 20′	
$\zeta_1 e^{\frac{5}{4}}$ adjacent $= 149° 34'$	//
$\zeta_1 = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{8}{53}})$: zone $e^{\frac{7}{2}}$, ζ_1, $e^{\frac{11}{9}}$,	
ou :	
$\zeta_1 = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{9}{13}})$: zone $e^{\frac{7}{2}}$, ζ_1, $e^{\frac{5}{4}}$,	
ou :	
$\zeta_1 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{4}})$.	

	Incidences calculées.	Incidences observées.
εp =	158° 35′	"
$\varepsilon e^{\frac{7}{2}}$ =	168° 47′	169° 30′ environ.
Zones s, ε, $e^{\frac{7}{2}}$, et p, ε, u.		
ε =	$(b^{\frac{1}{11}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{6}})$.	
$\mathrm{R}e^{\frac{13}{8}}$ =	169° 56′	170° environ.
Zone s, R, $e^{\frac{13}{8}}$.		
R =	$(d^{1}\ d^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{3}{5}})$.	
$\Phi e^{\frac{17}{7}}$ =	169° 7′	170° environ.
Zone s, Φ, $e^{\frac{17}{7}}$.		
Φ =	$(b^{\frac{1}{5}}\ d^{1}\ d^{\frac{5}{11}})$.	
Ωp =	135° 35′	135° 30′
$\Omega e^{\frac{13}{5}}$ adjacent =	148° 40′	148° environ.
Ωe^{2} latéral =	151° 3′	151° 30′ environ.
Zone $e^{\frac{13}{5}}$, x, Ω, e^{2} latéral.		
Ω =	$(d^{1}\ d^{\frac{1}{13}}\ b^{\frac{1}{12}})$.	
αp =	116° 4′	116° 4′ moyenne.
$\alpha e^{\frac{1}{2}}$ =	142° 17′	142° 41′
αe^{2} adjacent =	176° 32′	176° 31′
α =	$(d^{1}\ d^{\frac{22}{27}}\ b^{\frac{11}{26}})$.	
Δp =	144° 8′	"
Δe^{2} =	138° 39′	139° environ.
Δ =	$(b^{\frac{1}{9}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{6}})$.	
Zone e^{2}, α, Δ, x, $e^{\frac{11}{4}}$.		
$\Pi_{1} p$ =	153° 50′	"
$\Pi_{1} e^{\frac{7}{3}}$ =	175° 52′	176° 5′
Π_{1} =	$(b^{\frac{5}{11}}\ d^{1}\ d^{\frac{5}{8}})$.	
$\mathrm{M}p$ =	161° 5′	"

Incidences calculées.	Incidences observées.
$Me^{\frac{1}{2}} = 139°\ 19'$	$139°\ 18'$
$Me^{\frac{2}{3}}\ 163°\ 9'$	$162°\ 40'$
$M = (b^{\frac{2}{37}}\ d^1\ d^{\frac{1}{55}})$.	
Zone M, $e^{\frac{7}{3}}$, Π_1, x.	
$\Psi e^{\frac{1}{3}} = 169°\ 42'$	$169°\ 45'$
$\Psi e^{\frac{7}{2}} = 132°\ 46'$	$132°\ 30'$
$\Psi p = 142°\ 44'$	$142°\ 35'$
$\Psi = (d^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{4}})$.	
Zone $e^{\frac{1}{2}}\ \Psi\ t\ M\ \phi\ e^{\frac{7}{2}}\ x$.	
$\Xi p = 146°\ 33'$	$146°\ 30'$
$\Xi e^{\frac{9}{4}} = 176°\ 59'$	$177°\ 30'$ environ.
Zone x, Ξ, $e^{\frac{9}{4}}$.	
$\Xi = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$.	
$z_1 p = 148°\ 4'$	//
$z_1 e^{\frac{11}{5}} = 171°\ 57'$	$171°\ 20'$
$z_1 z = 175°\ 54'$	$175°\ 39'$
$z_1 = (b^{\frac{5}{17}}\ d^1\ d^{\frac{3}{5}})$.	
$zp = 146°\ 28'$	//
ou :	
$zp = 146°\ 15'$	//
$ze^{\frac{11}{5}} = 176°\ 4'$	$176°\ 1'$ moyenne.
ou :	
$ze^{\frac{11}{5}} = 176°\ 33'$	
$z = (b^{\frac{3}{8}}\ d^1\ d^{\frac{27}{34}})$, ou $z = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{9}{11}})$.	
$\Sigma p = 145°\ 54'$	//
ou :	
$\Sigma p = 145°\ 42'$	//

Incidences calculées.	Incidences observées.
$\Sigma e^{\frac{11}{5}} = 177^\circ\ 19'$ ou : $\Sigma e^{\frac{13}{6}} = 177^\circ\ 1'$	$177^\circ\ 15'$ moyenne.
$\Sigma = (b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$: zone $x, z_1, z, \Sigma, e^{\frac{11}{5}}$; ou : $\Sigma = (b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\frac{11}{12}})$: zone x, Σ, $e^{\frac{13}{6}}$.	
$\Sigma_1 p = 144^\circ\ 36'$	"
$\Sigma_1 e^{\frac{31}{15}} = 176^\circ\ 57'$	$176^\circ\ 55'$
$\Sigma_1 = (b^{\frac{18}{43}}\ d^1\ d^{\frac{6}{7}})$. Zone x, Σ_1, $e^{\frac{31}{15}}$.	
$\chi p = 176^\circ\ 42'$	$176^\circ\ 40'$
$\chi = (b^{\frac{1}{40}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$.	
$\chi_1 p = 173^\circ\ 24'$	$173^\circ\ 20'$ moyenne.
$\chi_1 = (b^{\frac{1}{20}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$.	
$\chi_2 p = 166^\circ\ 49'$	$166^\circ\ 30'$
$\chi_2 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^1)$.	
$\chi_3 p = 160^\circ\ 26'$ ou : $\chi_3 p = 159^\circ\ 39'$	$159^\circ\ 41'$ moyenne.
$\chi_3 = (b^{\frac{3}{20}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$, ou : $\chi_3 = (b^{\frac{5}{32}} d^1\ d^{\frac{1}{2}})$. Zone p, χ, χ_1, χ_2, χ_3, x.	
$\varphi p = 160^\circ\ 27'$	$160^\circ\ 28'$
$\varphi e^{\frac{1}{2}}$ adjacent $= 131^\circ\ 20'$	$131^\circ\ 18'$
$\varphi e^{\frac{7}{2}} = 171^\circ\ 8'$	$171^\circ\ 4'$
$\varphi = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$. Zones p, φ, γ, et t, φ, $e^{\frac{7}{2}}$.	
$tp = 116^\circ\ 40'$	$116^\circ\ 42'$

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$\iota e^{\frac{1}{2}}$	$= 142^\circ\ 46'$	$142^\circ\ 47'$
ιe^{2}	$= 176^\circ\ 4'$	$176^\circ\ 5'$
ι	$= (d^1\ d^{\frac{5}{5}}\ b^{\frac{6}{13}})$.	
$\iota_1 p$	$= 115^\circ\ 34'$	$115^\circ\ 28'$
$\iota_1 e^{\frac{1}{2}}$	$= 142^\circ\ 30'$	$142^\circ\ 29'$
$\iota_1 e^{2}$	$= 177^\circ\ 18'$	$177^\circ\ 15'$
ι_1	$= (d^1\ d^{\frac{6}{7}}\ b^{\frac{9}{19}})$.	
$\iota_2 p$	$= 114^\circ\ 38'$	$114^\circ\ 41'$
$\iota_2 e^{\frac{1}{2}}$	$= 142^\circ\ 16'$	$142^\circ\ 16'$
$\iota_2 e^{2}$	$= 178^\circ\ 20'$	$178^\circ\ 21'$
ι_2	$= (d^1\ d^{\frac{10}{11}}\ b^{\frac{15}{31}})$.	
ψp	$= 136^\circ\ 44'$	//
$\psi e^{\frac{7}{2}}$ adjacent	$= 146^\circ\ 2'$	146° environ.
ψe^{2} adjacent	$= 152^\circ\ 53'$	$153^\circ\ 35'$ environ.
ψ	$= (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{3}{16}})$.	
Πp	$= 153^\circ\ 7'$	//
$\Pi e^{\frac{7}{2}}$	$= 169^\circ\ 43'$	$169^\circ\ 45'$
Πe^{2}	$= 136^\circ\ 4'$	//
Π	$= (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{5}{8}})$.	
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, Π, u, ψ, ι, ι_1, ι_2, c^2.		
Υp	$= 176^\circ\ 52'$	177°
Υ	$= (b^{\frac{1}{13}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$.	
$\Upsilon_1 p$	$= 173^\circ\ 19'$	$173^\circ\ 20'$
Υ_1	$= (b^{\frac{1}{36}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$.	
$\Upsilon_2 p$	$= 160^\circ\ 14'$	$160^\circ\ 51'$ moyenne.
Υ_2	$= (b^{\frac{1}{12}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$.	
Zone p, Υ, Υ_1, Υ_2, u.		
xp	$= 157^\circ\ 21'$	//

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$x\,e^{\frac{1}{2}} = 173°\ 12'$		$172°\ 30'$ environ.
$x = (b^{\frac{7}{10}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{2}})$.		
Zone $e^{\frac{7}{2}}$, θ, x.		
$\Theta p = 118°\ 36'$		"
ou :		
$\Theta p = 119°\ 23'$		"
$\Theta s = 147°\ 26'$		
ou :		$147°$ à $148°$
$\Theta s = 148°\ 15'$		
$\Theta\,e^{\frac{5}{3}} = 177°\ 41'$		
ou :		$177°\ 34'$
$\Theta\,e^{\frac{6}{3}} = 176°\ 38'$		
$\Theta\,e^{\frac{11}{5}} = 122°\ 26'$		
ou :		$122°\ 30'$
$\Theta\,e^{\frac{11}{5}} = 123°\ 29'$		
$\Theta = (d^{1}\,d^{\frac{15}{17}}\ b^{\frac{9}{10}})$, ou : $\Theta = (d^{1}\,d^{\frac{5}{6}}\ b^{\frac{6}{11}})$.		
Zone $e^{\frac{11}{5}}$, Θ, $e^{\frac{5}{3}}$.		
$\beta\Lambda = 176°\ 42'$		$177°\ 5'$
$\Lambda e^{2} = 140°\ 56'$		$140°\ 45'$
$\Lambda = (d^{\frac{5}{6}}\ d^{\frac{3}{7}}\ b^{1})$.		
Zones β, Λ, e^{2} et k_{1}, Λ, a^{1}.		
$pp = 94°\ 15'$		"
$pa^{1} = 128°\ 13'$		$128°$ environ.
$pe^{\frac{1}{2}} = 133°\ 44'$		$133°\ 44'$
$pe^{\frac{1}{2}}$ opposé au sommet $= 76°\ 26'$.		"
pe^{2} ou $e^{\frac{1}{2}}\ e^{2}$ latéral $= 113°\ 8'$		"
$pd^{1} = 132°\ 53'$		$133°$
$b^{1}b^{1}$ adjacent $= 124°\ 41'$		"

	Incidences calculées.	Incidences observées.
$pe^{\frac{2}{3}}$	adjacent = 131° 28′.....	//
$pe^{\frac{6}{7}}$	adjacent = 130° 45′.....	//
$pe^{\frac{4}{5}}$	adjacent = 129° 27′.....	//
pe^{1}	adjacent = 126° 19′.....	//
$pe^{\frac{4}{3}}$	adjacent = 121° 17′.....	//
$pe^{\frac{3}{2}}$	adjacent = 118° 58′.....	//
$pe^{\frac{11}{7}}$	adjacent = 118° 2′.....	//
$pe^{\frac{13}{8}}$	adjacent = 117° 21′.....	//
$pe^{\frac{6}{3}}$	adjacent = 116° 51′.....	//
$pe^{\frac{7}{4}}$	adjacent = 115° 51′.....	//
$pe^{\frac{11}{6}}$	adjacent = 114° 54′.....	//
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{5}{5}}$	= 123° 6′.....	//
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{7}{2}}$	sur l'arête culminante = 66° 12′.	66°
$e^{\frac{7}{2}}\,\mathrm{I}^{\frac{7}{2}}$	ou $e^{\frac{7}{2}}$ = 122° 9′.....	122°
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{1}{2}}$	adjacent = 122° 28′.....	//
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{3}$	latéral = 118° 55′.....	//
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{8}{7}}$	adjacent = 122° 31′.....	122°
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{13}{10}}$	adjacent = 121° 58′.....	//
$e^{\frac{7}{8}}\,e^{\frac{11}{9}}$	adjacent = 122° 15′.....	122° 15′
$e^{\frac{7}{2}}\,e^{\frac{4}{3}}$	adjacent = 121° 51′.....	121° 45′
$e^{\frac{13}{5}}\,e^{3}$	latéral = 119° 43′.....	//
$e^{\frac{8}{3}}\,e^{\frac{7}{4}}$	adjacent = 120° 15′.....	//
$e^{\frac{11}{4}}\,e^{2}$	latéral = 119° 36′.....	//
$e^{\frac{4}{3}}\,e^{2}$	latéral = 119° 12′.....	//
$e^{\frac{5}{3}}\,e^{2}$	latéral = 119° 51′.....	119° 35′
$e^{\frac{11}{6}}\,e^{2}$	latéral = 119° 58′.....	//
$e^{\frac{13}{8}}\,e^{2}$	latéral = 119° 48′.....	//

	Incidences calculées.	Incidences observées.
e^3 $e^{\frac{13}{10}}$ adjacent	= 121° 28′.....	121° 30′
e^3 $e^{\frac{11}{8}}$ adjacent	= 120° 10′.....	120° 7′

Macles et groupements.

On peut distinguer dans les cristaux composés du quartz, comme dans ceux des autres minéraux, plusieurs modes d'assemblage, dont les principaux sont les suivants.

1° Les macles proprement dites, qui se font suivant un plan parallèle à une modification déjà existante, ou simplement possible, dans la cristallisation du minéral.

2° Les hémitropies, qu'on peut concevoir en admettant qu'une partie d'un cristal restant fixe, l'autre partie tourne d'un certain nombre de degrés autour de l'un de ses axes cristallographiques.

3° Les groupements par juxtaposition de deux cristaux accolés l'un contre l'autre, ou se pénétrant d'une petite quantité.

4° Les enchevêtrements complets résultant de la pénétration intime de deux ou plusieurs individus dont les axes se confondent, et dont les faces de même espèce peuvent être parallèles ou en opposition.

C'est surtout dans cette dernière classe que M. Rose a établi avec beaucoup de soin plusieurs variétés sur lesquelles je n'ai pas à revenir ici.

1° Le seul groupement du quartz auquel on puisse appliquer proprement le nom de macle, tel que je l'ai défini plus haut, se rencontre dans quelques cristaux fort rares du Dauphiné, décrits en 1829 par M. Weiss (voyez le Mémoire cité page 407), et dans de petits cristaux de Munzig en Saxe, et du Piémont.

Pour expliquer cette macle on suppose que deux cristaux prismatiques de quartz sont assemblés par une face parallèle à la modification tangente à une des arêtes culminantes de la pyramide hexagonale qui les termine; l'angle compris entre les axes de ces cristaux est alors égal à 84° 33′.

J'ai donné précédemment les symboles rhomboédrique et hexagonal de cette modification, qui ne paraît avoir été observée jusqu'ici que sur des cristaux d'améthyste d'Oberstein, du lac Supérieur et de l'Uruguay, ainsi que je l'ai dit.

Je n'ai trouvé dans les collections publiques et privées de Paris et de Londres que sept échantillons de la macle de la Gardette, en Dauphiné, et je ne crois pas qu'il en existe beaucoup d'autres; tous ces échantillons ont entre eux une grande analogie, qui consiste en ce que, les deux individus possédant la même épaisseur, la macle offre un ensemble fortement comprimé suivant les deux faces prismatiques de chacun des individus qui se trouvent sur le même plan. Quant à la limite des deux cristaux, visible sur ce plan commun, elle se compose toujours de zigzags plus ou moins rapprochés, comme l'indiquent les figures 78 et 79, pl. III. Ces zigzags sembleraient annoncer que les cristaux, au lieu de se grouper par une face unie, telle que la conçoit la théorie de leur assemblage, se terminent à leur extrémité inférieure par une foule de petits sommets qui s'enchevêtrent les uns dans les autres. On sait, du reste, qu'il arrive souvent aux cristaux de quartz à double sommet de se terminer d'un côté par une seule pyramide hexagonale, et, de l'autre côté, par une série de petites pyramides plus ou moins nombreuses. Certains cristaux des environs de Baréges, dans les Hautes-Pyrénées, ceux du Dauphiné eux-mêmes, ceux du Brésil, lorsque par hasard ils ont leurs deux sommets, et quelques améthystes de Hongrie, nous offrent des exemples de ce phénomène.

Dans les sept échantillons que j'ai eu l'occasion d'examiner, les sommets libres de chaque cristal se composent, comme dans l'exemplaire décrit par M. Weiss, de trois faces p prédominantes, et de trois faces $e^{\frac{1}{2}}$ subordonnées; mais je n'ai pu constater d'une manière certaine que sur un seul de ces échantillons le sens gyratoire des deux cristaux qui le composent; or, tandis que M. Weiss a vu une macle formée par un cristal dextrogyre et par un cristal

lévogyre, celle qui est représentée par la figure 78, pl. III, et qui appartient à M. Brooke, offre, au contraire, deux cristaux lévogyres, comme le montre la position des faces rhombes sur le plus grand et sur le plus petit cristal. Dans l'échantillon de M. Brooke, comme dans celui qu'a figuré M. Weiss, c'est d'ailleurs une face p de chaque individu qui se voit au-dessus du plan commun formé par la réunion des faces e^2 parallèles; les deux cristaux sont donc orientés de la même manière, et leurs faces homologues se regardent[1].

Si, à défaut des faces rhombes ou plagièdres indiquant positivement la position relative des faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ de la pyramide, on admet toujours comme p les plus grandes faces, et comme $e^{\frac{1}{2}}$ les plus petites, l'orientation est aussi la même sur un bel échantillon appartenant à M. Roussel, dans lequel le plus grand cristal a exactement le même aspect que celui de la figure 79, sauf qu'il est complet à son extrémité inférieure; cet individu porte aussi une face rhombe et un plagièdre x, montrant qu'il est dextrogyre: quant au plus petit cristal, qui, dans cet échantillon, est tourné vers la droite au lieu de l'être vers la gauche, aucune facette n'indique quel est le sens de sa rotation.

On trouve encore une disposition identique sur un magnifique échantillon appartenant à M. le marquis de Vibraye, et dans lequel chaque individu a 15 centimètres de hauteur sur 3 $\frac{1}{2}$ d'épaisseur, et 8 à 11 de largeur; il n'existe ici aucune face rhombe ou plagièdre propre à accuser le sens gyratoire des deux cristaux, seulement les faces $e^{\frac{1}{2}}$ se reconnaissent facilement à leur moindre

[1] Depuis la rédaction de mon Mémoire et sa présentation à l'Institut, j'ai retrouvé plusieurs groupes extérieurement semblables à celui qu'a décrit M. Weiss; deux de ces groupes se composent de deux individus à rotations contraires, ainsi que l'indiquent un plagièdre x droit sur l'un, et un plagièdre x gauche sur l'autre; de plus, chacun de ces individus est orienté de la même manière, comme dans l'échantillon représenté fig. 78, pl. III. Un troisième groupe avait des sommets complétement brisés, et j'ai dû extraire une petite lame de chacun de ses deux composants pour pouvoir reconnaître leur rotation. Ces deux lames, soumises à la lumière polarisée, accu-

étendue relative, et surtout à la présence du rhomboèdre strié $e^{\bar{1}}$ au-dessous de plusieurs d'entre elles.

Des deux échantillons qui existent au British Museum de Londres, l'un se compose d'un cristal lévogyre et d'un cristal de rotation indéterminée; leur orientation paraît semblable, et si l'on place le cristal lévogyre dans une position verticale, l'autre est couché vers la droite, comme dans les exemplaires de MM. Roussel et de Vibraye; le second échantillon offre un très-grand cristal maclé lui-même par enchevêtrement, dont le sommet paraît formé par deux faces $e^{\frac{1}{2}}$ et par quatre faces p et d retournées, contiguës deux à deux; la limite des pénétrations est indiquée sur ces faces par des plages mates situées au milieu de parties brillantes. A la gauche de ce grand cristal est enchâssé un individu plus petit, fort incomplet, et dont quelques faces de rhomboèdres striés peuvent seules indiquer la position des $e^{\frac{1}{2}}$; selon toute probabilité ce second cristal est encore orienté comme le premier.

Si maintenant nous considérons la macle représentée fig. 79, nous y voyons un grand cristal dextrogyre brisé à son extrémité inférieure, et soudé à un cristal un peu moins grand, dirigé vers la gauche, dont aucun plagièdre n'indique la rotation, mais dont les faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ peuvent se distinguer par leur grandeur relative et par les deux petits rhomboèdres inverses $e^{\frac{7}{5}}$ et $e^{\frac{7}{4}}$, qui se trouvent au-dessous d'une des faces $e^{\frac{1}{2}}$. Ici, contrairement à ce qu'on remarque sur les cinq échantillons dont je viens de parler,

saient par un grand nombre de triangles neutres, de nombreuses pénétrations intérieures, mais les parties restées pures étaient dextrogyres dans l'une et lévogyres dans l'autre.

M. Weiss avait déjà fait remarquer que la rotation inverse des deux individus était en contradiction avec la loi habituelle qui suppose toute hémitropie produite par la révolution d'un demi-cristal autour d'un axe normal à la face d'assemblage; cette loi ne peut en effet s'appliquer ici qu'à l'échantillon de M. Brooke (fig. 78), puisqu'il est à peu près sans exemple qu'un cristal de quartz offre à ses deux extrémités des plagièdres de sens contraires.

et sur celui de M. Weiss, les deux individus n'ont pas la même orientation, puisqu'une face $e^{\frac{1}{2}}$ de l'un est en regard d'une face p de l'autre.

Enfin, un échantillon moins bien déterminé que les précédents, et qui fait partie de la collection de l'École des Mines, paraît aussi offrir cette différence dans l'orientation des deux cristaux.

Les détails qui précèdent nous conduisent à admettre : 1° que, dans la macle du Dauphiné, les deux individus peuvent avoir la même rotation, ou être de rotation contraire; 2° que ces individus offrent tantôt une orientation semblable, tantôt une orientation différente.

J'ajouterai que la pénétration des deux cristaux n'est pas toujours assez complète pour amener deux de leurs faces e^2 sur le même plan, et qu'il n'est pas rare de rencontrer des cristaux entés l'un sur l'autre, en se pénétrant seulement d'une petite quantité, de manière à offrir deux de leurs faces prismatiques dans une position parallèle l'une à l'autre, et leurs arêtes verticales mutuellement inclinées de 84° 33′.

M. G. Jensch, de Dresde, a fait insérer, en 1854, dans le bulletin de la Société Géologique allemande (*Zeitschrift des deutschen geologischen Gesellschaft*), une notice sur la découverte de cristaux maclés comme ceux de la Gardette, à Munzig en Saxe; dans cette notice, on trouve une figure représentant la pénétration incomplète dont je viens de parler, et qui paraît assez commune à Munzig.

Il est donc permis de croire que, si la face théorique d'assemblage de la macle du Dauphiné peut être regardée en général comme parallèle à la modification $\xi = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{6}}\ b^1)$, rien ne prouve que, dans la nature, l'assemblage se fasse toujours de cette manière : le plus souvent, comme je l'ai dit plus haut, on ne peut pas même admettre que, la moitié d'un cristal restant fixe, l'autre moitié tourne de 180° autour de la face commune pour donner naissance à la macle : nous avons au contraire des preuves posi-

tives de l'existence d'un autre mode de groupement, qui fournit de cette macle une explication simple et applicable à tous les cas.

Tout le monde sait, en effet, que les plaques à deux rotations du Brésil, dont j'aurai occasion de parler plus loin, offrent dans la lumière polarisée une portion dextrogyre et une portion lévogyre, séparées l'une de l'autre par une ligne neutre; cette ligne est parfaitement noire et bordée symétriquement de chaque côté par une série de franges colorées, lorsque l'épaisseur de la plaque est convenable; le même effet se produit dans certains cristaux limpides de New-York, et il se passe là un phénomène tout semblable à celui qu'on fait naître artificiellement en accolant deux plaques perpendiculaires, d'égale épaisseur et de rotations contraires, par des plans inversement inclinés sur l'axe de la même quantité que les faces de la pyramide; la ligne noire indique les points où les deux biseaux en contact possèdent exactement la même épaisseur; seulement il n'est pas toujours possible de distinguer si les assemblages naturels de cette espèce ont lieu sur des faces de mêmes noms de la pyramide ou de noms différents.

Or, supposons qu'un observateur prenne deux cristaux prismatiques de quartz, terminés à chaque extrémité par une pyramide hexagonale; qu'il couche devant lui l'un des deux cristaux sur une de ses faces verticales, de manière à placer une face p supérieure en avant; le sommet inférieur lui montrera en avant une face $e^{\frac{1}{2}}$, et sur les deux côtés une face p; qu'il place maintenant à peu près horizontales les arêtes prismatiques du second cristal, orienté, du reste, comme le premier, et qu'il rapproche les deux individus jusqu'au contact, une face p visible du sommet inférieur du premier pourra alors s'appliquer contre une des faces $e^{\frac{1}{2}}$ invisibles du sommet inférieur du second, de manière à ce que deux faces e^2 se trouvent sur le même plan, si les cristaux ont la même épaisseur, ou dans des plans parallèles, s'ils sont d'épaisseur différente; il suffira pour cela que l'arête inférieure $\frac{e^2}{p}$ du premier

cristal soit parallèle à l'arête inférieure $\frac{p}{e^{\frac{1}{2}}}$ du second; car, une fois cette condition remplie, les deux faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ en contact font partie d'une même zone qui, outre les arêtes pyramidales extérieures du sommet supérieur de chaque cristal, contient aussi tous les plans symétriquement situés sur ces arêtes : l'un de ces plans est précisément la modification ξ dont il a été question plus haut. L'angle formé par les axes et par les arêtes prismatiques des deux individus sera donc égal à 84° 33′, et les faces homologues de leurs sommets supérieurs se correspondront comme dans l'échantillon fig. 78.

Pour produire la macle de deux cristaux inversement orientés, représentée par la figure 79, il suffira, tout en remplissant les conditions de parallélisme exposées ci-dessus, de laisser le premier cristal dans la même position que précédemment, et de placer en avant une face $e^{\frac{1}{2}}$ du sommet supérieur du second; le contact aura lieu alors entre une face p visible du sommet inférieur du premier cristal, et une des deux faces p du sommet inférieur du second, invisibles pour l'observateur[1].

[1] Une explication identique du phénomène a été donnée par M. Sella dans ses *Studii sulla mineralogia sarda*, ouvrage publié à Turin en 1856, à propos de macles trouvées à Traverselle; seulement M. Sella n'étend pas cette explication, comme je le fais ici, au cas où les deux cristaux sont orientés en sens inverse; mais il montre avec raison que, dans ce dernier cas, la face théorique d'assemblage restant toujours parallèle à ξ, il n'est plus possible de regarder l'hémitropie comme produite par la révolution d'un demi-cristal autour d'un axe perpendiculaire à cette face ξ, ainsi que cela a lieu lorsque l'orientation est semblable, et que les deux parties qui sont censées provenir du même individu possèdent la même rotation. L'habile minéralogiste piémontais, remarquant qu'il n'existe aucune face admissible perpendiculairement à laquelle cette rotation puisse se faire, suppose que deux individus sont d'abord accolés par un de leurs plans verticaux, de telle façon que leurs faces culminantes de même espèce soient parallèles entre elles, et qu'alors, l'un des deux restant fixe, l'autre décrit une révolution de 180° autour d'une ligne prise comme charnière, et parallèle à l'axe de la zone $pe^{\frac{1}{2}}$, ou, ce qui revient au même, parallèle à une arête culminante de la pyramide hexagonale du quartz; cette révolution produit en effet un assemblage semblable à ma figure 79.

On pourrait également rendre compte des macles composées d'individus d'orien-

2° L'hémitropie produite par une portion de cristal prismé de quartz, tournant autour de l'axe vertical pendant que l'autre portion reste fixe [1], paraît beaucoup moins rare que la macle à axes

tation contraire, mais de rotation semblable, au moyen de la révolution autour d'un axe perpendiculaire à ξ; il suffirait, pour cela, d'admettre qu'un cristal de quartz ait d'abord été soumis à une première hémitropie autour de son axe vertical, comme cela arrive à des échantillons de Carrare, de Traverselle et du Valais (voyez fig. 7 et fig. 62); les faces de même nom se correspondent alors sur les deux sommets opposés; si maintenant une moitié du cristal ainsi modifié restant fixe, l'autre moitié tournait de 180° autour d'une normale à ξ, le résultat serait l'assemblage représenté par la figure 69.

D'après les détails qui précèdent, on voit que l'énoncé habituel, qui consiste à dire qu'une hémitropie peut toujours se concevoir comme si une portion d'un cristal restant fixe l'autre portion décrivait une révolution autour d'un axe normal au plan d'assemblage, ne doit être regardé que comme un énoncé purement géométrique, car, dans le quartz en particulier, cet énoncé, pour être général, suppose que l'on fait complétement abstraction, et de la rotation, et de l'orientation des deux individus maclés; lorsqu'au contraire on a égard à ces deux caractères, on est obligé d'admettre qu'en réalité l'hémitropie est produite par le développement simultané de deux cristaux complétement indépendants l'un de l'autre, quant à leurs propriétés physiques, et liés seulement par l'obligation de s'appuyer l'un contre l'autre, suivant un plan parallèle à une modification possible de leur système cristallin.

J'ajouterai qu'ayant tout récemment fait polir sur ses deux faces parallèles les plus développées un échantillon maclé de la Gardette, composé de deux individus de rotations contraires, les zigzags superficiels dont j'ai parlé, page 555, ont totalement disparu, et la transparence que le morceau a acquise permet de voir que l'assemblage, dans cet échantillon, se fait par une surface très-sensiblement plane et normale aux faces polies, comme le serait la modification ξ elle-même.

[1] Cette rotation autour de l'axe vertical est la manière la plus simple d'expliquer l'hémitropie, mais elle n'est pas la seule admissible; en effet, si l'on suppose d'abord l'une à côté de l'autre deux moitiés de cristaux semblables, orientés de la même manière et se touchant par une face du prisme e^2, il suffira que, l'une des deux restant fixe, l'autre tourne autour d'une normale à la face de contact, et que ces deux moitiés s'ajustent l'une au-dessous de l'autre, pour que les faces de même nom des deux sommets opposés soient séparées par une face verticale commune; la même disposition aurait également lieu si, les deux moitiés de cristaux juxtaposés se touchant d'abord par une arête verticale et ayant leurs faces pyramidales de noms contraires parallèles, on faisait décrire à l'une de ces parties une demi-circonférence autour d'une ligne perpendiculaire au prisme d^1.

Ces considérations sont applicables, non-seulement à l'hémitropie proprement dite, mais aussi aux macles par enchevêtrement complet dont il va être question un peu plus loin.

inclinés; ainsi ce phénomène se présente assez souvent dans les cristaux extraits du marbre de Carrare, dans les cristaux de Traverselle et dans quelques cristaux du Valais. Il est probable qu'on le retrouverait dans d'autres localités, si les cristaux à deux sommets étaient plus communs. Dans les échantillons que j'ai examinés, si l'on admet que la rotation se fasse autour de l'axe vertical, cette rotation est de 60 degrés, ainsi que le prouvent : le cristal de Carrare (fig. 69, pl. III), qui porte un prisme symétrique interrompu sur des arêtes verticales contiguës; le cristal de Traverselle (fig. 8, pl. I), et le cristal du Valais (fig. 54, pl. II). Le plus souvent l'hémitropie a lieu entre deux portions de cristaux de même rotation, comme cela se voit sur les cristaux que je viens de citer; dans d'autres cas très-rares elle résulte de la combinaison de deux parties de rotations contraires, comme sur le cristal fig. 41.

3° Les groupements par juxtaposition de deux cristaux sont très-communs dans les améthystes du Brésil, où les deux individus sont plus ou moins profondément engagés l'un dans l'autre, ainsi que l'a fait remarquer M. Rose. J'ai aussi trouvé ce mode d'assemblage dans beaucoup d'autres localités, et notamment sur des cristaux incolores de Baréges, du Valais, du Brésil et du comté de New-York.

Le plus souvent le groupement se fait suivant une face verticale du prisme hexagonal, comme le représente la figure 34 de M. Rose; de sorte que, lorsque les cristaux ont leurs deux sommets, ils offrent en opposition, d'un côté, deux de leurs faces $e^{\frac{1}{2}}$, et, de l'autre côté, deux de leurs faces p. Plusieurs plaques, extraites par M. Soleil fils de cristaux incolores du Brésil, m'ayant paru se comporter dans la lumière polarisée comme le ferait une lame, parfaitement perpendiculaire à l'axe du cristal, séparée, tantôt par un plan très-net, tantôt par une surface plus ou moins ondulée, d'une autre lame légèrement inclinée sur cet axe, j'ai été conduit à rechercher si, dans ce genre de groupement, les axes des deux

individus étaient généralement parallèles, ou s'ils formaient entre eux des angles variables. L'observation d'un grand nombre d'échantillons m'a fait voir qu'on pouvait les ranger dans deux catégories qui prouvent que la juxtaposition des deux individus n'a pas lieu suivant une règle constante. En effet, dans certains cas, il y a une zone parfaite entre les deux faces du prisme hexagonal parallèles au plan de jonction et les rhomboèdres p et $e^{\frac{1}{2}}$ situés sur chaque cristal, au-dessus et au-dessous de ces faces; dans d'autres cas, il est impossible de faire réfléchir successivement les six faces qui doivent former la zone, parallèlement à une même ligne horizontale; cette zone n'existe donc pas. La mesure des échantillons de la première catégorie offrant seule quelque intérêt, je vais indiquer les principaux nombres que j'ai obtenus : l'angle compris entre les faces $e^{\frac{1}{2}}$ ou p de deux cristaux dont les axes seraient rigoureusement parallèles est égal à 76° 26′, d'après les mesures de Kuppfer.

Un groupe court, assez gros, du Valais, m'a donné 76° 34′; comme les faces $e^{\frac{1}{2}}$ de ce cristal composé sont ondulées, et qu'on ne peut mesurer leur inclinaison qu'en isolant leurs parties les plus nettes, il est possible qu'il présente le cas extrêmement rare où les axes sont exactement parallèles.

Un petit groupe limpide de New-York à deux sommets, ayant des faces $e^{\frac{1}{2}}$ unies et miroitantes et des faces p ondulées, m'a donné pour l'angle $e^{\frac{1}{2}} : e^{\frac{1}{2}}$, le nombre 75° 36′ moyenne de trois mesures très-rapprochées, et pour l'angle opposé $p : p$, un nombre compris entre 76° 21′ et 77 degrés, mais très-incertain à cause des doubles réflexions qu'on ne peut éviter sur les faces p.

Deux autres petits groupes de la même localité m'ont fourni pour $e^{\frac{1}{2}} : e^{\frac{1}{2}}$, des angles de 74° 5′ et 74° 45′.

Un groupe pénétré d'antimoine sulfuré capillaire, probablement du Brésil, a donné 78° 3′.

Un groupe chloritè du Valais, 77° 40′.

Une améthyste groupée du Brésil a fourni 74° 38′.

Deux autres améthystes accolées ont donné, l'une 74° 45′, et l'autre 75° 15′.

On voit donc que, même dans le cas où les faces $e^{\frac{1}{2}}$ des deux cristaux groupés appartiennent à une même zone, leur inclinaison mutuelle est très-variable, et que leur groupement obéit à une loi qui, loin d'offrir une rigueur mathématique, est susceptible d'admettre des oscillations considérables.

Le second genre d'assemblage par accolement se produit lorsque deux cristaux se pénètrent incomplétement, en restant orientés de la même manière, et présentant leurs faces homologues dans des positions à peu près parallèles : ces pénétrations sont surtout communes parmi les améthystes du Brésil. Il suffit de faire miroiter à la lumière les faces de même nom des deux individus accolés pour voir que leur parallélisme n'est pas rigoureux; on doit donc encore ranger ces assemblages parmi les groupements qui ont une simple tendance vers la régularité.

4° Nous arrivons maintenant aux enchevêtrements complets des cristaux dont la pénétration ne se trahit plus à l'extérieur que par des stries discordantes, des brisures ou des taches dépolies sur les faces du sommet et du prisme, comme dans les cristaux de Suisse, du Dauphiné et de beaucoup d'autres localités, ou par de petits rhomboèdres entrecroisés et interrompus, comme dans les cristaux de Traverselle. Ces enchevêtrements peuvent offrir des variétés infinies dans l'orientation et la grandeur relative des faces de leurs composants, et dans les limites qui séparent ces faces entre elles; on peut dire cependant qu'en général les axes des cristaux complétement enchevêtrés sont le plus généralement parallèles, et que les faces culminantes des composés ne présentent pas des différences de niveau trop sensibles.

Ce sont surtout des cristaux de cette dernière catégorie qui m'ont fourni les plaques dont j'ai étudié les propriétés optiques que j'ai cherché à rendre visibles pour tout le monde au moyen

de la photographie. Les principales localités dont les échantillons ont été examinés à ce point de vue sont les suivantes : le Haut-Valais, Carrare, le Dauphiné, Traverselle, le département de l'Aude, plusieurs provinces d'Espagne, Buxton en Derbyshire, le comté de New-York et le Brésil.

Voici comment j'avais choisi les cristaux du Valais dont j'ai fait tailler des plaques perpendiculaires à l'axe.

1° Un cristal portant le plagièdre x droit sur les six angles du prisme hexagonal, et n'offrant par conséquent à son sommet, que des faces p et a mouchetées par de petites portions de faces $e^{\frac{1}{2}}$.

2° Deux cristaux portant le plagièdre x droit sur cinq angles contigus, et montrant, tant sur les faces de la pyramide que sur celles du prisme hexagonal, de nombreux indices de pénétrations.

3° Deux cristaux avec x droit sur quatre angles solides, dont trois contigus, faisant voir de nombreuses stries interrompues sur les faces verticales.

4° Un cristal offrant x gauche sur trois angles contigus, et des stries profondes et interrompues sur les faces du prisme.

5° Un cristal portant x gauche sur trois angles solides, dont deux contigus, avec des brisures sur les faces du sommet et des stries discordantes sur les faces latérales.

6° Deux cristaux où le plagièdre x droit était régulièrement placé sur trois angles solides alternes, mais dont les faces culminantes, aussi bien que les faces verticales, portaient des brisures et des stries rendant probables des pénétrations plus ou moins régulières.

7° Enfin un cristal ne portant x droit que sur un seul angle solide, et offrant à son sommet des faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ facilement reconnaissables, avec des indices non équivoques de groupements intérieurs très-nombreux sur toute l'enveloppe extérieure.

J'avais ainsi réuni les conditions les plus variées que peuvent présenter les enchevêtrements complets, et, s'il existait une relation appréciable entre ces enchevêtrements et les propriétés optiques,

je pouvais espérer que j'arriverais à la constater : malheureusement mon espoir a été en partie déçu ; car ce ne sont pas les plaques extraites des cristaux en apparence les plus compliqués qui manifestent les phénomènes les plus complexes dans la lumière polarisée, et il n'y a aucune comparaison à établir, sous ce rapport, entre les plaques n° 1 et n° 7, par exemple.

J'ai seulement pu constater, par l'examen de ces échantillons et de plusieurs autres, une propriété qui paraît commune à tous les cristaux composés du Valais : cette propriété consiste en ce que chaque cristal est formé par des individus de même rotation dont les axes se confondent ou sont exactement parallèles ; en effet aucun ne présente, dans la lumière polarisée, rien d'analogue aux parties neutres qui décèlent la superposition d'individus d'épaisseur égale et de rotation contraire, et les plaques parfaitement perpendiculaires à l'axe cristallographique, examinées normalement à un rayon de lumière blanche polarisée, ne transmettent qu'une teinte uniforme à l'analyseur, quel que soit l'azimut dans lequel on le place ; mais, pour peu qu'on les incline sur la direction du rayon lumineux, on voit aussitôt apparaître des flammes triangulaires allongées offrant le mélange des couleurs les plus variées ; ces flammes sont plus ou moins régulières et plus ou moins nombreuses ; leur pointe se dirige toujours vers le centre, et leur base vers les six côtés de la plaque, où elle paraît être généralement en rapport avec les fentes et les interruptions extérieures qui indiquent les limites des individus enchevêtrés.

Des dix cristaux du Haut-Valais dont j'ai fait mention ci-dessus, c'est le cristal n° 7, à un seul plagièdre, qui produit le moirage le plus complet et en même temps le plus régulier, sans pourtant que cette régularité ait rien d'assez précis pour que le dessin puisse en donner une idée nette ; aussi, désirant montrer à tous les yeux de quel genre sont ces phénomènes, j'ai essayé à plusieurs reprises d'obtenir une image photographique des effets produits par la plaque n° 7, mais je n'ai jamais pu y parvenir d'une manière convenable. Cet insuccès provient sans doute de

ce que, tout en faisant varier l'inclinaison de la plaque et la position de l'analyseur, on ne peut pas faire prendre aux flammes intérieures des teintes assez différentes pour que leurs bords, très-vaguement indiqués, impressionnent suffisamment la couche sensible, et se distinguent ainsi du fond uniforme produit par leur mélange. La cause qui fait naître ces couleurs est d'ailleurs facile à expliquer; car, en inclinant sur le rayon polarisé des plaques composées d'une multitude de pièces rapportées, il est évident qu'on fait varier insensiblement l'épaisseur de ces pièces, et qu'elles doivent donner, par la fusion des teintes de leurs anneaux colorés, des combinaisons changeant à chaque mouvement.

Une plaque de ce genre, soumise à l'acide fluorhydrique étendu, subit une attaque qui produit sur les surfaces polies des moirages correspondants aux enchevêtrements intérieurs. D'après M. Leydolt ces moirages sont dus à ce que la lumière est réfléchie, sous diverses inclinaisons, par les faces de très-petits angles trièdres creux, orientés, tantôt dans deux, tantôt dans quatre directions différentes, par rapport aux faces du prisme et à celles de la pyramide hexagonale. Le mémoire que j'ai cité page 500 contient plusieurs dessins copiés d'après nature, qui montrent bien la disposition des plaques préparées de cette manière; mais la meilleure méthode pour étudier la structure de ces plaques consiste à prendre l'empreinte de leurs moirages à l'aide d'une couche suffisamment épaisse de colle de poisson ou de collodion; ces empreintes, qui, dans le cas où l'on aurait à faire à des cristaux opaques, remplacent avantageusement un examen optique impossible, peuvent être soumises aux recherches microscopiques les plus minutieuses, ainsi que j'ai pu m'en assurer sur quelques exemplaires que M. Leydolt a bien voulu m'envoyer.

Les cristaux extraits du marbre de Carrare ont assez souvent une forme extérieurement simple; on en trouve cependant aussi un certain nombre qui sont hémitropes autour de l'axe vertical, et d'autres qui portent sur les faces de la pyramide ou sur celles

du prisme hexagonal, des stries ou des interruptions analogues à celles qui, dans les cristaux du Haut-Valais, annoncent un groupement de plusieurs individus; deux cristaux de cette dernière variété, taillés perpendiculairement à leur axe, m'ont donné, comme les cristaux du Valais, une teinte uniforme lorsqu'on les place normalement à la direction d'un rayon polarisé, et des moirages triangulaires partant des bords et aboutissant au centre de la plaque, lorsqu'on les incline sur ce rayon. Une de ces plaques paraît en outre avoir une petite plage très-irrégulière, où la rotation serait détruite.

Les cristaux du Dauphiné sont très-souvent des cristaux composés, ainsi que l'a fait remarquer depuis longtemps M. Haidinger, et ensuite M. Rose; les pénétrations se trahissent généralement par des parties mates et des parties brillantes sur les faces du sommet; quoique M. Rose ait cité dans son Mémoire un cristal de cette localité portant le plagièdre x à droite et à gauche d'une face verticale e^2, on peut dire que ce fait est excessivement rare, et que presque toujours ces cristaux paraissent extérieurement formés par des individus de même rotation; mais il n'en est pas de même lorsqu'on examine leur structure intérieure.

Mes observations ont porté d'abord sur une plaque extraite d'un groupement composé d'un gros cristal très-prédominant et d'un cristal beaucoup plus petit, fortement engagé dans le premier; le plus gros avait toutes les faces de son sommet éclatantes, et il portait le rhombe s et le plagièdre x gauche sur un seul angle solide; le plus petit laissait encore voir une portion de la face x gauche, quoique ses autres faces culminantes eussent entièrement disparu. Cette plaque offrait un centre homogène; mais, parallèlement à trois de ses côtés, la lumière polarisée y développait des bordures noirâtres formées par une réunion de triangles équilatéraux dans lesquels la rotation était à peu près rigoureusement nulle; ces triangles neutres ayant leurs côtés respectivement parallèles aux trois faces prismatiques situées au-dessous des faces primitives p, leur production s'explique très-bien par

l'enchevêtrement, suivant des plans parallèles à ces faces p, d'une pyramide trièdre d'une épaisseur convenable, et d'une rotation contraire à celle de la masse où elle est noyée. C'est ce phénomène que nous trouverons développé au plus haut degré, et avec une grande régularité, dans les cristaux limpides du Brésil, dans ceux de New-York et dans les améthystes, comme je le ferai voir un peu plus loin.

J'ai pris ensuite une plaque dans un cristal extérieurement simple, dont le sommet se composait de trois faces p brillantes, mais parsemées de petites aspérités triangulaires, et de trois faces $e^{\frac{1}{2}}$ très-unies; ce cristal offrait le rhombe s et le plagièdre x gauche sur un seul angle solide. La plaque qui en a été extraite, vue perpendiculairement au rayon polarisé, montre un centre homogène, et, sur quatre de ses côtés, des bordures de triangles neutres, avec quelques flammes aiguës, de même rotation que la masse, et faisant saillie en avant de ces bordures; si on l'incline sur la direction du rayon, on voit dans toute son étendue, à travers les couleurs produites par l'élargissement des anneaux, des séries de lignes foncées, parallèles au trois côtés au-dessus desquels sont les faces p : ces lignes déterminent par leurs intersections des triangles équilatéraux qu'on peut considérer comme la coupe, par un plan horizontal, de lames superposées correspondant aux trois faces p.

Enfin, j'ai fait tailler un cristal d'apparence simple, portant le rhombe gauche sur trois angles solides alternes, et offrant un sommet dont les trois faces p étaient brillantes mais parsemées de petites excroissances arrondies, tandis que ses faces $e^{\frac{1}{2}}$ étaient parfaitement unies.

La plaque tirée de ce cristal, malgré sa simplicité géométrique, renferme encore des lames de rotations inverses, qui produisent sur deux de ses bords des rangées de petits triangles neutres; quant au centre, qui paraît à peu près homogène dans une direction normale au rayon polarisé, il perd cette apparence lorsqu'on

incline la plaque sur ce rayon; il montre alors quelques moirages analogues à ceux des cristaux du Valais, et surtout les triangles foncés représentant la coupe des lames parallèles au rhomboèdre primitif[1].

L'examen des deux dernières plaques du Dauphiné prouve bien la réalité de ce fait, sur lequel on ne saurait trop insister : c'est que des cristaux géométriquement simples peuvent offrir des pénétrations internes tout à fait inappréciables à l'extérieur par de simples caractères cristallographiques, et qu'un cristal de quartz homogène dans toute sa masse est une des plus grandes raretés minéralogiques connues.

J'ajouterai que, contrairement aux lois ordinaires de l'accroissement des cristaux, que nous voyons habituellement se faire dans nos laboratoires par une superposition de couches successives, les échantillons de la plupart des localités, et principalement ceux du Valais, m'ont presque toujours montré un noyau central d'une certaine étendue à peu près homogène; autour de ce noyau règne une enveloppe plus ou moins épaisse, formée par des parties cunéiformes, de dimensions très-variées, enchevêtrées les unes dans les autres, comme le seraient les pièces d'une marqueterie limitée par un contour hexagonal invariable. Il semble donc que la cristallisation de ces groupes complexes, après avoir commencé régulièrement, a été interrompue à partir d'un certain moment, où la croûte extérieure s'est formée sous l'empire de circonstances différentes de celles qui avaient présidé à la nais-

[1] La rédaction de mon mémoire était terminée, lorsque j'ai trouvé un certain nombre de cristaux du Dauphiné qui portent, en saillie sur une ou plusieurs de leurs faces verticales, de petits losanges entièrement semblables à ceux que j'ai observés sur un très-gros cristal du Piémont (voyez plus loin, page 592); une plaque extraite d'un de ces cristaux, vue normalement à un rayon de lumière polarisée, montre, du côté de la face du prisme où les losanges sont les plus marqués, un grand espace triangulaire à rotation nulle, dont les côtés sont parallèles aux trois faces *p* du sommet, ce qui prouve que les strates d'accroissement indiquées par les losanges extérieurs possèdent, comme dans l'améthyste, des rotations de signes contraires.

sance du noyau intérieur; ou bien que des influences perturbatrices sont venues déranger l'équilibre des molécules de cette croûte, avant son développement complet, et que l'ébranlement causé par ces influences n'a pu s'étendre jusqu'à la partie centrale, déjà consolidée.

Les cristaux de Traverselle m'ayant offert des particularités cristallographiques très-remarquables, j'ai dû examiner avec soin leurs propriétés optiques; j'en ai donc fait tailler un grand nombre [1], et j'ai photographié les phénomènes les mieux prononcés que quelques-uns m'ont présentés dans la lumière polarisée. Malheureusement le procédé de gravure par la lumière, sur lequel j'ai donné quelques détails au commencement de mon Mémoire, n'a pas toujours complétement répondu à mon attente, et plusieurs des figures de la planche V, obtenues par ce procédé, sont moins nettes que les photographies elles-mêmes : je vais tâcher de remplacer par la description ce qui manque encore aux résultats de la découverte de MM. Garnier et Salmon.

La figure 1, pl. V, montre l'apparence d'une plaque extraite du cristal fig. 5, pl. I; j'ai fait voir, page 419 et suivantes, en discutant l'existence du rhomboèdre $e^{\frac{1}{17}}$ que, selon toute probabilité, ce cristal était géométriquement simple; or, la plaque qui en provient, vue normalement au rayon polarisé, paraît composée de la manière suivante : une partie centrale, à peu près homogène, est formée par la réunion de trois secteurs de 120 degrés possédant la même rotation; chacune des lignes de séparation de ces secteurs vient aboutir au sommet d'un petit triangle équilatéral, dont la base est le commencement d'une série de lignes

[1] Les cristaux de Traverselle étant toujours très-petits, il est difficile de les faire couper bien perpendiculairement à l'axe; cette difficulté a été heureusement vaincue par M. Bertaut, qui est parvenu à polir des plaques très-sensiblement perpendiculaires dont le diamètre ne dépassait pas 2 millimètres; une disposition particulière de l'appareil de M. Duboscq, destiné à projeter les objets éclairés par la lumière électrique, m'a permis d'obtenir les images photographiques amplifiées des effets que la lumière polarisée produit dans ces petites plaques.

foncées, parallèles entre elles et aux trois côtés de l'hexagone situé au-dessous des faces $e^{\frac{1}{2}}$; la longueur de ces lignes va en augmentant jusqu'à ce qu'elle atteigne celle des côtés eux-mêmes. Parallèlement aux trois autres côtés, situés au-dessous des faces p, sont d'autres séries de lignes foncées qui viennent rencontrer les premières; enfin, dans l'encadrement hexagonal formé par ces deux séries de lignes, autour des secteurs centraux, on voit de petites flammes triangulaires, assez irrégulières, dans lesquelles une partie de la rotation générale de la plaque est neutralisée par une combinaison de lames de rotations inverses. Les secteurs de 120 degrés dont je viens de parler représentent géométriquement la projection sur le plan horizontal des trois faces primitives p, et ils sont sans doute produits par une superposition de lames parallèles à ces faces, tout à fait particulière jusqu'ici aux cristaux de Traverselle; je ferai, en effet, voir plus loin que les secteurs analogues décrits par M. Haidinger dans quelques échantillons d'améthyste ne peuvent pas être expliqués de la même manière.

Quant aux lignes foncées parallèles aux six côtés de la plaque, il est certain que la série correspondante aux trois côtés situés sous les faces p supérieures indique des lames parallèles; mais il est impossible de dire si la série correspondante aux trois autres côtés est la projection de lames parallèles aux faces p inférieures, ou aux faces $e^{\frac{1}{2}}$ supérieures.

La figure 2, pl. V, représente les phénomènes optiques d'une plaque appartenant au cristal d'apparence simple, dont la forme extérieure a été dessinée sous le n° 9, pl. I. Ces phénomènes sont tout à fait analogues à ceux de la plaque précédente; seulement la partie centrale formée par les trois secteurs de 120 degrés est beaucoup moins étendue, tandis que la bordure des lignes foncées, parallèle aux six côtés de l'hexagone et traversée par les flammes triangulaires à rotation presque nulle, a pris beaucoup de développement. Il n'y a d'ailleurs ici, non plus que ci-dessus, aucune preuve directe que les lignes parallèles à trois côtés alternes

de la plaque, avec les triangles sans rotation qui les traversent, annoncent des lames parallèles aux faces p du sommet inférieur, plutôt qu'aux faces $e^{\frac{1}{2}}$ du sommet supérieur.

Le cristal fig. 42, pl. II, dont la forme extérieure est très-nette et paraît simple, a aussi été taillé. Son apparence dans la lumière polarisée est exactement la même que celle du cristal fig. 5, pl. I; les mêmes phénomènes se sont encore reproduits avec plus ou moins de netteté sur trois autres cristaux géométriquement simples, de sorte qu'il est permis de les étendre à tous les cristaux non maclés de Traverselle.

La figure 3, pl. V, a été obtenue dans la lumière polarisée avec une plaque coupée perpendiculairement à l'axe d'un cristal à pénétration extérieurement visible; l'influence de ces pénétrations se fait bien sentir dans cette figure, où les secteurs de 120 degrés des plaques précédentes sont remplacés par de grands triangles équilatéraux ayant leur sommet au centre et leur base sur les côtés de l'hexagone. Deux seulement de ces triangles présentent une grande régularité; les autres sont moins nettement définis. Autour de la plaque règne encore une bordure de hauteur variable, formée par des triangles à rotation à peu près nulle.

La figure 4 est l'image photographique des phénomènes optiques d'une plaque appartenant au cristal fig. 14, pl. I, dont les enchevêtrements sont très-distinctement accusés à l'extérieur; les six triangles dont se compose cette image sont nettement définis, et l'on voit que, si les contours de la plaque étaient plus réguliers, chaque côté de l'hexagone se confondrait à peu près avec la base d'un triangle équilatéral. Ces triangles ne sont pas parfaitement homogènes dans toute leur étendue, ce qu'on reconnaît facilement en faisant tourner l'analyseur dans différents azimuts, et leur rotation, qui est partout de même sens, se trouve plus ou moins complétement annulée dans les parties voisines de leur base.

Des plaques tirées de cinq autres cristaux évidemment composés, ayant été soumises à un rayon de lumière polarisée, m'ont

fourni des images rentrant toutes dans celles que représentent les figures 3 et 4 que je viens de décrire; je me crois donc en droit de conclure que tous les cristaux enchevêtrés de Traverselle sont formés à peu près de la même manière que ceux auxquels se rapportent ces figures, et qu'il est toujours facile de les distinguer des cristaux simples de la même localité.

J'ai déjà dit, page 497, en décrivant l'isocéloèdre ξ, que les cristaux vulgairement connus sous le nom d'*hyacinthes de Compostelle*, loin d'offrir la structure simple que ferait supposer leur forme extérieure, étaient au contraire intérieurement assez complexes; tous les échantillons de cette variété ne sont pas propres à manifester cette structure, à cause de l'opacité de leur centre. On sait, en effet, que ces cristaux se trouvent au milieu des gypses du terrain crétacé et liasique, et que leur couleur est celle de la roche au sein de laquelle ils se sont formés; ainsi les gypses rouges contiennent des quartz rouges, les gypses roses des quartz roses, et les gypses blancs des quartz laiteux. Le plus souvent la matière colorante est disposée en couches hexagonales concentriques formant un noyau opaque entouré par une croûte transparente, et alors il n'y a rien à espérer de ces échantillons; mais lorsque les cristaux sont incolores ou simplement d'une couleur rosée dans toute leur masse, on peut en tirer des plaques suffisamment transparentes pour être examinées à l'aide d'un appareil de polarisation.

La figure 5, pl. V, représente l'aspect, dans un faisceau polarisé de rayons parallèles, d'une plaque prise perpendiculairement à l'axe, au milieu d'un cristal transparent, d'une teinte rosée, provenant des gypses du terrain crétacé du département de l'Aude. Cette plaque se compose de trois parties cunéiformes de rotation gauche, et de trois autres parties de rotation droite, comme l'indique le sens des flèches sur la figure. Ces six parties, où l'on peut distinguer deux séries de lames se rencontrant sur les diamètres qui joignent les angles de la coupe hexagonale, correspondent aux six angles de cette coupe, et elles sont séparées les

unes des autres par de petits espaces presque entièrement neutres, aboutissant au milieu des six côtés. La limite des espaces neutres a lieu par des contours vagues et mal définis : aussi la lumière polarisée convergente n'y fait-elle guère voir que des croix noires, et les spirales y sont-elles limitées à quelques points très-rares. Tous les cristaux du département de l'Aude que j'ai fait tailler, et une partie de ceux des gypses du terrain liasique d'Espagne, assez transparents pour être soumis au microscope d'Amici, m'ont offert des phénomènes plus ou moins réguliers, présentant toujours beaucoup d'analogie avec la figure 5; leur structure est donc toute particulière, car les hexagones concentriques qu'on voit sur cette figure ne peuvent annoncer que des lames parallèles, soit aux six faces d'une seule pyramide, soit aux six faces p des deux sommets inférieur et supérieur; or la disposition des parties neutres et celle des secteurs dont la rotation est reconnaissable semblent prouver que chacune de ces lames se compose par moitié d'une portion lévogyre et d'une portion dextrogyre.

Les figures 6 et 7, pl. V, n'offrent pas tout à fait le même arrangement que la figure 5; les secteurs neutres dans ces figures sont en effet fortement dilatés en forme de triangles arrondis, dont les bases occupent trois des côtés de l'hexagone; quant aux parties où la rotation est appréciable, elles correspondent aux trois autres côtés, et comme elles s'étendent jusqu'au centre de la plaque, elles isolent complétement les trois secteurs neutres les uns des autres. Ce sont encore les croix noires qui se manifestent presque exclusivement, lorsque les parties neutres sont traversées par un faisceau de rayons polarisés convergents; les plaques qui ont fourni ces figures appartiennent à des cristaux incolores ou faiblement rosés, d'une forme entièrement semblable aux hyacinthes d'Espagne et du département de l'Aude, mais qui proviennent de Buxton, en Derbyshire, où on les trouve dans les argiles d'un terrain trappéen. Si l'on considère les faces dominantes de leurs sommets comme appartenant au rhomboèdre primitif p, les lames qui forment les plages où la rotation est sensible seraient paral-

lèles à ce rhomboèdre, tandis que celles qui produisent les secteurs neutres correspondraient aux faces $e^{\frac{1}{2}}$. C'est précisément le contraire de ce qui s'observe dans l'améthyste, comme je le dirai plus loin.

La figure 8, pl. V, qui se rapporte à une plaque coupée dans un cristal enfumé à deux faces rhombes contiguës, représenté par la figure 39, pl. II, indique un enchevêtrement très-irrégulier d'individus de rotations contraires; cette plaque ayant déjà été décrite page 437, en parlant du rhombe *s*, j'ajouterai seulement que dans des rayons convergents de lumière polarisée certains points de ses parties sans rotation, désignées par la lettre N, offrent des spirales très-nettes, tantôt droites, tantôt gauches; ce qui indique dans ces points la superposition, par un plan très-probablement parallèle aux faces *p*, de lames suffisamment épaisses, possédant des rotations contraires. Les autres points des plages neutres ne donnent que la croix ordinaire, telle qu'on la connaît dans quelques améthystes, ce qui tient sans doute à la très-petite épaisseur des lames inverses de ces parties.

Quant aux cristaux limpides de Little-Falls, dont j'ai également dit un mot à la page 443; leurs phénomènes optiques demandent quelques explications. M. Joy, jeune chimiste américain, ayant bien voulu mettre à ma disposition un grand nombre de cristaux de cette localité, j'en ai choisi trois qui portaient le rhombe *s* sur plusieurs angles contigus, et je les ai fait polir par les deux bouts. Les deux plus petits cristaux soumis à l'appareil de Noremberg ou au microscope d'Amici dans la lumière parallèle, ne présentent que des effets peu marqués; on y distingue avec peine un ou deux triangles équilatéraux qui embrassent la plus grande partie de la section hexagonale, et dont les côtés noirâtres sont parallèles aux trois faces culminantes *p*. Les deux rotations contraires y sont tellement en équilibre, qu'on aperçoit seulement des traces de chacune d'elles dans quelques points très-restreints de cette section; mais lorsqu'on substitue des faisceaux de rayons convergents

aux rayons parallèles, on fait naître immédiatement les spirales les plus régulières qui se puissent imaginer. Le troisième cristal, un peu plus gros que les deux autres, poli à des distances très-inégales de ses deux sommets, produit encore le phénomène des spirales; seulement elles ne se manifestent que suivant la direction d'une large ligne neutre, parfaitement reconnaissable dans la lumière parallèle, quoique terminée par des contours assez vagues; examinée au microscope, cette ligne paraît être un assemblage, à bords dentelés, de petits triangles sans rotation, dont les côtés correspondent toujours aux faces primitives *p*, et qui semblent annoncer que la surface d'assemblage n'est pas parfaitement uniforme. En inclinant l'échantillon dans la direction de la ligne neutre, on voit se produire les mêmes franges que dans les plaques artificielles à deux rotations; quant à la direction suivant laquelle se fait l'assemblage, elle est exactement parallèle aux faces *p*, comme le démontre le croquis, fig. 82, pl. III, qui représente une coupe verticale du cristal en question; ce cristal ayant été partagé en deux plaques d'inégale épaisseur, suivant la ligne G D, la plaque supérieure offre une grande plage lévogyre et une très-petite plage dextrogyre, avec spirales gauches très-nettes, sur la ligne *ss*. Dans la plaque inférieure c'est au contraire la rotation droite qui occupe la plus grande étendue, et les spirales de même sens que les premières se voient en *s' s'*; les deux plaques réunies montrent les spirales en SS. Or, en marquant sur les surfaces polies supérieures des deux plaques les points *s* et *s'*, on peut construire géométriquement la ligne *ss'*, parallèle en même temps à la ligne NN et à la face *p*.

Nous passons maintenant aux plaques incolores du Brésil, qui présentent à la fois, dans leurs groupements intérieurs, une variété et une régularité très-remarquables, mais qui ont généralement appartenu à des cristaux dont je n'ai pu déterminer les formes cristallographiques.

Ces cristaux étaient depuis longtemps employés par les opticiens pour la construction de divers appareils de physique; leur

structure a déjà donné lieu à des remarques très-curieuses, et c'est parmi eux que M. Herschel a découvert les échantillons à deux rotations opposées. J'ai déjà dit que la disposition de ces échantillons est facile à expliquer, puisque, comme l'a fait voir M. Soleil, il y a une dizaine d'années, on peut la reproduire en appliquant l'une contre l'autre deux plaques d'égale épaisseur et de rotations contraires, suivant un plan parallèle à une face de la pyramide supérieure pour la première, et à une face de la pyramide inférieure pour la seconde. En reprenant l'examen d'un grand nombre de plaques naturelles de cette espèce, j'ai vu que le phénomène était susceptible de diverses modifications, dont je vais indiquer les principales.

La figure 9, pl. V, représente l'image d'une plaque traversée normalement par un faisceau de rayons parallèles polarisés. Cette image offre à sa gauche de nombreux parallélogrammes, dont les côtés comprennent entre eux des angles de 150 et de 30 degrés, et dont l'aire présente des teintes plates de couleurs très-variées, quoique possédant toutes la même rotation. Tous ces parallélogrammes ont un de leurs côtés parallèles à la ligne AB, suivant laquelle il se produit une série de franges colorées, très-nombreuses et très-serrées, lorsqu'on incline la plaque dans la direction de cette ligne; l'autre côté, qui ne fait voir de franges dans aucune position, peut être considéré comme la projection sur un plan horizontal, représenté ici par la face polie, de la ligne d'intersection de deux lames qui se couperaient sous un angle de 120 degrés, et qui seraient inclinées en sens contraire sur l'axe vertical. Or il existe dans la plaque fig. 9 des lames qui remplissent ces deux conditions; car, indépendamment de la série de franges dont je viens de parler, on en voit une seconde, beaucoup moins complète et présentant de larges interruptions, qui fait avec la première un angle de 120 degrés, et qui se prolonge dans la partie de droite dont il sera question tout à l'heure. Quoique les contours de la plaque fig. 9 ne permettent pas de reconnaître à quels côtés correspondaient les faces p et e', la com-

paraison de cette plaque avec les échantillons de New-York porte à croire que la première série de franges annonce une ou plusieurs lames parallèles à une face primitive p, plutôt qu'à une face $e^{\frac{1}{2}}$, et, si cette face appartient au sommet supérieur, le plan de jonction où se voit la seconde série sera parallèle à une face du sommet inférieur.

Si maintenant les parallélogrammes dont je viens de parler sont traversés par de la lumière convergente, on y voit vers le haut, en SS, des spirales dont les branches, dirigées les unes de gauche à droite, les autres de droite à gauche, peuvent annoncer dans quel sens s'inclinent les lames qui les produisent; vers le bas, en S_1S_1, les spirales sont de sens contraire aux précédentes; dans l'intervalle qui sépare les flèches SS et S_1S_1, on n'observe que des anneaux assez réguliers.

Quant à la partie de droite de la figure 9, elle montre un lacis presque entièrement neutre, formé par une multitude de lames excessivement minces, de rotations contraires, qui se croisent sous des angles de 120 et de 60 degrés. Ces lames, qui fournissent, sous une inclinaison convenable, deux séries de franges dont les couleurs sont beaucoup plus confuses que celles des lignes correspondantes dans la portion de gauche, peuvent être regardées comme parallèles à deux faces p des sommets inférieur et supérieur du cristal qui a fourni la plaque. Au sommet inférieur correspondraient les lames qui se prolongent dans la partie de gauche précédemment décrite, tandis que les autres seraient parallèles au sommet supérieur.

En explorant avec le microscope d'Amici toute la plage occupée par ces lames minces, on y voit des anneaux traversés par une croix noire souvent fort nette, et çà et là quelques spirales dextrogyres dans les points peu nombreux où la rotation n'est pas tout à fait nulle.

On peut expliquer d'une manière générale la plupart des phénomènes qui se produisent, principalement dans la partie gauche de la plaque fig. 9, dont la rotation est dextrogyre, en supposant

une lame mince lévogyre, parallèle à une face p, et noyée dans l'épaisseur d'une grande plaque dextrogyre perpendiculaire à l'axe, comme l'indique la figure 83, pl. III. La lame mince neutralisant une portion de la rotation générale, proportionnelle à son épaisseur, la teinte plate résultante, dans l'espace qu'elle occupe, sera différente de celle que possède la masse principale; de plus, si les épaisseurs restent comprises entre les limites convenables, il y aura, à droite et à gauche de la ligne centrale CC, deux points où les rotations contraires se compenseront partiellement et suffisamment pour donner des spirales à centre coloré, dextrogyres ou lévogyres, suivant que l'épaisseur dominante sera vers le haut, en SE, ou vers le bas, en S'E'.

Si l'épaisseur e de la lame mince, mesurée perpendiculairement à son inclinaison, satisfait à la relation $2e = h \cos i$, h étant l'épaisseur totale de la grande plaque, et i l'angle qu'une normale à la petite fait avec l'axe vertical, on aura le noir absolu, résultant de la destruction complète des deux rotations l'une par l'autre, et les spirales seront à centre noir et les plus nettes possible; dans le quartz l'angle i est de $51° 47'$, et son cosinus de 0,618637.

Si l'épaisseur de la lame mince est variable, ainsi que sa position dans l'intérieur du cristal où elle est enchevêtrée, on conçoit que les phénomènes résultants pourront offrir, comme dans la nature, une très-grande diversité.

Une expérience directe permet d'ailleurs de constater la réalité de l'assemblage que je viens d'indiquer. En effet, si l'on polit la tranche d'une plaque naturelle suivant un plan vertical perpendiculaire à la direction d'une ligne neutre, on peut arriver à voir se dessiner sur ce plan la coupe de la lame ou des lames enchâssées; cette coupe sera un parallélogramme allongé, si les bords de la lame mince affleurent les deux surfaces polies de la grande plaque, ou si, au contraire, ils ne touchent ni l'une ni l'autre, comme dans la figure 83, pl. III; ou bien elle aura la forme d'un trapèze lorsqu'un des bords de la lame mince aura été atteint par le poli,

tandis que l'autre bord se trouvera au-dessous de la grande surface; dans ce dernier cas, comme dans le second, il est facile de constater que, si le plus grand côté du trapèze ou du parallélogramme est parallèle à une face p, le petit côté de la même figure n'appartient pas toujours à la face $e^{\frac{1}{2}}$ opposée; sur plusieurs plaques travaillées par M. Soleil fils, pour reconnaître la position des lames enchevêtrées, je me suis assuré que ce petit côté était parallèle au rhomboèdre b^1.

La figure 84, pl. III, dessinée à la chambre claire, d'après la tranche verticale d'une coupe faite dans la plaque fig. 9, pl. V, perpendiculairement à la ligne AB, donne une idée exacte de la multitude de lames minces qui peuvent se trouver réunies dans une seule plaque, et des dispositions variées qu'elles affectent; les trois principales inclinaisons de ces lames, mesurées à l'aide d'un rapporteur, sur un dessin suffisamment grossi, indiquent des faces p, des faces b^1 et des faces a^1 perpendiculaires à l'axe.

J'ai cru remarquer sur les plaques ainsi taillées que les tranches des lames minces paraissaient tantôt en creux, tantôt en relief, sur la coupe de la plaque générale; mais les observations de cette nature sont encore trop peu nombreuses pour qu'on puisse dire s'il y a réellement quelque différence dans la dureté des quartz lévogyres et dextrogyres, ou si le fait que je signale tient simplement à ce que les faces polies des deux espèces de lames n'ont pas exactement la même direction cristallographique, et présentent ainsi des résistances variables à l'action du polissage. Quant à l'influence de l'acide fluorhydrique étendu, elle se fait fortement sentir sur les surfaces travaillées perpendiculairement à l'axe, tandis qu'elle est presque nulle sur celles qui sont parallèles à cette ligne : ainsi, lorsque déjà les premières sont complétement attaquées et assez profondément rongées, les secondes conservent encore en grande partie leur éclat, et la tranche seule des lames minces enchâssées prend un aspect dépoli.

L'inspection des teintes plates et des spirales développées dans

des plaques de quartz moins complexes que la plaque fig. 9, pl. V, avait suggéré à M. de Senarmont la pensée que ces phénomènes étaient dus à des pénétrations analogues à celle que représente la figure 83; aussi, avant que l'idée me fût venue d'examiner les coupes parallèles à l'axe, j'avais fait construire par M. Soleil fils plusieurs assemblages artificiels de ce genre, et j'avais pu ainsi reproduire les principaux effets qu'on observe dans les enchevêtrements naturels du Brésil.

La plaque dont l'image est représentée fig. 10, pl. V, paraît réunir deux espèces de pénétrations différentes; on voit d'abord en MN, entre deux plages lévogyres, une bande noirâtre, presque entièrement neutre, produite par l'intercalation de deux lames minces dextrogyres, qui ont été mises à nu en polissant la tranche de cette plaque perpendiculairement à MN. L'ensemble de ces lames, dont les deux bords supérieur et inférieur ont été mangés par le travail des deux grandes surfaces, a une épaisseur qui remplit presque la condition précédemment exprimée $2e = h \cos i$; cependant il est facile de reconnaître dans la direction MN, soit à l'aide du microscope d'Amici, soit en employant, sur l'appareil de Noremberg, la plaque à deux rotations de M. Soleil, un léger excès de rotation gauche, provenant de ce que $2e$ est plus petit que $h \cos i$. Toutefois cette différence est assez minime pour que la lumière polarisée convergente développe, dans cette direction, des spirales très-nettes; les lames minces plongeant d'avant en arrière dans la grande plaque, ces spirales tournent successivement leurs branches à droite ou à gauche, suivant qu'on regarde dans la direction SD ou SG de la flèche marquée sur la figure.

En N_2N_2 et NR sont des lignes neutres produites par la superposition de deux plaques d'égale épaisseur et de rotations contraires. Si l'on fait une coupe suivant la flèche $S_1D_1S_1G_1$, on voit par la direction des spirales que les lames doivent être disposées comme dans le croquis fig. 85, pl. III, et que, par conséquent, la lame dextrogyre plonge sous la lame lévogyre dans le même sens qu'en MN; ces lames peuvent donc être regardées comme

parallèles à une face *p* du sommet inférieur, placée en avant de la figure, ou à une face *p* postérieure du sommet supérieur du cristal.

Les spirales produites sur la ligne neutre RN_1 montrent que cette ligne est formée par la rencontre de deux plaques de rotations inverses, sous une inclinaison opposée à celle du croquis fig. 85; cette inclinaison est donc parallèle à la face *p* de droite du sommet supérieur, ou à la face de même nom opposée, sur le sommet inférieur. La rencontre des plaques inversement inclinées à l'axe, qui produisent les lignes neutres RN_1 et NR, se fait encore, comme je l'ai indiqué pour la fig. 9, suivant un plan nettement tranché, dans la direction duquel on ne voit aucune frange, et dont la projection sur la coupe horizontale est la ligne R, faisant des angles de 150 degrés avec MR et RN_1. Enfin en N_1N_2 se trouve une troisième ligne neutre, formée sur un plan de jonction parallèle à la troisième face *p* du sommet supérieur, placée à gauche de l'observateur, ou à la face opposée, placée à sa droite, sur le sommet inférieur; de sorte que les trois lignes N_2N_2, RN_1 et N_1N_2 sont déterminées par l'interposition dans la masse du cristal d'un petit tronc de pyramide parallèle aux trois faces *p* de son sommet supérieur.

La fig. 11 offre, dans la disposition de ses lignes neutres, beaucoup d'analogie avec la précédente, mais elle présente quelques particularités dignes de remarque : on voit d'abord que les lignes NN, NN_2, NN_1 ne paraissent pas parfaitement uniformes, et qu'elles se composent de parties triangulaires empiétant un peu les unes sur les autres, comme dans les cristaux de New-York précédemment décrits. Cette structure des lignes neutres semblerait annoncer que le contact des plages de rotations contraires se fait par une série de petites lames minces, et non par une seule surface parfaitement unie : j'ai en effet reconnu la tranche de plusieurs lames parallèles, en faisant pratiquer à l'angle N une petite surface polie, perpendiculaire à la direction de la ligne neutre NN.

La direction des branches des spirales fait voir aussi, comme

pour la plaque fig. 10, que suivant les lignes neutres NN_1 et NN_2 inclinées de 60 degrés l'une sur l'autre, la rencontre des plages dextrogyres et lévogyres a lieu par des plans parallèles à deux faces p du sommet supérieur; c'est aussi parallèlement à une de ces faces que se joignent les plages qui produisent la ligne RN_2. Quant à la ligne NR, elle se trouve, au contraire, sur un plan d'assemblage parallèle à une face p du sommet inférieur; car nous voyons en R, comme sur la figure 10, une ligne qui fait des angles de 150 degrés avec NR et RN_2, et qui représente la projection, sur le plan horizontal, de l'intersection de deux lames inversement inclinées sur l'axe.

Entre les lignes NN et NN_2 se trouve un espace presque neutre, résultant de la compensation qui s'opère entre les rotations inverses des deux petites bandes dextrogyre et lévogyre, dont l'existence nous est révélée par les spirales contraires qui se voient en SD et en SG.

Si l'on suppose une coupe générale dans le sens de la flèche SD SG, le croquis fig. 86 peut donner une idée des divers assemblages que je viens de décrire. On remarque encore en N_2N_3 une ligne neutre beaucoup plus étroite que les précédentes, et suivant laquelle, au lieu de spirales, on ne voit, dans un faisceau de rayons polarisés convergents, qu'une légère dislocation des anneaux colorés; cette disposition, que j'ai retrouvée dans quelques autres échantillons, paraît indiquer que le plan d'assemblage des deux plaques voisines, de rotation contraire, au lieu d'être parallèle à une face de la pyramide, fait avec l'axe un très-petit angle, correspondant sans doute à celui que produirait l'un des nombreux rhomboèdres aigus que j'ai observés sur les cristaux du Brésil et de Traversella.

Dans la figure 12, pl. V, la superposition des plages de rotations inverses qui produit les lignes neutres se fait suivant des surfaces bien régulières; l'ensemble de la plaque se compose d'une portion centrale lévogyre, bordée par deux portions dextrogyres; les lignes neutres font entre elles des angles de 120 degrés

et de 60 degrés; les spirales sont gauches en SG et S_1G_1; elles sont droites en SD. Si l'on fait une coupe suivant la longueur de la plaque, il est évident que les trois plages dont elles se composent sont assemblées comme l'indique le croquis fig. 87, pl. III; par conséquent, si le plan d'assemblage en SG est parallèle à une face *p* du sommet inférieur, placée à gauche d'un observateur qui regarderait devant lui une face *p* du sommet supérieur du cristal dont la figure 12 a été tirée, la jonction en SD se fera suivant cette face *p* supérieure; quant au plan sur lequel se voient les spirales en S_1G_1, on peut le considérer comme parallèle à une face *p* supérieure du même cristal, que l'observateur aurait fait tourner de 60 degrés autour de l'axe, de manière à amener devant lui une face $e^{\frac{1}{2}}$ du sommet supérieur.

Je ne m'étendrai pas davantage sur les groupements intérieurs que la lumière polarisée fait découvrir dans les cristaux transparents du Brésil; les exemples que je viens de citer sont suffisants pour donner un aperçu des principaux phénomènes que présentent ces groupements, et de la simplicité uniforme de leur mode d'assemblage.

Je vais chercher maintenant à faire voir de quelle manière la matière colorante se trouve répartie dans un certain nombre de variétés d'améthyste.

Les observations de Brewster, et surtout les publications récentes de M. Haidinger sur le pléochroïsme et la structure de l'améthyste, m'auraient dispensé d'aborder ce sujet[1], si je n'avais trouvé dans la photographie des ressources précieuses qui n'ont pas été mises à profit par les savants que je viens de nommer. J'ai obtenu des effets si nets, en choisissant des plaques qui portaient encore, autant que possible, les faces de leurs sommets, et en projetant les images amplifiées qu'elles donnaient dans la lumière polarisée, que j'ai cru faire une chose utile en reproduisant ces

[1] *Ueber die Pleochroïsmus und die Krystallstructur des Amethystes*, par W. Haidinger; extrait des comptes rendus de mars 1854, des séances de l'Académie des sciences de Vienne.

effets au moyen du procédé de gravure dont j'ai parlé plusieurs fois, et qui paraît surtout convenable lorsque la reproduction a pour objet des lignes nettement définies.

Je vais successivement décrire les diverses plaques dont j'ai observé les dispositions.

La figure 13, pl. V, se rapporte à une plaque extraite d'un cristal d'apparence simple, dont les trois faces culminantes *p* portaient chacune deux séries de lames minces très-foncées, parallèles aux trois arêtes rhomboïdales, comme l'indique la figure 88, pl. III; l'ensemble de ces lames, coupé par un plan horizontal, constitue, ainsi que l'a fait voir M. Haidinger, trois secteurs de 120 degrés déjà visibles avec la lumière naturelle, mais beaucoup plus marqués à l'aide de la lumière polarisée. Dans la plaque que j'ai examinée ces secteurs, à peu près complétement neutres sur toute leur étendue, sont séparés les uns des autres par trois bandes étroites de quartz incolore, dont la rotation est parfaitement reconnaissable, et qui se terminent par un épanouissement triangulaire correspondant aux faces $e^{\frac{1}{2}}$ du sommet. Environ la moitié de ces triangles est lévogyre, comme la bande elle-même, tandis que la seconde moitié est dextrogyre; par conséquent, si l'on complète et si l'on régularise par la pensée l'image photographiée, fig. 13, pl. V, on obtient le diagramme fig. 89, pl. III. L'examen de ce diagramme nous montre que les lames violettes en V et V ne peuvent être parallèles qu'à une troncature située sur l'angle solide compris entre les faces *p* et $e^{\frac{1}{2}}$, comme le serait le prisme d^1 ou le rhombe *s*. Or, si l'on incline la plaque sur le rayon polarisé, on s'assure facilement que ces lames ne sont pas verticales, et tout porte à croire qu'elles font réellement avec l'axe le même angle que la face *s;* il semble aussi que chaque série de lames, située à droite et à gauche des bandes étroites marquées de la lettre D, s'incline dans deux directions opposées. Si donc l'une de ces séries correspond au rhombe *s* supérieur, l'autre série correspondra au rhombe *s* inférieur, qui se trouve sur la même

arête verticale que le premier; les lames situées en V_1V_1 et en V_2V_2 seront de même parallèles aux faces rhombes qui se projetteraient en s_1 et en s_2.

Quant aux triangles incolores où l'on observe deux rotations de sens contraire, on peut concevoir que les deux parties dont ils se composent sont formées par des lames de quartz ordinaires, parallèles à deux faces $e^{\frac{1}{2}}$ de la pyramide, et se rencontrant suivant des lignes situées dans un plan presque vertical; car un faisceau convergent de lumière polarisée ne fait pas naître de spirales dans la direction de ce plan, et elle y produit seulement une dislocation des anneaux colorés : il est d'ailleurs facile de voir, comme l'a fait remarquer M. Haidinger, que cette direction, en supposant le plan vertical, est précisément celle du prisme d^1.

Si l'on soumet à l'acide fluorhydrique le sommet d'un cristal semblable à celui qui a fourni la plaque fig. 13, on distingue aussi sur les faces $e^{\frac{1}{2}}$ une ligne plus ou moins ondulée, qui partage ces faces en deux triangles rectangles à peu près égaux et faciles à distinguer l'un de l'autre par la direction opposée de leurs moirages.

Il ne m'a pas été possible de me procurer le sommet du cristal d'où la plaque fig. 14 a été extraite; mais le croquis fig. 90, pl. III, copié sur un autre cristal, peut donner une idée des lames qui se voyaient sans doute sur ce sommet : les unes devaient être, comme dans l'échantillon fig. 13, parallèles aux arêtes rhomboïdales culminantes; d'autres étaient parallèles aux arêtes de la pyramide; enfin quelques-unes étaient dirigées dans le sens de l'intersection de deux faces p et $e^{\frac{1}{2}}$ opposées au sommet.

Si nous examinons le diagramme fig. 91, copié d'après l'image photographique fig. 14, nous y voyons des lignes qui se croisent sous des angles de 60, de 90, de 120 et de 150 degrés, et qui toutes correspondent à des lames violettes; en inclinant convenablement la plaque sur le rayon polarisé, on peut s'assurer que les lames en N sont parallèles à la face p antérieure; quant aux

lames qui se voient en N_1 et en N_2, elles paraissent parallèles aux faces *p*, placées à gauche et à droite de la figure.

De chaque côté de la bande étroite dextrogyre marquée D se trouvent encore deux séries de lames V et V correspondant aux deux faces rhombes qui se projetteraient en *s;* enfin, au-dessous de deux des faces $e^{\frac{1}{2}}$ sont situées des plages de quartz incolore, composées de parties de rotations contraires, d'une étendue très-inégale.

La plaque fig. 15, pl. V, dont le diagramme, fig. 92, pl. III, indique la disposition complétée, nous offre encore en N des lames violettes parallèles à la face *p* antérieure, et en N_1 et N_2 des lames respectivement parallèles aux faces *p* de gauche et de droite; en V et V se trouvent, séparées par une bande étroite dextrogyre D, deux séries de lames correspondant aux faces rhombes supérieure et inférieure qui se projetteraient en *s;* en V_1 et V_1 les lames sont parallèles aux rhombes dont la projection est indiquée en s_1; à deux des faces $e^{\frac{1}{2}}$ correspondent des plages de quartz jaune, dont l'une est formée de deux portions triangulaires inégales de rotations inverses, et dont l'autre est dextrogyre dans toute son étendue.

La plaque fig. 16, pl. V, dont la disposition générale est régularisée sur le croquis fig. 93, pl. III, nous offre en V des lames violettes parallèles aux faces rhombes indiquées par la lettre *s*, et en V_1 et V_2 d'autres lames respectivement parallèles aux rhombes situés à l'extrémité des arêtes verticales qui aboutiraient aux angles s_1 et s_2; en N et N_1 se trouvent de petites lames correspondant aux faces *p* placées à gauche et à droite de la figure; sur cette plaque il n'y a qu'une seule plage triangulaire partagée en deux parties à peu près égales, de rotations inverses.

Les trois croquis fig. 94, 95 et 96, pl. III, qui représentent la projection horizontale du sommet de trois cristaux d'améthyste du Brésil, avec l'indication de leurs lames violettes, peuvent nous expliquer pourquoi les plaques perpendiculaires à l'axe offrent si

rarement la réunion complète des diverses directions suivant lesquelles ces lames se rencontrent; ils nous montrent aussi que dans l'améthyste, comme dans les autres variétés de quartz, l'irrégularité des phénomènes paraît être la règle générale, tandis que leur régularité parfaite semble ne former qu'une exception des plus rares.

La plaque fig. 17, pl. V, dont les six faces de la pyramide ont été conservées, nous offre, dans la lumière naturelle, trois secteurs de 60 degrés du violet le plus riche, et trois secteurs presque incolores alternant avec les premiers. En inclinant convenablement cette plaque, il est facile de reconnaître que les secteurs violets sont formés par une superposition de couches minces, parallèles aux trois faces p; quant aux secteurs incolores, la lumière polarisée, par les moirages qu'elle fait naître dans leur intérieur, montre qu'ils se composent de lames assez irrégulières, parallèles aux faces $e^{\frac{1}{2}}$, et dont la rotation générale est de sens contraire à celle de la masse dans laquelle elles sont enchâssées.

Dans la plaque fig. 18, pl. V, qui renferme aussi trois secteurs violets et trois secteurs incolores, les lames violettes, parallèles aux trois faces p, sont moins homogènes et d'une teinte moins uniforme que celles de la plaque précédente; aussi la lumière polarisée y fait-elle découvrir quelques points dont la rotation est encore appréciable. Quant aux secteurs incolores qui correspondent aux faces $e^{\frac{1}{2}}$, l'un d'eux est dextrogyre dans toute son étendue; les deux autres se composent, au contraire, de deux parties d'inégale grandeur et de rotations inverses, dont la surface de séparation présente des ondulations très-marquées.

La plaque fig. 19, pl. V, est tout à fait du même genre que la plaque fig. 18; seulement c'est la rotation gauche qui domine dans les secteurs incolores.

Ces trois dernières plaques proviennent très-probablement du Brésil, comme celles qui sont représentées par les figures 13, 14,

15 et 16; je n'oserais pourtant pas l'affirmer d'une manière tout à fait positive. J'ajouterai que, d'après les indications contenues dans le Mémoire de M. Haidinger, que j'ai cité plus haut, une disposition analogue à celle des figures 17, 18 et 19, a été observée sur des améthystes de Meissau, en Autriche.

J'ai aussi trouvé des phénomènes du même genre sur quelques améthystes d'un beau violet, qui tapissent les grandes géodes d'agathe de l'Uruguay; seulement, dans ces derniers échantillons, ce sont les trois secteurs correspondants aux faces $e^{\frac{1}{2}}$ qui ont pris la teinte violette la plus riche et qui se trouvent quelquefois partagés en deux triangles inégaux de rotations contraires, tandis que ceux qui correspondent aux faces p sont d'un violet très-pâle et montrent deux séries de lames minces se croisant sous des angles de 60 degrés.

La figure 20 a été fournie par une améthyste de localité inconnue, d'une couleur peu foncée, offrant dans son intérieur une couche mince violette, parallèle aux faces extérieures du sommet hexagonal; cette améthyste offre dans la lumière polarisée des phénomènes beaucoup moins réguliers que les autres améthystes du Brésil; on voit cependant encore, d'une manière générale, qu'aux trois faces p correspondent des bandes neutres assez larges, tandis qu'au-dessous de deux des faces $e^{\frac{1}{2}}$ se trouvent des plages irrégulières comprenant des portions de rotations inverses.

Les échantillons qui ont donné les images fig. 21 et 22, pl. V, ne peuvent plus guère être considérés que comme du quartz ordinaire, pénétré tout à fait irrégulièrement par une substance colorante violette; on remarque, en effet, dans ces deux plaques, soumises à la lumière polarisée, des moirages formés par des plages de rotations contraires, dont les contours paraissent entièrement capricieux; malheureusement ces plaques ont été prises dans des fragments de cristaux informes, et il ne m'a pas été possible de reconnaître la position d'une seule face de leurs sommets. Ce qui rend surtout remarquable la plaque fig. 22, c'est

que sur les diverses lignes neutres que j'ai indiquées par la lettre N, on voit avec le microscope d'Amici des spirales aussi nettes que dans les cristaux de New-York ou du Brésil; or, dans les améthystes constituées régulièrement par un cristal de quartz que traversent, suivant quelques directions bien déterminées, une multitude de lames minces de rotations inverses, on ne trouve jamais que des croix noires plus ou moins régulières et passant quelquefois aux hyperboles décrites par M. Haidinger.

Certains quartz verts jaunâtres du Brésil, connus des joailliers sous le nom de *topazes vertes*, et dont on trouve dans toutes les collections des fragments remarquables par une cassure particulière qui rappelle parfaitement l'empreinte du doigt sur un corps mou, doivent en réalité être considérés comme une variété d'améthyste verte; il est excessivement rare qu'il arrive en Europe des cristaux bien déterminés de cette variété; cependant j'ai pu m'en procurer plusieurs fragments cristallins, dont les faces *p*, du sommet, portaient les stries caractéristiques des améthystes violettes; les plaques extraites de ces fragments montrent dans la lumière polarisée une structure toute semblable à celle que représentent les figures 13 et 19, pl. V.

En terminant ce que j'avais à dire sur la cristallisation et sur les propriétés optiques du quartz, je présenterai le résultat de quelques observations que j'ai eu l'occasion de faire, dans le cours de mes recherches, sur diverses empreintes qui se trouvent à la surface des cristaux de certaines localités.

C'est pour ne pas avoir à m'étendre trop longuement sur ce sujet, que j'ai dessiné d'après nature tous les échantillons dont j'ai donné la description cristallographique, en indiquant autant que possible sur les figures les divers genres d'irrégularités ou d'ondulations que présentaient les faces de ces échantillons.

Les cristaux du Dauphiné offrent souvent sur plusieurs faces de leurs pyramides, fig. 79, pl. III, de légères saillies, ayant la forme d'un triangle isocèle aigu, à côtés faiblement arrondis, et orientés comme les côtés de la face elle-même, supposée trian-

gulaire; il est probable que ces saillies appartiennent aux nombreuses aiguilles dont le groupement constitue le cristal résultant, et elles montrent que ces aiguilles se terminent rarement par des surfaces parfaitement planes. Des saillies analogues plus ou moins régulières se retrouvent sur des cristaux d'autres localités; lorsqu'elles se combinent avec des stries ondulées, et avec les trois arêtes saillantes que j'ai citées sur certains cristaux de Traverselle et de Carrare (fig. 11, 14, 15, pl. I, et fig. 71, pl. III), elles produisent la curieuse disposition qu'on voit sur la plupart des cristaux limpides de New-York, et dont la figure 40, pl. II, donne une idée très-nette.

Certains cristaux du Brésil, fig. 50 et 64, pl. III, au lieu de saillies, présentent sur les faces de leur sommet de petits triangles isocèles creux, dont les côtés rectilignes sont respectivement parallèles à ceux de la face pyramidale qui les porte, mais dont l'orientation est opposée à celle des trois côtés de cette face. Les plans culminants du cristal d'améthyste sur lequel j'ai cité la modification $b^{\frac{3}{2}}$ offrent la même disposition, ainsi que les cristaux corrodés de Guttanen que j'ai cités plus haut; ces empreintes ont, dans leur aspect, une certaine ressemblance avec les triangles équilatéraux que l'observation microscopique fait facilement reconnaître sur les surfaces attaquées par l'acide fluorhydrique étendu, des plaques coupées et polies perpendiculairement à l'axe : peut-être leur origine doit-elle être attribuée, comme celle de certaines faces arrondies dont j'ai parlé précédemment, à quelque action postérieure à la formation des cristaux.

Le très-gros cristal du Piémont dont j'ai représenté un angle fig. 80, pl. III, avec la face nouvelle H, porte sur cinq de ses faces verticales, outre les stries horizontales ordinaires, de nombreuses séries de petits losanges, dont la plus courte diagonale est horizontale, et dont l'angle au sommet est d'environ 85 degrés; or, 85° 18′ 56″ est précisément la mesure de l'angle plan formé par les intersections de deux faces p, contiguës, avec la face prisma-

tique e^2 qu'elles comprennent entre elles, de sorte que ces losanges, dont les côtés font saillie sur la face verticale, paraissent indiquer des strates d'accroissement parallèles à ces faces *p;* et puisque cinq des faces contiguës du prisme hexagonal présentent une disposition semblable, on peut en conclure que sur trois d'entre elles on voit la trace des lames correspondantes aux trois faces du sommet supérieur, et que sur les deux autres l'empreinte est due aux lames parallèles à deux des faces *p* inférieures.

Parmi tous les cristaux dont j'ai donné la description, ceux de Traverselle sont les seuls dont les faces verticales m'aient souvent offert des stries ou des cannelures disposées comme les losanges dont il vient d'être question. En décrivant les images photographiques (fig. 1 et 2, pl. V), j'ai déjà fait remarquer que, selon toute probabilité, les trois secteurs qu'on voit sur ces figures étaient dus à un empilement de lames parallèles aux faces *p;* cette explication acquiert presque une certitude complète, lorsqu'on compare les cannelures produites par ces lames sur les petits échantillons de Traverselle, avec les losanges du très-gros cristal du Piémont.

La figure 23, pl. V, reproduite d'après une image microscopique photographiée, montre les empreintes parfaitement circulaires que j'ai observées sur toutes les faces d'un petit cristal transparent du Brésil : ces empreintes, dont j'ai retrouvé les analogues sur plusieurs autres cristaux de la même localité, et sur un cristal de localité inconnue, offrent en creux des cercles tellement parfaits qu'il semble d'abord impossible d'expliquer leur formation par la pénétration d'une substance cristallisant en mamelons à structure fibreuse, car il existe bien peu de ces mamelons dont la forme soit géométriquement sphérique. Cependant un des cristaux du Brésil, dont je viens de parler, porte encore sur ses faces prismatiques de très-petites roses formées par un groupement de lamelles de fer oligiste, qui, en disparaissant, laissent des empreintes exactement circulaires.

La figure 24, pl. V, a été fournie par une variété de geysérite

à structure sphérique, que j'ai rapportée en 1846 de mon voyage en Islande; cette variété, dont la densité est égale à 2,137 et qui contient, d'après une analyse de M. Damour, 87 pour 100 de silice, avec 9 pour 100 d'eau et une petite proportion de chaux, d'alumine et de soude, se trouve à une petite distance du grand Geyser, au milieu de couches argileuses; elle y forme des veines minces ayant toute l'apparence d'une calcédoine blanchâtre, à couches parallèles plus ou moins translucides, et dont les surfaces extérieures sont recouvertes par une matière blanche pulvérulente. Cette partie superficielle, aussi bien que la masse calcédonieuse, soumise au microscope avec un grossissement de 150 à 200 fois, fait voir une multitude de petites sphères parfaitement transparentes; seulement, comme le montre la fig. 24 qui a été obtenue en projetant l'image microscopique de la substance pulvérulente, on voit que dans cette partie les petites sphères sont isolées; dans la partie calcédonieuse, au contraire, les sphères sont soudées ensemble au moyen d'une sorte de gélatine peu abondante et très-limpide; ni l'une ni l'autre de ces variétés ne présente d'ailleurs la moindre action sur la lumière polarisée.

J'ai examiné comparativement un très-grand nombre d'échantillons de silice pulvérulente déposée, soit naturellement, soit artificiellement, mais jamais je n'ai pu retrouver la structure si parfaitement sphérique de la geysérite dont je viens de parler; et, ce qu'il y a de plus remarquable, c'est que cette geysérite est la seule de son espèce, au milieu des immenses dépôts que les principaux geysers d'Islande ont formés et forment encore journellement autour d'eux.

Je n'ai que peu de chose à dire des substances étrangères qui accusent souvent, dans l'intérieur des cristaux de quartz, une séparation très-nette entre deux couches cristallines exactement modelées l'une sur l'autre : car tout le monde connaît les effets de cette nature produits par la chlorite dans certains échantillons du Valais.

Je citerai seulement quelques gros cristaux du Brésil, où l'on

trouve assez fréquemment des plans nuageux composés de très-petits grains cristallins ou de petites vacuoles offrant quelquefois la forme d'un cristal bipyramidé de quartz; ces plans sont alignés parallèlement aux faces du prisme et à celles de la pyramide, de manière à produire une sorte de chemise intérieure reposant sur un noyau central et recouverte par une croûte transparente. Dans un échantillon bien caractérisé de cette espèce, j'ai observé le sommet d'une de ces chemises qui était réduit aux trois faces primitives p, portant sur leurs arêtes culminantes de larges troncatures que leur position ne permet de rapporter qu'au rhomboèdre b^1, ou à l'un des hémiscalénoèdres obtus dont j'ai donné les incidences.

Ces grains cristallins formant des plans intérieurs nuageux ne sont pas particuliers au quartz, et paraissent toujours être disposés dans une direction en rapport avec la cristallisation du minéral; en effet, dans les échantillons de spath d'Islande que j'ai rapportés, en 1845, j'ai pu mettre à nu et reconnaître parfaitement, au moyen de clivages convenablement dirigés, de très-petits cristaux arrondis ayant quelquefois la grosseur d'une tête d'épingle, et qui étaient exactement alignés suivant un plan parallèle aux faces du dodécaèdre métastatique. Si l'on cherche à éteindre un rayon de lumière blanche avec un prisme de Nicol taillé dans un échantillon qui renferme beaucoup de ces cristaux, on voit qu'il est impossible d'arriver à une polarisation complète, à cause de la grande quantité de lumière qui se disperse en traversant les petits grains disséminés dans toute la longueur de l'appareil.

Note.

La notation adoptée dans ce mémoire est le système si simple et si commode employé par Lévy dans sa *Description d'une collection de minéraux formée par M. Heuland,* ouvrage dont un assez grand nombre de figures, qui n'ont pas été dessinées par Lévy lui-même, portent malheureusement des signes entièrement faux. Le principal avantage de ce système consiste, comme on le sait,

à pouvoir exprimer directement sur les figures le symbole de toutes les faces parallèles à une arête ou à une diagonale de la forme primitive.

Le solide auquel j'ai rapporté toutes les formes dérivées du quartz est le rhomboèdre de 94° 15′, suivant les faces duquel ce minéral offre quelquefois des clivages passablement nets. Toutes les faces du rhomboèdre, étant symétriques par rapport à son axe principal, peuvent être désignées par une même lettre; Haüy d'abord, et après lui Lévy, ont choisi la lettre *p*, initiale de *primitif*. En convenant d'employer, toujours dans le même sens, un petit nombre de lettres nécessaires pour désigner les divers éléments de chaque type cristallin, et en inscrivant la même lettre sur toutes les parties de même espèce, on a un moyen facile de désigner ces parties sans confusion possible entre elles.

Dans le rhomboèdre, les six arêtes aboutissant aux deux sommets sont notées *b;* les six arêtes en zigzag s'appellent *d;* la lettre *a* est affectée aux angles solides des deux sommets, et la lettre *e* aux six angles solides latéraux.

Les angles solides peuvent être modifiés par des plans parallèles ou obliques à la diagonale horizontale d'une des faces culminantes : dans le premier cas, on a des rhomboèdres directs ou inverses au primitif; dans le second cas, on a les faces que Haüy nommait en général faces intermédiaires; la réunion des faces symétriques de cette seconde espèce forme des scalénoèdres, dont une partie a reçu, dans le quartz, le nom particulier de *plagièdres*.

Les rhomboèdres directs sont ceux dont les faces correspondent aux faces du primitif, et s'inclinent sur l'axe dans le même sens que celles-ci; les rhomboèdres *inverses* sont ceux dont les faces correspondent aux arêtes, et dont l'inclinaison sur l'axe est par conséquent opposée à celle des faces de la forme primitive.

Si nous supposons (fig. 97, pl. III), un rhomboèdre dont l'axe principal *aa* soit vertical, et dont une face culminante supérieure soit tournée vers l'observateur, en inclinant successivement vers la partie supérieure et vers la partie inférieure de l'axe un plan pas-

sant par la diagonale horizontale *ee*, nous aurons une série de rhomboèdres directs et une série de rhomboèdres inverses : il est facile de voir que, si ce plan passe par le milieu de l'arête inférieure *ea*, il est parallèle à l'axe; et comme on peut lui faire prendre une position semblable sur les six angles solides latéraux, on obtient, dans ce cas particulier, les six faces d'un prisme hexagonal régulier. Ce prisme peut donc être regardé comme la limite qui sépare les rhomboèdres directs des rhomboèdres inverses; sa position par rapport à la forme primitive, comme celle de tous les rhomboèdres dérivés, sera parfaitement indiquée, si, à côté de la lettre *e*, désignant l'angle modifié, on place, sous forme d'exposant, le rapport des distances auxquelles la troncature va rencontrer les trois arêtes qui aboutissent à cet angle. Ce rapport peut être un nombre entier ou fractionnaire; mais, dans le premier cas, en le divisant par l'unité on peut toujours le considérer comme une fraction. Afin d'avoir une règle constante, et de savoir immédiatement de quel côté de l'axe s'incline la modification, on est *convenu* de prendre toujours pour numérateur de la fraction l'une des longueurs égales que cette modification, à cause de son parallélisme avec une diagonale horizontale, intercepte nécessairement sur deux arêtes contiguës; le dénominateur est alors la longueur comptée sur la troisième arête : il est d'ailleurs évident qu'on peut toujours mener, parallèlement à la face que l'on considère, un plan sécant tel que le numérateur ou le dénominateur soit égal à l'unité.

Si, au lieu d'être située sur un angle, la troncature est parallèle à une arête, elle rencontre deux à deux les quatre arêtes parallèles qui aboutissent aux extrémités de la première; pour le *rhomboèdre en particulier*, la fraction qui exprime cette position a toujours pour numérateur la plus grande, et pour dénominateur la plus petite des longueurs interceptées sur ces deux couples d'arêtes : par conséquent, dans ce système cristallin, toutes les faces dérivées qui sont parallèles aux arêtes de la forme primitive sont représentées par un symbole plus grand que l'unité.

Enfin, si la modification est du genre de celles que Haüy nommait intermédiaires, c'est-à-dire si elle n'est parallèle ni à une diagonale, ni à une arête de la forme primitive, les trois arêtes qu'elle rencontre sont en général coupées à des distances inégales de leur sommet commun; en donnant comme exposant à la lettre nominative de chacune de ces arêtes le nombre qui exprime ces trois distances, on aura fixé la position de la troncature.

Afin de diminuer autant que possible la quantité de ces symboles intermédiaires qui exigent toujours l'emploi de trois lettres, Lévy avait imaginé un artifice qui n'est réellement applicable qu'aux trois types cristallins à axes rectangulaires et au type rhomboïdal; car son introduction peut facilement amener de la confusion dans la désignation des formes appartenant aux types à axes obliques. Voici, du reste, en quoi consiste cet artifice : des trois nombres qui expriment la position d'une face intermédiaire, sur un rhomboèdre par exemple, l'un peut toujours être ramené à l'unité, les autres étant alors plus petits que 1 : dans les cas particuliers où ces deux autres nombres sont égaux entre eux, il suffira d'indiquer la valeur de l'un d'eux pour que la position de la face soit déterminée. Afin de ne pas s'exposer à prendre cette face pour une troncature parallèle à une diagonale ou à une arête de la forme primitive, on écrit le symbole sous forme d'indice, un peu au-dessous de la lettre qui désigne la partie modifiée.

Le quartz n'offrant que le seul plagièdre $\mu = (d^1\, d^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}})$ dont le signe remplisse la condition que je viens d'énoncer, je n'ai pas eu besoin, dans la description de ses formes, d'employer l'abréviation adoptée par Lévy.

D'après les conventions qui viennent d'être indiquées, le prisme hexagonal, modifiant les angles latéraux du rhomboèdre, aura pour notation $c^{\frac{1}{2}} = e^2$; par suite, tous les rhomboèdres directs situés au-dessus de ce prisme auront des symboles plus grands que 2, tandis que les symboles des rhomboèdres inverses situés au-dessous du même solide seront plus petits que ce nombre.

D'un côté, ces symboles peuvent augmenter jusqu'à devenir $\frac{1}{0} = \infty$; alors le plan sécant n'est plus situé sur l'angle solide, et il se confond avec la face même du rhomboèdre primitif; de l'autre côté, il peuvent aller en diminuant et finir par se réduire à 0. Lorsque la valeur du symbole est égale à 1, le rhomboèdre est tangent à l'angle solide, puisqu'il intercepte des longueurs égales sur les trois arêtes aboutissant à cet angle; pour une valeur égale à $\frac{1}{2}$, il est facile de démontrer que le rhomboèdre $e^{\frac{1}{2}}$ a exactement les mêmes dimensions que le primitif, et, comme ses faces sont précisément opposées à celles de ce dernier, c'est à lui qu'on devrait appliquer le nom de rhomboèdre *inverse* avec bien plus de raison qu'au solide décrit par Haüy sous cette dénomination dans la chaux carbonatée.

Quand l'exposant devient nul, la face ne coupe plus l'angle solide *e* (fig. 97), mais elle est tangente à l'arête culminante *ea;* elle est donc parallèle à un plan passant par la diagonale horizontale *ee,* et par les arêtes latérales *ee', ee';* sa notation sera donc b^1.

Le second prisme hexagonal tangent aux arêtes latérales *d* aura pour les mêmes raisons un symbole de la forme d^1.

Outre les nombreux rhomboèdres dont la notation s'écrit directement sur les figures, on a vu, par ma description, que le quartz offre beaucoup de faces dont la désignation abrégée ne peut se faire que par une lettre sans signification propre : Lévy avait l'habitude d'employer à cet usage la lettre *i,* initiale du mot *intermédiaire,* en y ajoutant autant de ′ que le cristal décrit présentait de faces différentes; mais, outre la confusion qui peut facilement s'introduire dans ces ′, lorsque le nombre en dépasse trois ou quatre, cette méthode a l'inconvénient plus grave de désigner le plus souvent de diverses manières une même face placée sur plusieurs cristaux différents : j'ai donc préféré conserver, autant que possible, à toutes les formes déjà connues les lettres employées

par Haüy, Rose ou Miller, et j'ai puisé les noms des formes nouvelles dans les alphabets grec et latin.

Les règles que j'ai posées ci-dessus pour la notation des faces rhomboédriques peuvent facilement être généralisées et s'appliquer aux autres types cristallins; elles s'établissent donc, ainsi qu'on le voit, sans avoir recours aux décroissements de Haüy, qui restent comme une hypothèse ingénieuse sur la manière dont les cristaux ont pu se former. C'est ce qu'avait déjà fait remarquer Lévy dans une note publiée dans l'*Edinburgh Philosophical Journal*, et intitulée : *Remarques sur les différents modes de notation de Weiss, Mohs et Haüy.*

Il est d'ailleurs toujours facile de transformer en signes rapportés aux arêtes de la forme primitive les signes rapportés à des axes, et réciproquement. Voici, pour le cas particulier du rhomboèdre, quelques formules qui montrent comment s'opèrent ces transformations.

D'après la notation de Weiss, employée par M. Rose dans son grand Mémoire sur le système cristallin du quartz, les formes homoèdres et hémièdres du type hexagonal sont rapportées à trois axes qui se coupent sous des angles de 60 degrés, et à un quatrième axe perpendiculaire aux premiers. Les faces d'un rhomboèdre s'écrivent donc : $(na : na : \infty a : c)$, n étant un nombre entier ou fractionnaire. Cette expression peut toujours être mise sous la forme $(a : a : \infty a : \frac{1}{n} c)$, et, en appelant r le rhomboèdre primitif, et r' son inverse, tous les rhomboèdres directs ou inverses au primitif peuvent être désignés par le symbole abrégé $\frac{1}{n} r$ et $\frac{1}{n} r'$.

Dans la notation de Lévy, le signe général de tous les rhomboèdres situés sur les angles latéraux de la forme primitive sera $c^{\frac{1}{l}}$; l étant la fraction plus petite que l'unité qui exprime la longueur comptée sur une ou sur deux des arêtes qui aboutissent à l'angle solide modifié; en posant $m = \frac{1}{n}$, on a les relations :

$l = \frac{m-1}{2m+1}$ pour les rhomboèdres directs, et $l' = \frac{m+1}{2m-1}$ pour les rhomboèdres inverses.

M. Miller rapportant les rhomboèdres à des axes parallèles aux arêtes de la forme primitive, leur notation, exprimée en nombres entiers, peut être mise sous l'une des formes $m\ \bar{n}\ \bar{n}$ pour les rhomboèdres directs, et $\bar{m}\ n\ n$ pour les rhomboèdres inverses. Les deux quantités de même signe seront alors des longueurs égales, comptées à partir de leur point de rencontre sur deux des arêtes qui aboutissent à l'angle solide modifié, et la troisième quantité sera la longueur prise sur la troisième arête; la transformation de ces symboles se fait immédiatement en écrivant $l = \frac{n}{m}$, par conséquent la notation correspondante de Lévy sera $e^{\frac{m}{n}}$.

D'après le même principe, le symbole des faces intermédiaires est, pour M. Miller, $m\ \bar{n}\ \bar{q}$, ou $\bar{m}\ n\ q$, les deux nombres de même signe se rapportant à deux arêtes latérales d, et le troisième nombre à l'arête culminante b, qui coupe les deux premières; les expressions correspondantes, dans la notation de Lévy, seront donc $(b^{\frac{1}{m}}\ d^{\frac{1}{n}}\ d^{\frac{1}{q}})$, et $(d^{\frac{1}{n}}\ d^{\frac{1}{q}}\ b^{\frac{1}{m}})$, dans lesquelles on peut toujours ramener le plus grand exposant à l'unité.

Puisque le passage de la notation de Miller à celle de Lévy se fait si simplement dans le système rhomboédrique, il nous suffira, pour traduire les symboles de Weiss en symboles de Lévy, de les ramener d'abord à la forme adoptée par Miller.

Selon qu'une face intermédiaire du système hexagonal coupe les quatre axes dans une direction ou dans la direction opposée, elle est exprimée, d'après Weiss, par une des notations :

$$\left(\frac{1}{u}a : \frac{1}{v}a : \frac{1}{w}a : \frac{1}{c}c\right)$$

ou

$$\left(\frac{1}{u}a' : \frac{1}{v}a' : \frac{1}{w}a' : \frac{1}{c}c'\right).$$

Le signe correspondant de Miller est d'une manière générale $m\,n\,q$; la valeur de ces trois quantités sera donnée, pour une face rapportée aux axes a, par les relations :

$$m = \sigma + (v + w),$$
$$n = \sigma - (w - u),$$
$$q = \sigma - (u + v).$$

Si la face est rapportée aux axes a', ces relations deviennent :

$$m = \sigma - (v + w),$$
$$n = \sigma + (w - u),$$
$$q = \sigma + (u + v).$$

En introduisant des quantités numériques dans ces équations, établies par M. de Sénarmont, pour le cours de minéralogie qu'il professe à l'École impériale des Mines, on obtient les nombres $m\,n\,q$, avec le signe qui leur convient.

Réciproquement, si l'on voulait revenir du symbole rhomboédrique d'une face quelconque à son symbole hexagonal, tel qu'il est employé par Weiss et par M. Rose, on aurait recours aux formules

$$u' = v - w,$$
$$v' = w - u,$$
$$w' = u - v,$$
$$\sigma = u + v + w,$$

dans lesquelles u' v' et w' sont des longueurs comptées sur les trois axes horizontaux, et σ la longueur prise sur l'axe vertical; $u\,v\,w$ étant les trois nombres de Miller qui expriment la position de la face sur le rhomboèdre.

Le symbole des rhomboèdres rapportés au prisme hexagonal se réduit, pour Lévy, à $b^{\frac{u+2v}{u-v}}$, et celui des prismes verticaux à $h^{-\frac{2u+w}{u+2w}}$.

Dans la première expression $v = w$, et dans la seconde $v = -(u + w)$.

Pour les scalénoèdres et les isocéloèdres placés d'une manière quelconque, la notation de Lévy, appliquée au prisme hexagonal, exige seulement deux des nombres u' v' et w' ainsi que le nombre σ, puisqu'il suffit, pour déterminer la position d'une modification, d'exprimer les longueurs qu'elle intercepte sur les deux côtés de la base parallèles à deux des axes horizontaux, et sur la hauteur qui représente l'axe vertical. Le signe algébrique des trois quantités u' v' et w' est de même sens pour deux d'entre elles et de sens contraire pour la troisième; ce sont toujours les deux longueurs de même signe qui doivent être comptées sur les arêtes de la base du prisme hexagonal, de sorte que le symbole général d'une troncature rapportée à cette forme primitive sera, dans la notation de Lévy:

$$(b^{\frac{1}{u'}}\ b^{\frac{1}{v'}}\ h^{\frac{1}{\sigma}}),\ (b^{\frac{1}{u'}}\ b^{\frac{1}{w'}}\ h^{\frac{1}{\sigma}}),$$

ou

$$(b^{\frac{1}{v'}}\ b^{\frac{1}{w'}}\ h^{\frac{1}{\sigma}}).$$

Suivant qu'on choisira le prisme hexagonal e^1 situé sur les angles, ou d^1 situé sur les arêtes du rhomboèdre, les faces seront, pour Lévy, des a ou des b; or, à hauteur égale, a^x du premier prisme devient $b^{\frac{x}{2}}$ dans le second, et b^x devient $a^{\frac{1}{2}x}$. Une face quelconque ayant pour symbole rapporté aux axes a' l'expression,

$$\left(\frac{1}{u}a' : \frac{1}{v}a' : \frac{1}{w}a' : \frac{1}{\sigma}c\right)$$

sera pour Lévy

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{v+u}{2v-4u}}\ h^{\frac{v+u}{3\sigma}}\right).$$

Si l'on suppose que la hauteur du prisme situé sur les arêtes est égale aux $\frac{2}{3}$ de celle du prisme situé sur les angles, a^x devient $b^{\frac{x}{3}}$, b^x devient a^x, et le symbole d'une face quelconque est:

$$\left(b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{v+u}{2v-4u}}\ h^{\frac{v+u}{2\sigma}}\right).$$

Il suffit d'avoir examiné quelques cristaux de quartz pour savoir que ce sont toujours les inclinaisons des divers rhomboèdres dérivés, sur les faces du rhomboèdre primitif ou sur celles de son inverse, qui s'obtiennent le plus facilement et avec le plus de netteté; il est donc commode d'avoir quelques formules pour calculer immédiatement le symbole de ces rhomboèdres en fonction d'une de leurs incidences, et réciproquement.

Comme on ne connaît dans le quartz, sur les angles culminants du rhomboèdre primitif, que les deux modifications a^1 et a^2, tandis qu'il en existe une très-grande quantité sur les angles latéraux, je ne m'occuperai ici que de ces dernières.

Les notations $e^{\frac{1}{l}}$ et $e^{\frac{1}{l'}}$ représentant en général tous les rhomboèdres directs et inverses situés sur les angles e, la valeur de l et de l' sera donnée par les formules :

$$(1) \qquad l = \frac{\delta \sin (C + \alpha)}{\sin (C + \alpha - E)},$$

$$(2) \qquad l' = \frac{\delta \sin (C + \alpha')}{\sin (C + \alpha' - E)},$$

dans lesquelles δ représente la longueur de la demi-diagonale oblique des faces du rhomboèdre primitif, C est l'angle aigu que ces faces font avec un plan perpendiculaire à l'axe vertical, E est le supplément de l'angle au sommet formé par la diagonale oblique avec l'arête culminante opposée b; α est l'angle obtus que les rhomboèdres directs font avec le plan perpendiculaire à l'axe, et α' l'angle aigu que les rhomboèdres inverses font avec le même plan (fig. 98, pl. III); par conséquent, $C + \alpha$ est l'inclinaison donnée immédiatement par l'observation d'un rhomboèdre direct sur la face primitive correspondante, et $C + \alpha'$ est l'angle compris entre un rhomboèdre inverse et la face primitive opposée; comme les cristaux n'ont en général qu'un seul sommet, il est rare que ce dernier angle s'obtienne directement, mais il est toujours facile de le déduire de celui qu'on mesure entre le rhomboèdre dérivé et la face $e^{\frac{1}{2}}$ adjacente.

Réciproquement, si l'on connaît la notation d'un rhomboèdre direct ou inverse, les angles α et α' se calculeront au moyen des formules :

$$\text{(3)} \qquad \text{tang } \alpha = \frac{l+1}{(1-2l)\cot C},$$

$$\text{(4)} \qquad \text{tang } \alpha' = \frac{l'+1}{(2l'-1)\cot C}.$$

Le symbole d'un rhomboèdre quelconque est aussi lié à celui de son inverse par la relation :

$$\text{(5)} \qquad l' = \frac{2-l}{4l+1}.$$

Enfin, le signe des rhomboèdres tangents sera,

pour les rhomboèdres directs, $e^{\frac{1}{1+2l}}$

pour les rhomboèdres inverses, $e^{\frac{1-l'}{2l'}}$

Les formules relatives aux rhomboèdres situés sur les angles culminants de la forme primitive sont aussi simples que les précédentes, et elles s'établiraient avec la même facilité.

On peut également calculer la notation des faces nommées plagièdres par Haüy en fonction d'une de leurs incidences, et réciproquement. On sait, en effet, que toutes ces faces appartiennent, soit à la zone $p\ s\ e^2$, soit à la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, s étant la face rhombe commune aux deux zones. La position de ces zones une fois déterminée, il existe plusieurs méthodes qui donnent les longueurs interceptées par les plagièdres sur les arêtes de la forme primitive, lorsqu'on possède l'inclinaison de ces modifications sur une des faces de leur zone.

L'une des méthodes les plus simples consiste à employer les équations suivantes :

1° Pour les plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$, situés au-dessous du rhombe; $u\ v\ w$ étant les trois nombres entiers employés dans la notation de Miller, ces nombres seront donnés par la relation :

$$\frac{u}{-2n} = \frac{v}{m+n} = \frac{w}{n},$$

et les quantités m et n se déduiront du rapport :

$$\frac{m}{n} = 3 \cdot \frac{\sin sp}{\sin se^2} \cdot \frac{\sin \pi e^2}{\sin \pi p},$$

dans lequel πe^2 et πp représentent l'incidence du plagièdre sur la face verticale et sur la face primitive qui font partie de la zone.

2° Pour les plagièdres situés au-dessus de s, on aura :

$$\frac{u}{-2m} = \frac{v}{m+n} = \frac{w}{m}$$

et

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin se^2}{\sin sp} \cdot \frac{\sin tp}{\sin te^2}.$$

3° Pour les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, situés au-dessous de s, les équations seront :

$$\frac{u'}{-(m'+n')} = \frac{v'}{2m'-n'} = \frac{w'}{2(m'+n')}$$

et

$$\frac{m'}{n'} = \frac{\sin se^{\frac{1}{2}}}{\sin se^2} \cdot \frac{\sin xe^2}{\sin xe^{\frac{1}{2}}}.$$

4° Pour les plagièdres situés au-dessus du rhombe :

$$\frac{u'}{m'+n'} = \frac{v'}{m'-2n'} = \frac{w'}{-2(m'+n')}$$

et

$$\frac{m'}{n'} = \frac{\sin se^2}{\sin se^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin \tau e^{\frac{1}{2}}}{\sin \tau e^2}$$

Si maintenant on considère la figure 99, pl. III, sur laquelle le rhomboèdre $e^{\frac{1}{2}}$ est indiqué par le triangle $a\ m\ m'$ et le prisme hexagonal e^2 par les triangles $n\ e''\ e'''$ et $n'\ e\ e'$, il est facile de voir que le rhombe s, pour se trouver à la fois dans les deux zones, p droit e^2 gauche, et $e^{\frac{1}{2}}$ gauche e^2 droit, doit être représenté par le triangle $e''\ n\ q$ dont le symbole peut s'écrire indifféremment, dans le système de Lévy, $(d^1\ d^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{2}})$ ou $(b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$. Tous les plagièdres de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, devant couper la face $e^{\frac{1}{2}}$ suivant des lignes parallèles à am ou nq, seront exprimés par des symboles de la forme $(b^x\ d^1\ d^{2x})$ ou $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$; le premier indiquera des plagièdres inférieurs au rhombe, pour toutes les valeurs de x plus petites que $\frac{1}{2}$. Pour $x = 0$, la modification sera exprimée par le signe $(b^0\ d^1\ d^0)$ qui est précisément celui du second prisme d^1, tangent aux arêtes latérales; pour $x = \frac{1}{2}$ l'expression $(b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^1)$ représentera le prisme hexagonal e^2 figuré par les triangles $e\ e'\ n'$ et $n\ e''\ e'''$: si la valeur de x dépassait $\frac{1}{2}$, on retomberait sur les plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$, dont nous parlerons tout à l'heure, et comme l'expression $(b^x\ d^1\ d^{2x})$ peut s'écrire $(d^1\ d^{\frac{1}{2x}}\ b^{\frac{1}{2}})$, pour $x = \infty$ la troncature se réduirait au triangle $n\ e'\ e''$ compris dans une face du rhomboèdre primitif.

Le second symbole $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$ se rapporte encore à des plagièdres inférieurs, si x est plus petit que $\frac{1}{2}$; pour $x = \frac{1}{2}$ on a $(b^{\frac{1}{2}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$, qui est précisément le rhombe représenté par le triangle $n\ q\ e''$; toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{2}$ nous donnent des plagièdres supérieurs au rhombe; si $x = 2$, le plagièdre $(b^1\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{2}})$ se confond avec le rhomboèdre $e^{\frac{1}{2}}$, et si $x = m > 2$, l'expression $(b^1\ d^{\frac{1}{m}}\ d^{\frac{1}{2}})$ indique des troncatures situées sur l'arête d'intersection des faces p et $e^{\frac{1}{2}}$; lorsque m devient égal à ∞, on retombe, comme tout à

l'heure, sur un triangle $a\ m\ e'$ compris dans la face rhomboïdale p'.

Les plagièdres de la zone $p\ s\ e^2$ peuvent tous être ramenés à un plan coupant la face p, par exemple, suivant la ligne $e''\ n$, menée par l'angle latéral e'' et par le milieu de l'arête culminante $a\ c'$, ce plan rencontrant d'ailleurs l'arête latérale $c'\ e'''$ en un point quelconque de sa longueur; le symbole général de tous ces plagièdres sera donc de la forme $(d^1\ d^x\ b^{\frac{1}{2}})$, x étant un nombre quelconque plus petit que l'unité; si x était égal à 1, on retomberait sur le prisme hexagonal e^2; toutes les valeurs de x plus petites que $\frac{1}{4}$ indiqueront des plagièdres supérieurs au rhombe, toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{4}$ et 1 se rapporteront, au contraire, à des plagièdres inférieurs.

Il est d'ailleurs facile de voir, comme précédemment, que pour les valeurs extrêmes $x = 0$ et $x = \infty$ on a un triangle $n\ e'\ e'''$ compris dans la face rhomboïdale p', ou un plan parallèle à l'arête latérale $e'\ e''$ et coupant la face p suivant la ligne $n\ n''$: le symbole de ce plan pourrait donc s'écrire d^2; c'est le solide auquel Haüy a donné le nom de dodécaèdre *métastatique*.

Il est évident, d'après ce que j'ai dit précédemment sur les rapports qui existent entre la notation rhomboédrique de Miller et celle de Lévy, que si, parmi les longueurs $u\ v\ w$ ou $u'\ v'\ w'$, on a soin de compter celles qui ont le même signe algébrique sur les deux arêtes de même espèce qui concourent avec une troisième arête d'espèce différente, à chaque angle solide latéral de la forme primitive, les expressions $(b^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}}\ d^{\frac{1}{w}})$, $(b^{\frac{1}{v}}\ d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{w}})$ ou $(b^{\frac{1}{w}}\ d^{\frac{1}{u}}\ d^{\frac{1}{v}})$ pourront toujours se ramener à l'une des formes $(b^x\ d^1\ d^{2x})$, $(b^x\ d^1\ d^{\frac{x}{2}})$ ou $(d^1\ d^x\ b^{\frac{1}{2}})$ que je viens de discuter.

Si maintenant, étant donné le signe cristallographique d'un plagièdre quelconque, on voulait trouver son inclinaison sur une des faces de sa zone, on pourrait avoir recours aux relations suivantes :

1° Pour les plagièdres inférieurs de la zone $p\ s\ e^2$, dont le symbole général est, dans la notation de Miller, $(u\ v\ w)$, $u = -2\ w$, on peut poser

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin se^2}{\sin sp}\cdot\frac{u+2v}{u} = K$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi\ e^2 - \pi\ p) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p\ e^2)\cdot\frac{K-1}{K+1}.$$

Or

$$\frac{1}{2}(p\ e^2) = \frac{1}{2}(\pi\ e^2 + \pi\ p);$$

au moyen de la demi-somme et de la demi-différence des angles $\pi\ e^2$ et $\pi\ p$, on pourra donc déterminer chacun d'eux.

2° Pour les plagièdres supérieurs, on posera

$$-3\cdot\frac{u}{u+2v}\cdot\frac{\sin sp}{\sin se^2} = K'$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(tp - te^2) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p\ e^2)\cdot\frac{K'-1}{K'+1},$$

relations d'où l'on pourra conclure les valeurs de tp et de te^2.

3° On aura de même, pour les plagièdres inférieurs de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$, dont le symbole général est $(u'\ v'\ w')$, $u' = -\frac{1}{2}w'$, les formules suivantes :

$$\frac{u'-v'}{2u'+v'}\cdot\frac{\sin se^2}{\sin se^{\frac{1}{2}}} = L$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x\ e^2 - x\ e^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}}\ e^2)\cdot\frac{L-1}{L+1},$$

d'où l'on tirera les valeurs de $x\ e^2$ et de $x\ e^{\frac{1}{2}}$.

4° Enfin, pour les plagièdres supérieurs de la même zone, en posant

$$\frac{2u' + v'}{u' - v'} \cdot \frac{\sin se^{\frac{1}{2}}}{\sin se^{2}} = L'$$

et

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\tau e^{\frac{1}{2}} - \tau e^{2}) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} e^{2}) \cdot \frac{L' - 1}{L' + 1},$$

on connaîtra $\tau e^{\frac{1}{2}}$ et τe^{2}.

Mes observations m'ont fait voir que les faces plagièdres de zones différentes, mais d'angles égaux, étaient plus communes qu'on ne l'avait remarqué jusqu'ici; il peut donc être utile, lorsque l'on connaît une de ces faces, de déterminer immédiatement le symbole de son inverse; cette transformation se fait facilement, au moyen des formules suivantes, qui se trouvent page 85 de la traduction française du *Traité de Cristallographie* de Miller :

$$p = 2(k + l) - h,$$
$$q = 2(h + l) - k,$$
$$r = 2(h + k) - l;$$

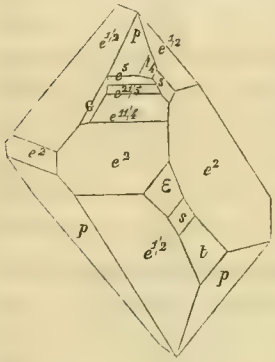
h, k, l sont les coefficients d'une face plagièdre quelconque, et p, q, r ceux de la forme inverse de cette face.

Les autres faces du quartz, que j'ai nommées faces *isolées*, parce qu'elles ne font pas partie des zones principales dont j'ai parlé jusqu'à présent, sont toujours comprises au moins dans une zone formée par deux faces de position bien déterminée; leur signe cristallographique s'obtiendra donc en général par un calcul fort simple, au moyen de leur incidence sur une de ces faces.

Quant aux zones qui, à cause de leur multiplicité, jouent un rôle très-important dans la cristallisation du quartz, on peut les déterminer, soit au moyen des procédés algébriques donnés par Miller dans sa Cristallographie, soit par une construction géo-

métrique sur la figure du rhomboèdre en perspective ou en projection; dans ce dernier cas, on ramène toujours leur détermination à une comparaison de triangles semblables dérivant immédiatement de la position des faces sur les arêtes de la forme primitive.

Pendant l'impression de mon mémoire, j'ai rencontré le cristal de quartz figuré ci-contre, qui porte une nouvelle face dont la position nous fournit un exemple remarquable de ces zones approximatives dont j'ai précédemment signalé plusieurs fois l'existence probable.



$t = (d^1\ d^{\frac{3}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$
$\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$
$t_4 = (d^1\ d^{\frac{3}{28}}\ b^{\frac{1}{2}})$
$G = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{15}}\ b^{\frac{1}{7}})$

En effet, la face G, quoique assez étroite, est brillante, et permet de mesurer ses incidences avec une exactitude suffisante pour qu'on puisse en répondre à 10 ou 15 minutes près; quant au rhomboèdre $e^{\frac{11}{4}}$, qui forme zone avec la face $e^{\frac{1}{2}}$ de gauche et la modification nouvelle G, il est tellement net qu'il n'y a aucune hésitation possible sur son symbole; la zone $e^{\frac{1}{2}}\ G\ e^{\frac{11}{4}}$ elle-même se vérifie sur le goniomètre avec la plus grande précision.

Or, les symboles rhomboédrique et hexagonal de G, qui satisfont à cette zone et qui donnent les incidences calculées les plus voisines des incidences mesurées, sont :

$$G = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{15}}\ b^{\frac{1}{7}}) \text{ et } (b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{17}}\ h^{\frac{1}{18}}).$$

En examinant la position qu'occuperait cette face sur la projection sphérique fig. IV, on voit que, sur le cercle de zone $e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{11}{4}}$, on pourrait à peine distinguer cette position, du point de

rencontre des zones $e^{\frac{1}{2}}$ $e^{\frac{11}{6}}$ et $pe^{\frac{5}{3}}$, et l'on est conduit à admettre la réalité de cette seconde zone. Cependant, si l'on cherche les signes rhomboédrique et hexagonal qui satisferaient à la fois à ces deux zones, on trouve :

$$G = (d^{\frac{1}{28}}\ d^{\frac{1}{63}}\ b^{\frac{1}{20}}) \text{ et } (b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{10}}\ h^{\frac{1}{17}}).$$

Le signe rhomboédrique est donc beaucoup plus compliqué que celui qui satisfait seulement à la zone $e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{11}{6}}$, les deux signes hexagonaux sont aussi simples l'un que l'autre. De plus, les angles calculés correspondant aux seconds symboles sont assez éloignés des angles mesurés directement, pour qu'on ne puisse pas les considérer comme compris dans les limites des erreurs d'observation, de sorte que, malgré l'avantage qu'il y aurait à voir la face G déterminée par l'intersection de deux zones, toutes les probabilités sont en faveur d'une seule zone exacte et du symbole assez simple $G = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{7}})$, avec une seconde zone très-approchée.

Voici du reste la comparaison des incidences mesurées avec celles qui se déduisent des deux espèces de symboles.

Angles observés.	Angles calculés.	
	$G = (d^{\frac{1}{10}}\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\frac{1}{7}})$;	$G = (d^{\frac{1}{28}}\ d^{\frac{1}{63}}\ b^{\frac{1}{20}})$
$pG =$ 141° 40′ environ.	142° 14′	142° 43′
$pe^{\frac{5}{3}} =$ //	//	130° 45′
$Ge^{\frac{5}{7}} =$ //	//	168° 2′
$e^{\frac{1}{2}}\ G =$ 169° 45′	169° 39′	169° 1′
$e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{11}{6}} =$ 118° 55′	118° 58′	//
$Ge^{\frac{11}{6}} =$ 129° 10′	129° 19′	129° 57′

LÉGENDE DE LA PLANCHE IV.

$k = (b^{\frac{9}{11}}\ d^1\ d^{\frac{9}{7}})$

$k_1 = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{1}{8}})$

$k_2 = (b^{\frac{2}{7}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$

$k_3 = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$

$k_4 = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$

$c = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{1}{5}})$

$k_5 = (b^{\frac{1}{7}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$

$k_6 = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{1}{7}})$

$k_7 = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{8}})$

$k_8 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\frac{1}{9}})$

$k_9 = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\frac{1}{10}})$

$n_2 = (d^1\ d^{\frac{9}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$n_1 = (d^1\ d^{\frac{7}{8}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$n = (d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\lambda = (d^1\ d^{\frac{11}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\rho = (d^1\ d^{\frac{5}{8}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\mu_2 = (d^1\ d^{\frac{7}{12}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\mu = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$q = (d^1\ d^{\frac{8}{17}}\ b^{\frac{1}{4}})$

$w = (d^1\ d^{\frac{7}{16}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\varepsilon = (d^1\ d^{\frac{2}{5}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\varpi = (d^1\ d^{\frac{5}{14}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$\theta = (d^1\ d^{\frac{7}{24}}\ b^{\frac{1}{6}})$

$N_1 = (d^1\ d^{\frac{3}{10}}\ b^{\frac{1}{3}})$

$N = (d^1\ d^{\frac{4}{15}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$s = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_1 = (d^1\ d^{\frac{5}{28}}\ b^{\frac{1}{2}})$

ou $(d^1\ d^{\frac{2}{9}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t = (d^1\ d^{\frac{3}{11}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_2 = (d^1\ d^{\frac{1}{7}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_3 = (d^1\ d^{\frac{1}{10}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_4 = (d^1\ d^{\frac{1}{26}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_5 = (d^1\ d^{\frac{1}{34}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$t_6 = (d^1\ d^{\frac{1}{52}}\ b^{\frac{1}{2}})$

$H = (d^{\frac{1}{17}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$

$\gamma = (d^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$

$\xi = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}\ b^1)$

$\gamma_1 = (d^{\frac{2}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$

$\beta = (d^{\frac{7}{20}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$

$\tau_7 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{6}{11}}\ b^1)$

$\tau_6 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{7}}\ b^1)$

$\tau_5 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{10}{17}}\ b^1)$

$\tau_4 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{8}{13}}\ b^1)$

$\tau_3 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{7}{11}}\ b^1)$

$\tau_2 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{2}{3}}\ b^1)$

$\tau_1 = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{5}{7}}\ b^1)$

$\tau = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{4}{5}}\ b^1)$

$L = (d^{\frac{1}{2}}\ d^1\ b^1)$

$\sigma_3 = (d^{\frac{3}{5}}\ d^1\ b^{\frac{3}{4}})$

$\sigma_2 = (d^{\frac{1}{3}}\ d^1\ b^{\frac{2}{3}})$

$\sigma_1 = (d^{\frac{2}{29}}\ d^1\ b^{\frac{-}{11}})$

ou $(d^{\frac{4}{13}}\ d^1\ b^{\frac{8}{13}})$

$\sigma = (d^{\frac{1}{8}}\ d^1\ b^{\frac{1}{2}})$

$u = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}})$

$y = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{2}{5}})$

$x = (b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$

$v = (b^{\frac{5}{16}}\ d^1\ d^{\frac{5}{8}})$

ou $(b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{2}{3}})$

$v_1 = (b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{10}{13}})$

ou $(b^{\frac{3}{8}}\ d^1\ d^{\frac{3}{4}})$

$v_2 = (b^{\frac{5}{12}}\ d^1\ d^{\frac{5}{6}})$

$v_3 = (b^{\frac{7}{16}}\ d^1\ d^{\frac{7}{8}})$

$v_4 = (b^{\frac{11}{24}}\ d^1\ d^{\frac{11}{12}})$

$\zeta = (d^1\ d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}})$

$\Gamma = (d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{2}}\ b^1)$

$\Upsilon = (b^{\frac{1}{12}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\Upsilon_1 = (b^{\frac{1}{36}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\Upsilon_2 = (b^{\frac{1}{12}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\varepsilon = (b^{\frac{1}{11}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\mathcal{P} = (b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\chi = (b^{\frac{1}{40}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\chi_1 = (b^{\frac{1}{20}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\chi_2 = (b^{\frac{1}{10}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\chi_3 = (b^{\frac{3}{20}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\Psi = (d^1\ d^{\frac{1}{6}}\ b^{\frac{1}{\cdot}})$

$M = (b^{\frac{2}{37}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\Pi_1 = (b^{\frac{3}{11}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$R = (d^1\ d^{\frac{3}{4}}\ b^{\frac{\cdot}{\cdot}})$

$\Pi = (b^{\frac{1}{6}}\ d^1\ d^{\frac{3}{5}})$

$\Phi = (b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{\cdot}{11}})$

$\Lambda = (d^{\frac{3}{5}}\ d^{\frac{\cdot}{7}}\ b^1)$

$\iota_2 = (d^1\ d^{\frac{12}{\cdot\cdot}}\ b^{\frac{15}{31}})$

$\iota_1 = (d^1\ d^{\frac{6}{7}}\ b^{\cdot 9})$

$\iota = (d^1\ d^{\frac{4}{5}}\ b^{\frac{6}{13}})$

$\psi = (d^1\ d^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{3}{10}})$

$\alpha = (d^1\ d^{\frac{23}{27}}\ b^{\frac{11}{24}})$

$\Delta = (b^{\frac{1}{9}}\ d^1\ d^{\frac{1}{6}})$

$\Omega = (d^1\ d^{\frac{1}{13}}\ b^{\frac{1}{12}})$

$\omega = (d^1\ d^{\frac{1}{16}}\ b^{\cdot\cdot})$

$D_1 = (b^{\cdot}\ d^1\ d^{\frac{3}{20}})$

$D = (d^1\ d^{\frac{1}{8}}\ b^{\frac{3}{14}})$

$\Xi = (b^{\frac{5}{\cdot\cdot}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\iota_1 = (b^{\frac{5}{\cdot\cdot}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$z = (b^{\frac{3}{8}}\ d^1\ d^{\frac{9}{\cdot\cdot}})$

ou $(b^{\frac{5}{13}}\ d^1\ d^{\frac{9}{13}})$

$\Sigma = (b^{\frac{2}{5}}\ d^1\ d^{\cdot})$

$\Sigma_1 = (b^{\frac{18}{63}}\ d^1\ d^{\frac{2}{\cdot}})$

$\varkappa = (b^{\frac{7}{40}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}})$

$\zeta_1 = (d^1\ d^{\frac{8}{23}}\ b^{\frac{\cdot}{\cdot}})$

$\Theta = (d^1\ d^{\frac{15}{17}}\ b^{\frac{9}{16}})$

ou $(d^1\ d^{\frac{5}{6}}\ b^{\frac{6}{11}})$

$\eta = (b^{\frac{2}{11}}\ b^{\frac{1}{7}}\ b^1)$

$\delta = (d^{\frac{1}{14}}\ d^{\frac{2}{19}}\ b^1)$

MÉMOIRE

SUR

LA PROBABILITÉ DES ERREURS

D'APRÈS LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS,

PAR I. J. BIENAYMÉ,

INSPECTEUR GÉNÉRAL DES FINANCES.

Nos sequimur probabilia, nec ultra quam id, quod verisimile occurrerit, progredi possumus; et refellere sine pertinacia, et refelli sine iracundia, parati sumus.
Tusculan. 2.

§ Ier.

La méthode des moindres carrés est si fréquemment employée aujourd'hui dans les sciences d'observation, que tout ce qui peut en rendre les applications plus sûres devient d'un grand intérêt, quelque simple que ce soit d'ailleurs. Cette considération a fait rédiger les recherches suivantes, qui ont pour objet de modifier le calcul ordinaire de la probabilité des erreurs, non dans le cas où les observations ne font connaître qu'une seule grandeur, mais dans les cas beaucoup plus multipliés où les observations donnent à la fois plusieurs grandeurs inconnues, qui sont liées par des équations avec la grandeur observée. Dans d'autres temps, lorsque la méthode était peu usitée en France, et regardée, à cause des longs calculs qu'elle exige, plutôt comme une curiosité savante que comme un instrument réel de l'observateur, la modification profonde reconnue dans la probabilité avait pu ne paraître que d'une importance secondaire. Mais à présent il semble vraiment utile de signaler la défectuosité du calcul ordinaire, car elle touche

à des travaux plus nombreux chaque jour; et les observateurs, ne pouvant sacrifier un temps précieux à la vérification de théories difficultueuses, sont obligés d'en accepter les règles pratiques sur la foi de leurs devanciers : surtout quand ceux-ci sont des hommes de grande et juste autorité dans la science.

Il y aurait peut-être plus d'un défaut à relever dans les applications de la méthode des moindres carrés : il ne sera cependant question ici que de celui qui frappe le plus souvent les yeux, et dont voici l'indication, si simple qu'aux premiers mots tout le monde en reconnaîtra l'existence, bien que les modifications qu'il nécessite puissent imposer un travail analytique assez compliqué.

On sait que la méthode inventée par Legendre, il y a environ cinquante ans, et publiée pour la première fois dans ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, in-4°, 1805, se réduit à multiplier chacune des équations du premier degré formées entre la grandeur observée et les inconnues par le coefficient de chacune de ces inconnues successivement; à ajouter les produits donnés par les coefficients de la même inconnue, ce qui fournit autant de nouvelles équations que d'inconnues; enfin à résoudre ces équations de la manière ordinaire. Les solutions ainsi obtenues jouissent de la propriété de ne renfermer que les moindres erreurs possibles pour une probabilité donnée. Ce n'est pas un minimum absolu, comme on a semblé le croire assez souvent, mais c'est un minimum relatif aux erreurs des observations et au mode choisi pour la combinaison de toutes les équations qu'elles fournissent. Il pourrait se trouver d'autres combinaisons plus avantageuses, et il y aurait à les discuter suivant les cas.

Le calcul de la grandeur des erreurs subsistantes, et de la probabilité qu'elles peuvent avoir, se fait suivant les règles ordinaires de la théorie, et n'entraîne que des difficultés analytiques.

Quand il n'entre qu'une inconnue dans les équations, ce calcul est exact, du moins quant aux fondements théoriques; mais quand il y a plusieurs inconnues, les règles données pour calculer l'er-

reur et la probabilité de chacune d'elles ne fournissent que l'erreur et la probabilité qu'elle pourrait avoir si elle était seule, et quelque grandes que fussent les erreurs des autres.

Or, un des premiers principes de la théorie des probabilités, c'est que, quand plusieurs événements arrivent simultanément, la probabilité du concours de ces événements est le produit des probabilités de chacun. De sorte que la probabilité de ce concours est inférieure à la probabilité de chaque événement pris à part, et elle est d'autant plus petite qu'il y a plus d'événements.

Évidemment, il en est de même des erreurs de plusieurs inconnues, la probabilité que ces erreurs restent, toutes à la fois, dans certaines limites, ne peut être que le produit des probabilités séparées que chacune ne s'écarte pas de ses limites propres, et, par conséquent, cette probabilité du concours des erreurs de grandeur limitée doit être notablement inférieure à la probabilité des limites de chaque erreur considérée isolément, quelles que puissent être les autres.

C'est donc une défectuosité que d'assigner comme probabilité de l'erreur d'une inconnue, faisant partie d'un système à déterminer, celle qu'elle aurait si elle était seule, au lieu de donner des règles pour calculer la probabilité de l'ensemble des erreurs du système qui ne peuvent, en réalité, être isolées les unes des autres.

Ce défaut devient plus évident encore lorsqu'on fait attention que la probabilité relative à une limite d'erreur est d'autant plus grande que l'étendue bornée par cette limite est plus grande, de sorte que, si l'on veut conserver à l'ensemble des erreurs une probabilité un peu élevée, il faudra assigner à chaque erreur des limites plus écartées que celles qu'exigerait la même probabilité si l'inconnue était seule. Lors donc qu'on s'arrête à ces dernières limites, on n'a réellement qu'une très-faible probabilité qu'elles ne sont pas dépassées. On verra, en effet, dans ce qui suit, qu'il suffit de deux inconnues pour que l'étendue des erreurs soit presque doublée pour une même probabilité. Les règles usuelles font naître

par là des idées fort inexactes sur la connaissance des grandeurs inconnues qu'on s'est proposé de déduire des observations, et elles égarent même parfois sur la valeur de ces observations, ainsi que sur le nombre de bonnes observations qu'il serait indispensable de faire pour parvenir à un résultat assigné.

Qu'il soit permis au sujet de ce nombre, de cette multiplicité des observations, bien entendu de bonnes observations, de faire remarquer que c'est là une condition impérieuse des connaissances humaines quand la précision n'est pas absolue. Car les hommes cherchent à la fois tant de choses, que la probabilité du concours des valeurs exactes de toutes ces choses ne peut devenir très-grande que par la grandeur immense du nombre des observations.

C'est, en effet, cette grandeur et la répétition continuelle des circonstances ordinaires de la vie qui met hors de doute les pratiques du sens commun; et toute l'efficacité d'un sophisme ne consiste le plus souvent qu'à dérober la vue de la multiplicité réelle des faits d'une expérience journalière, en faisant croire à une multiplicité factice d'événements possibles, sans doute, mais qui n'arrivent pour ainsi dire jamais.

La défectuosité une fois indiquée, on voit qu'il ne s'agit plus que de modifier convenablement la démonstration de la méthode, afin de calculer, non plus la probabilité de l'erreur d'une inconnue, mais la probabilité de l'ensemble des erreurs. Il y avait ici à choisir parmi les démonstrations.

A proprement parler, Legendre n'en a point donné. Seulement il appuie son procédé assez solidement sur les avantages qu'il fait ressortir; et il insiste principalement sur ce que la moyenne arithmétique des observations, que l'on prend d'ordinaire avec confiance, n'est précisément qu'un cas particulier de la méthode des moindres carrés.

Ce fut M. Gauss qui rattacha le premier cette méthode au calcul des probabilités, quelques années après la publication de Legendre, et ce fut aussi dans un ouvrage d'astronomie : *Theoria motus corporum cœlestium*, in-4°, 1809. La démonstration que M. Gauss

y donne repose sur la réciproque de la remarque de Legendre, que la moyenne arithmétique se déduit de sa méthode, quand cette moyenne peut avoir lieu. Réciproquement, si la moyenne arithmétique adoptée généralement est nécessaire, dit M. Gauss, il en résulte qu'une certaine loi de probabilité est nécessaire, et que le seul procédé à suivre pour combiner les équations fournies par l'observation est le procédé qui rend un minimum la somme des carrés de ces équations. Mais on doit convenir que l'hypothèse de la nécessité de prendre la moyenne arithmétique d'une masse de faits, pour obtenir le résultat le plus exact possible, est tout à fait gratuite, et ne saurait pas plus être admise *a priori* que l'hypothèse même de la nécessité du minimum des carrés. Il n'y a donc là qu'une preuve restreinte aux cas particuliers où la loi de probabilité des erreurs, qui conduit toujours à la moyenne arithmétique, existe dans les observations, et c'est ce qui arrive très-souvent par la nature des choses. Mais comme on l'ignore le plus ordinairement, il n'existe pas là de démonstration vraiment solide. Aussi dans un ouvrage bien plus récent, consacré exclusivement à la méthode des moindres carrés, *Theoria combinationis observationum minimis erroribus obnoxiæ*, in-4°, 1823, M. Gauss a-t-il fondé sur d'autres considérations l'emploi de cette méthode. Ce ne sont, toutefois, que des considérations et non des preuves, et l'on ne trouve de démonstration réelle que dans les travaux antérieurs de Laplace.

C'est dans un mémoire, publié en 1811, que Laplace fit voir que, quand le nombre des observations est assez grand, les erreurs les plus restreintes, probablement, sont données par la méthode des moindres carrés. Ce mémoire se trouve parmi ceux de l'Académie des sciences pour 1811, et il a été reproduit dans la *Théorie analytique des probabilités*, qui parut en 1812. Les principes de la démonstration de Laplace sont à l'abri de toute objection; les moyens analytiques peuvent seuls en soulever quelques-unes. Ils n'ont point toute la rigueur désirable, et peut-être dans les applications conviendrait-il de bien discuter les cas particuliers

qui pourraient se présenter. Mais lorsqu'on réfléchit qu'il suffirait le plus souvent de quelques observations ajoutées ou retranchées pour rendre aux expressions analytiques toute leur valeur, on reconnaît que l'analyse de Laplace satisfait complétement aux démonstrations générales. C'est cette analyse qui sera employée dans ce qui va suivre, pour suppléer l'omission de la probabilité du concours des diverses erreurs dans le cas de plusieurs inconnues, qui se présente presque toujours. Seulement il y sera fait quelques simplifications, tirées surtout des beaux travaux de Laplace et de Gauss. Si l'un et l'autre ont négligé cette considération du concours des événements, qui accroît si fortement la grandeur des erreurs possibles avec une probabilité déterminée, ils ont du moins fourni tous les moyens de la calculer.

Il aurait été sans doute très-utile d'entrer dans plus de détails pratiques et de donner plusieurs exemples de calculs; mais chaque application de ce genre exigerait un temps assez long.

On verra, cependant, comment la probabilité d'un million contre 1, assignée par Laplace aux erreurs possibles de la masse de Jupiter, dont il fixait la limite à $\frac{1}{100}$ de la valeur, doit être réduite à 1160 contre 1; même en supposant, comme il l'a fait, que le nombre des équations employées, 129 seulement, permît d'appliquer la formule d'approximation, et n'exigeât pas l'addition des termes négligés habituellement. Cette diminution de la probabilité calculée suffit bien, si l'on fait attention aux autres défauts que peuvent renfermer les 129 équations, pour faire cesser la surprise qu'on a dû éprouver quand il a paru nécessaire de modifier de $\frac{1}{50}$ la masse qui semblait définitivement calculée avec une précision double. Les formules nouvelles mettent donc ici le calcul des probabilités à l'abri des reproches qui ont pu lui être faits un peu précipitamment à cette occasion. Il est très-probable que, dans les autres cas où ce calcul paraît en défaut, on en trouverait également la cause dans quelque omission de l'analyse ou de l'observation.

§ II.

L'application de la méthode des moindres carrés suppose qu'un grand nombre n d'observations a donné des résultats ω_1, $\omega_2 \ldots$ $\omega_h \ldots$ ω_n qui auraient pu être calculés d'avance en fonction linéaire de plusieurs éléments x_1, $x_2 \ldots$ $x_i \ldots$ x_m en nombre m, si ces éléments étaient connus. Chaque observation fournit, dès lors, entre la valeur observée et la valeur calculée correspondante une équation telle que

$$(1) \quad a_{1,h}\, x_1 + a_{2,h}\, x_2 + \ldots + a_{i,h}\, x_i + \ldots + a_{m,h}\, x_m = \omega_h$$

qui se rapporte à la h^e observation. Les coefficients $a_{i,h}$ sont des quantités connues, indépendantes des éléments x_1, x_2, etc. Les indices dont ils sont affectés marquent l'inconnue et l'équation auxquelles le coefficient appartient. Ainsi $a_{3,7}$, est le coefficient de la 3^e inconnue dans la 7^e équation.

Les équations, en nombre n, que représente l'expression (1), ne renfermant que m inconnues, il suffit qu'il s'en trouve m qui ne rentrent par les unes dans les autres, pour qu'on puisse les résoudre par les procédés ordinaires. Mais comme l'observation ne donne pas rigoureusement la valeur de la grandeur observée, et qu'il s'y joint toujours quelque erreur, il est clair qu'il sera plus avantageux de faire servir, par une combinaison quelconque, toutes les équations obtenues à la détermination des inconnues, qu'il ne pourrait l'être d'en choisir m, peut-être sans motifs valables. Le bon sens suffit, en effet, pour faire présumer que, dans la réunion de tant de valeurs, dont les erreurs sont dans tous les sens possibles, il se fera quelque compensation qui assurera aux inconnues des valeurs plus exactes que les solutions de m équations isolées.

Les combinaisons les plus ordinaires des équations du 1^{er} degré reviennent à les ajouter après les avoir multipliées respectivement par des facteurs arbitraires, qui servent à dégager les inconnues en se prêtant à diverses transformations. Appelant $k_{i,h}$ le facteur

destiné à la h^e équation, on obtient une somme d'équations telle que

$$(2)\quad x_1 \text{S.}\, k_{i,h} a_{1,h} + x_2 \text{S.}\, k_{i,h} a_{2,h} + \ldots + x_i \text{S.}\, k_{i,h} a_{i,h} + \ldots = \text{S.}\, k_{i,h}\, \omega_h;$$

et l'on aura immédiatement x_i, si l'on assujettit les n facteurs $k_{i,1}\ k_{i,2} \ldots\ k_{i,n}$ aux conditions ci-après, qui rendent nuls les coefficients de toutes les inconnues, excepté le coefficient de x_i qu'elles réduisent à l'unité :

$$(3)\quad \text{S.}\, a_{1,h} k_{i,h} = a_{1,1} k_{i,1} + a_{1,2} k_{i,2} + \ldots + a_{1,h} k_{i,h} + \ldots + a_{1,n} k_{i,n} = 0,$$

$$\text{S.}\, a_{2,h} k_{i,h} = a_{2,1} k_{i,1} + a_{2,2} k_{i,2} + \ldots + a_{2,h} k_{i,h} + \ldots + a_{2,n} k_{i,n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{S.}\, a_{i',h} k_{i,h} = a_{i',1} k_{i,1} + a_{i',2} k_{i,2} + \ldots + a_{i',h} k_{i,h} + \ldots + a_{i',n} k_{i,n} = 0,$$

$$\text{S.}\, a_{i,h} k_{i,h} = a_{i,1} k_{i,1} + a_{i,2} k_{i,2} + \ldots + a_{i,h} k_{i,h} + \ldots + a_{i,n} k_{i,n} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{S.}\, a_{i,m} k_{i,h} = a_{m,1} k_{i,1} + a_{m,2} k_{i,2} + \ldots + a_{m,h} k_{i,h} + \ldots + a_{m,n} k_{i,n} = 0.$$

Il ne reste alors dans l'équation (2) que

$$x_i = \text{S.}\, \omega_h\, k_{i,h}.$$

Il faut remarquer que les facteurs $k_{i,h}$ étant au nombre de n, ne sont nullement déterminés par les conditions (3); puisque ces conditions ne sont qu'au nombre de m.

En prenant un autre système de n facteurs, qu'on désignerait de même par $k_{1,h}$, on obtiendrait semblablement la valeur de la 1re inconnue x_1; pourvu qu'on astreignît les n facteurs $k_{1,h}$ à m conditions semblables aux conditions (3), qui se rapportent à l'inconnue x_i.

Les m inconnues seront donc fournies par m systèmes de n facteurs, déterminés en partie par m systèmes de conditions tout à fait semblables, et en nombre m pour chaque élément inconnu. Comme les facteurs d'un système n'entrent pas dans les autres, les m^2 conditions ne détermineront qu'un nombre égal de facteurs, sur les mn employés; et $n - m$ seront indépendants dans chaque système.

C'est de ces facteurs restés arbitraires qu'on disposera pour rendre les valeurs $x_i = \text{S. } \omega_h \, k_{i,h}$ le plus exactes possible. Et c'est ce pour quoi il faut nécessairement recourir au calcul des probabilités, sous quelque forme qu'on le déguise.

Effectivement, la valeur des coefficients $k_{i,h}$ quelle qu'on voulût la fixer, ne modifierait en rien la valeur trouvée pour x_i en fonction de ces arbitraires, si les équations étaient rigoureusement exactes. Mais, puisqu'il s'attache toujours quelque erreur plus ou moins grande au résultat d'une observation, il faudrait, pour avoir des équations rigoureuses, retrancher de toutes les quantités ω_h les erreurs respectives ε_h dont elles sont affectées. On ne le peut pas, et la somme

$$x_i = \text{S. } \omega_h \, k_{i,h},$$

reste affectée, par suite, d'une erreur

$$r_i = \text{S. } \varepsilon_h \, k_{i,h}.$$

La grandeur de cette erreur dépendra, on le voit, du choix des coefficients k, et en même temps de la loi de probabilité des erreurs possibles, qui aura régné dans le cours des observations.

Il y aurait à faire plus d'une remarque sur ce qu'on doit entendre par cette loi de probabilité, et sur les moyens de suppléer à l'ignorance où l'observateur se trouve souvent à ce sujet. Mais il faut se borner ici au point unique en discussion. La loi des erreurs ε_h sera supposée connue.

Chacune des valeurs trouvées pour les inconnues x_1, $x_2 \ldots x_m$. sera entachée d'une erreur r_1, $r_2 \ldots r_m$, respectivement, qui se présentera sous la forme qui vient d'être assignée à l'erreur r_i de l'élément x_i:

$$(4) \qquad \begin{aligned} r_1 &= \text{S. } \varepsilon_h \, k_{1,h}, \\ r_2 &= \text{S. } \varepsilon_h \, k_{2,h}, \\ r_3 &= \text{S. } \varepsilon_h \, k_{3,h}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ r_m &= \text{S. } \varepsilon_h \, k_{m,h}. \end{aligned}$$

La grandeur de chacune de ces erreurs résultera de ce qu'il s'est présenté pendant les observations un système d'erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_h \ldots \varepsilon_n$, plutôt qu'un autre, et l'on voit que toutes les erreurs r seront modifiées à la fois par les changements que pourra subir le système des erreurs ε. Chacune des erreurs ε est inconnue, mais si la loi en est connue, c'est-à-dire si l'on sait qu'à une erreur ε répond une certaine probabilité, la probabilité d'un système donné $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m$, d'erreurs dans l'ensemble des observations, sera aussi connue, et égale au produit des probabilités de chacune.

Ce produit sera donc la probabilité du système (4) des erreurs $r_1, r_2 \ldots r_m$, puisque celles-ci sont déterminées toutes, dès que les erreurs ε_h de chaque observation reçoivent des valeurs données.

Désignant par $\varphi\varepsilon$ la fonction qui exprime la probabilité de l'erreur a, de sorte que $\varphi\varepsilon\, d\varepsilon$ soit cette probabilité infiniment petite, on aura, entre les limites dans lesquelles les erreurs peuvent s'étendre,

$$\int \varphi\varepsilon\, d\varepsilon = 1,$$

puisque c'est la somme des probabilités de tous les cas possibles. De plus, si l'on appelle μ_ζ la moyenne des puissances ζ de toutes les erreurs possibles, on aura

$$\int \varepsilon^\zeta\, d\varepsilon\, \varphi\varepsilon = \mu_\zeta.$$

Par exemple, la moyenne de toutes les erreurs possibles s'exprimera par $\mu_1 = \int \varepsilon\, d\varepsilon\, \varphi\varepsilon$; la moyenne de leurs carrés par $\mu_2 = \int \varepsilon^2\, d\varepsilon\, \varphi\varepsilon$, etc.

La probabilité d'un système de valeurs $r_1, r_2 \ldots r_m$, étant la probabilité de l'ensemble des valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, dont elles se composent, s'exprimera par le produit

$$\varphi\varepsilon_1\, d\varepsilon_1 \times \varphi\varepsilon_2\, d\varepsilon_2 \times \varphi\varepsilon_3\, d\varepsilon_3 \times \ldots \times \varphi\varepsilon_n\, d\varepsilon_n.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les systèmes de valeurs des quantités r_i pour lesquels ce produit est le plus grand, et en dehors

des limites desquels il devient, dès lors, très-peu probable que ces quantités puissent se trouver. L'on y parviendra, évidemment, si l'on emploie le procédé de Laplace, qui consiste à le multiplier par une fonction des erreurs $r_1, r_2 \ldots r_m$, et de leurs composantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, telle que l'intégration subséquente, prise dans toute l'étendue de la probabilité, ne laisse subsister que la somme des valeurs correspondantes à certaines grandeurs données des r_1, $r_2 \ldots r_m$. Ce procédé, dont Laplace a tant répété l'emploi sans en varier la forme, est au fond le même que Fourier et, plus récemment, M. Lejeune-Dirichlet ont reproduit d'une autre manière et avec un si grand succès. En suivant Laplace, au lieu de former d'abord la fonction limitative nécessaire, on considérera le produit

$$\begin{aligned} P = {}_m\!\int & d\varepsilon_1 \varphi\,\varepsilon_1 \times d\varepsilon_2 \varphi\,\varepsilon_2 \times \ldots \times d\varepsilon_h \varphi\,\varepsilon_h \times \ldots \times d\varepsilon_n \varphi\,\varepsilon_n \\ & \times e^{\alpha_1 \sqrt{-1}\,(\varepsilon_1 k_{1,1} + \varepsilon_2 k_{1,2} + \varepsilon_3 k_{1,3} + \ldots + \varepsilon_n k_{1,n})} \\ & \times e^{\alpha_2 \sqrt{-1}\,(\varepsilon_1 k_{2,1} + \varepsilon_2 k_{2,2} + \varepsilon_3 k_{2,3} + \ldots + \varepsilon_n k_{2,n})} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times e^{\alpha_i \sqrt{-1}\,(\varepsilon_1 k_{i,1} + \varepsilon_2 k_{i,2} + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon_n k_{i,n})} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times e^{\alpha_m \sqrt{-1}\,(\varepsilon_1 k_{m,1} + \varepsilon_2 k_{m,2} + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon_n k_{m,n})}, \end{aligned}$$

qui contient en exposant les erreurs des m inconnues

$$r_i = \varepsilon_1 k_{i,1} + \varepsilon_2 k_{i,2} + \ldots + \varepsilon_n k_{i,n} = \mathrm{S}\,\varepsilon_h k_{i,h},$$

multipliées chacune par un argument spécial α_i, qui puisse permettre de la distinguer après l'intégration multiple, prise pour toute l'étendue dans laquelle les erreurs ε sont possibles. Si, après cette intégration relative aux ε, on veut se rendre compte du produit P, il faudra se le représenter comme n'étant plus fonction que des r, et sous la forme

$$P = {}_m\!\int dr_1\, dr_2 \ldots dr_m\, \Phi(r_1, r_2 \ldots r_m)\, e^{r_1\alpha_1\sqrt{-1} + r_2\alpha_2\sqrt{-1} + \ldots + r_m\alpha_m\sqrt{-1}}$$

expression dans laquelle la fonction Φ sera telle, qu'elle réunira les

probabilités relatives à des valeurs égales du système des erreurs r. C'est réellement cette fonction, multipliée par le produit différentiel dr_1, dr_2..... dr_m, qui est la probabilité de ce système d'erreurs, et, si on la connaissait, il n'y aurait plus qu'à intégrer dans des limites convenables pour obtenir la probabilité cherchée. Pour déterminer la fonction Φ, il suffit de multiplier P successivement par une série de m intégrales de la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_i\, e^{-r_i\alpha_i\sqrt{-1}}.$$

Car on sait que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_i\, e^{-r_i\alpha_i\sqrt{-1}}\int da\,\Phi(a)\, e^{\alpha_i a\sqrt{-1}} = \Phi(r_i).$$

Si donc on répète cette opération, presque mécanique, pour tous les arguments α_i et les erreurs r_i, en nombre m, on obtiendra la loi de probabilité de ces erreurs. Ce sera le résultat Q que voici :

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{m}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m\, e^{-r_1\alpha_1\sqrt{-1}-r_2\alpha_2\sqrt{-1}-\ldots-r_m\alpha_m\sqrt{-1}} \times \mathrm{P}.$$

Partant Q dr_1, dr_2..... dr_m sera la probabilité du système r_1, r_2..... r_m, des erreurs des inconnues x_1, x_2..... x_m, et intégrant entre les limites qui renferment les grandeurs de ces erreurs dont on voudra connaître la probabilité commune, on obtiendra finalement cette probabilité, qui sera :

$$p = \int_{m} dr_1\, dr_2 \ldots dr_m\, \mathrm{Q}.$$

On peut aisément reconnaître, si l'on veut, la composition de la fonction limitative qui n'a été introduite que successivement,

et il serait superflu de s'y arrêter. Il reste à poursuivre ces intégrations successives.

A cet effet, on modifie le produit P en réunissant dans l'exposant tous les termes qui se rapportent à une même observation, et séparant les intégrales relatives aux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, on a

$$\begin{aligned}
P = &\int d\varepsilon_1 \varphi\varepsilon_1 e^{\varepsilon_1(\alpha_1 k_{1,1} + \alpha_2 k_{2,1} + \alpha_3 k_{3,1} + \ldots + \alpha_m k_{m,1})\sqrt{-1}} \\
&\times \int d\varepsilon_2 \varphi\varepsilon_2 e^{\varepsilon_2(\alpha_1 k_{1,2} + \alpha_2 k_{2,2} + \alpha_3 k_{3,2} + \ldots + \alpha_m k_{m,2})\sqrt{-1}} \\
&\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots &\times \int d\varepsilon_h \varphi\varepsilon_h e^{\varepsilon_h(\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \alpha_3 k_{3,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h})\sqrt{-1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots &\times \int d\varepsilon_n \varphi\varepsilon_n e^{\varepsilon_n(\alpha_1 k_{1,n} + \alpha_2 k_{2,n} + \alpha_3 k_{3,n} + \ldots + \alpha_m k_{m,n})\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

Isolant une de ces n intégrales, on peut l'écrire

$$\int d\varepsilon_h \varphi\varepsilon_h e^{\varepsilon_h \sqrt{-1}\,\Sigma \alpha_i k_{i,h}},$$

et même, afin d'abréger, on peut représenter $\Sigma \alpha_i k_{i,h}$, somme composée de m termes, par S, au moins provisoirement; on peut aussi supprimer l'indice h de ε, qui n'a été employé que pour la clarté. On aura, en développant l'exponentielle

$$\begin{aligned}
\int d\varepsilon \varphi\varepsilon e^{\varepsilon S_h\sqrt{-1}} = \int d\varepsilon \varphi\varepsilon \Big(1 &+ \varepsilon S_h\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon^2 S_h^2}{2} - \frac{\varepsilon^3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} \\
&+ \frac{\varepsilon^4 S_h^4}{24} + \text{etc.}\Big),
\end{aligned}$$

et en intégrant relativement à ε, qui est partout explicite, on aura

$$1 + \mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{\mu_2 S_h^2}{2} - \frac{\mu_3 S_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_4 S_h^4}{24} + \text{etc.}$$

à cause de $\int d\varepsilon \varphi e = 1$, et $\int \varepsilon^\xi d\varepsilon \varphi\varepsilon = \mu_\xi$.

On pourra ensuite rétablir cette suite en exponentielle, ce qui donne

$$e^{\mu_1 S_h \sqrt{-1} - \frac{S^2_h}{2}(\mu_2 - \mu^2_1) - \frac{S^3_h}{2}(\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu^3_1)\sqrt{-1} + \frac{S^4_h}{24}(\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu^2_2 + 12\mu_2\mu^2_1 - 6\mu^4_1) + \text{etc.}}$$

Rien ne serait plus facile, on le voit, que de supposer la loi de probabilité $\varphi\,\varepsilon$ variable d'une observation à l'autre, et de conserver cette distinction dans le reste des calculs. Mais on reconnaîtra bientôt que la méthode des moindres carrés repose sur cette hypothèse, que les moyennes μ_1 et μ_2, des erreurs ε possibles et de leurs carrés, ne varient pas d'une observation à l'autre : de sorte que la variation de la loi de probabilité, réduite aux moyennes des puissances supérieures, aurait peu d'intérêt dans la question actuelle. Il n'en sera donc point tenu compte.

Dans cette hypothèse, le produit P étant formé d'intégrales toutes semblables se présentera sous la forme :

$$P = e^{\mu_1(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu^2_1}{2}(S^2_1 + S^2_2 \ldots + S^2_n) - \text{etc.}}$$

les 3^e et 4^e termes de l'exposant étant de même

$$- \frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu^3_1}{6}(S^3_1 + S^3_2 + \ldots + S^3_n)\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu^2_2 + 12\mu_2\mu^2_1 - 6\mu^4_1}{24}(S^4_1 + S^4_2 + \ldots + S^4_n).$$

Si l'on examine à présent chacune des suites qui entrent dans les différents termes, on verra sans peine que chaque variable α_i est multipliée dans l'une d'elles par tous les facteurs $k_{i,h}$ correspondant à la même inconnue x_i ou à la même erreur r_i. Ils pourront donc être réunis sous des formes symétriques, et, pour plus de clarté, il sera loisible d'attribuer aux sommes qui comprennent

n termes le signe S plus spécialement, et à celles qui n'en renfermeront que m, le signe Σ. On peut observer que les premières sont celles où l'ordre des observations, en nombre n, amène autant de lettres différentes; et que les secondes sont celles qui, dépendant de l'ordre des inconnues x_i, en nombre m, ne sauraient comprendre que ce dernier nombre de lettres.

On a ainsi, comme précédemment,

$$S_h = \alpha_1 k_{1,h} + a_2 k_{2,h} + \ldots + \alpha_i k_{i,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h} = \Sigma\, \alpha_i k_{i,h},$$

où la somme Σ est relative à l'indice i, qui lui-même ne varie que de 1 à m, nombre des inconnues. Il en résulte pour la somme des premières puissances des S_h,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_h + \ldots + S_n = \Sigma\, \alpha_i k_{i,1} + \Sigma\, \alpha_i k_{i,2} + \ldots + \Sigma\, \alpha_i k_{i,h} + \ldots \Sigma\, \alpha_i k_{i,n},$$

qu'on pourrait écrire $S(\Sigma\, \alpha_i k_{i,h})$, la somme finie S se rapportant à l'indice h.

Il est bien aisé de voir que

$$\begin{aligned} S(\Sigma\, \alpha_i k_{i,h}) &= \Sigma\, \alpha_i (k_{i,1} + k_{i,2} + \ldots + k_{i,h} + \ldots + k_{i,n}) \\ &= \alpha_1 S k_{1,h} + \alpha_2 S k_{2,h} + \ldots + \alpha_m S k_{m,h} \\ &= \Sigma\, (\alpha_i S k_{i,h}). \end{aligned}$$

De même, à cause de

$$\begin{aligned} S^2_h &= (\alpha_1 k_{1,h} + \alpha_2 k_{2,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h})^2 = (\Sigma\, \alpha_i k_{i,h})^2 \\ &= \alpha^2_1 k^2_{1,h} + \alpha^2_2 k^2_{2,h} + \ldots + \alpha^2_m k^2_{m,h} \\ &+ 2\, \alpha_1 k_{1,h} (\alpha_2 k_{2,h} + \alpha_3 k_{3,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h}) \\ &+ 2\, \alpha_2 k_{2,h} (\alpha_3 k_{3,h} + \ldots + \alpha_m k_{m,h}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ 2\, \alpha_{m-1} k_{m-1,h} \times \alpha_m k_{m,h}, \end{aligned}$$

on a

$$
\begin{aligned}
&S^2_1 + S^2_2 + \ldots + S^2_h + \ldots + S^2_n = \\
&\quad \alpha^2_1 (k^2_{1,1} + k^2_{1,2} + k^2_{1,3} + \ldots + k^2_{1,h} + \ldots + k^2_{1,n}) \\
&+ \alpha^2_2 (k^2_{2,1} + k^2_{2,2} + k^2_{2,3} + \ldots + k^2_{2,h} + \ldots + k^2_{2,n}) \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ \alpha^2_m (k^2_{m,1} + k^2_{m,2} + \ldots + k^2_{m,h} + \ldots + k^2_{m,n}) \\
&+ 2\,\alpha_1\,\alpha_2 (k_{1,1}\,k_{2,1} + k_{1,2}\,k_{2,2} + \ldots + k_{1,h}\,k_{2,h} + \ldots + k_{1,n}\,k_{2,n}) \\
&+ 2\,\alpha_1\,\alpha_3 (k_{1,1}\,k_{3,1} + k_{1,2}\,k_{3,2} + \ldots + k_{1,h}\,k_{3,h} + \ldots + k_{1,n}\,k_{3,n}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 2\,\alpha_i\,\alpha_{i'} (k_{i,1}\,k_{i',1} + k_{i,2}\,k_{i',2} + \ldots + k_{i,h}\,k_{i',h} + \ldots + k_{i,n}\,k_{i',n}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 2\,\alpha_{m-1}\,\alpha_m (k_{m-1,1}\,k_{m,1} + \ldots + k_{m-1,h}\,k_{m,h} + \ldots + k_{m-1,n}\,k_{m,n}),
\end{aligned}
$$

ou, en abrégeant,

$$
\begin{aligned}
= {} & \alpha^2_1\,S\,k^2_{1,h} + \alpha^2_2\,S\,k^2_{2,h} + \alpha^2_3\,S\,k^2_{3,h} + \ldots + \alpha^2_m\,S\,k^2_{m,h} \\
& + 2\,\alpha_1 (\alpha_2\,S\,k_{1,h}\,k_{2,h} + \alpha_3\,S\,k_{1,h}\,k_{3,h} + \ldots + \alpha_m\,S\,k_{1,h}\,k_{m,h}) \\
& + 2\,\alpha_2 (\alpha_3\,S\,k_{2,h}\,k_{3,h} + \ldots + \alpha_m\,S\,k_{2,h}\,k_{m,h}) \\
& + \ldots\ldots \\
& + 2\,\alpha_{m-1}\,\alpha_m\,S\,k_{m-1,h}\,k_{m,h}.
\end{aligned}
$$

Ici les sommes de produits ont pu être aussi facilement désignées que les sommes de puissances, puisqu'il n'y a dans chaque somme qu'une seule variable. On abrégerait encore davantage en écrivant

$$\Sigma (\alpha^2_i\,S\,k^2_{i,h}) + 2\,\Sigma (\alpha_i\,\alpha_{i'}\,S\,k_{i,h}\,k_{i',h}),$$

en ayant soin, pour former la seconde somme Σ, de ne prendre les indices i et i' que sous la condition $i < i'$; ou bien d'effacer le coefficient 2 qui la précède.

Passant aux S'_h, il est visible que, suivant des remarques analogues,

$$
\begin{aligned}
&S^3_1 + S^3_2 \ldots + S^3_h + \ldots + S^3_n \\
&= \alpha^3_1 S\, k^3_{1,h} + \alpha^3_2 S\, k^3_{2,h} + \ldots + \alpha^3_m S\, k^3_{m,h} \\
&\quad + 3\,\alpha^2_1 (\alpha_2 S\, k^2_{1,h} k_{2,h} + \alpha_3 S\, k^2_{1,h} k_{3,h} + \ldots + \alpha_m S\, k^2_{1,h} k_{m,h}) \\
&\quad + 3\,\alpha^2_2 (\alpha_1 S\, k^2_{2,h} k_{1,h} + \alpha_3 S\, k^2_{2,h} k_{3,h} + \ldots + \alpha_m S\, k^2_{2,h} k_{m,h}) \\
&\quad + \ldots\ldots \\
&\quad + 6\,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 S\, k_{1,h} k_{2,h} k_{3,h} + \ldots + 6\,\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} S\, k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + 6\,\alpha_{m-2} \alpha_{m-1} \alpha_m S\, k_{m-2,h} k_{m-1,h} k_{m,h} \\
&= \Sigma (\alpha^3_i S\, k^3_{i,h}) + 3\,\Sigma (\alpha^2_i \alpha_{i'} S\, k^2_{i,h} k_{i',h}) + 6\,\Sigma (\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} S\, k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}).
\end{aligned}
$$

Il est presque inutile de dire qu'il faut entendre par les sommes Σ relatives aux indices i, lorsqu'elles s'appliquent aux produits, toutes les combinaisons possibles, sans double emploi.

Arrivant enfin aux S^4_h, on aura, absolument de la même manière :

$$
\begin{aligned}
&S^4_1 + S^4_2 + \ldots + S^4_h + \ldots + S^4_m = S\,(\Sigma\, \alpha_i\, k_{i,h})^4 \\
&= S\,(\Sigma\, \alpha^4_i\, k^4_{i,h} + 4\,\Sigma\, \alpha^3_i\, \alpha_{i'}\, k^3_{i,h}\, k_{i',h} + 6\,\Sigma\, \alpha^2_i\, \alpha^2_{i'}\, k^2_{i,h}\, k^2_{i',h} \\
&\qquad + 12\,\Sigma\, \alpha^2_i\, \alpha_{i'}\, \alpha_{i''}\, k^2_{i,h}\, k_{i',h}\, k_{i'',h} \\
&\qquad + 24\,\Sigma\, \alpha_i\, \alpha_{i'}\, \alpha_{i''}\, \alpha_{i'''}\, k_{i,h}\, k_{i',h}\, k_{i'',h}\, k_{i''',h}). \\
&= \Sigma\,(\alpha^4_i S\, k^4_{i,h}) + 4\,\Sigma\,(\alpha^3_i\, \alpha_{i'} S\, k^3_{i,h} k_{i',h}) + 6\,\Sigma\,(\alpha^2_i\, \alpha^2_{i'} S\, k^2_{i,h} k^2_{i',h}) \\
&\qquad + 12\,\Sigma\,(\alpha^2_i\, \alpha_{i'}\, \alpha_{i''} S\, k^2_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h}) \\
&\qquad + 24\,\Sigma\,(\alpha_i\, \alpha_{i'}\, \alpha_{i''}\, \alpha_{i'''} S\, k_{i,h} k_{i',h} k_{i'',h} k_{i''',h}).
\end{aligned}
$$

Il était utile de montrer les formes des 3e et 4e termes de l'exposant, afin qu'on pût reconnaître pour quels motifs, très-différents, ils sont négligés dans les applications.

En désignant par T_1, T_2, T_3, T_4 les termes de l'exposant de e, qui viennent d'être développés, le produit P peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
P &= e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{1}{2}T_2 - \frac{1}{6}T_3\sqrt{-1} + \frac{1}{24}T_4} \\
&= e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{1}{2}T_2} \left\{ 1 - \frac{1}{6}\,T_3\sqrt{-1} + \frac{1}{14}\,T_4 + \text{etc.} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{7^2}\,T^2_3 + \text{etc.} \right\}.
\end{aligned}
$$

en s'arrêtant aux termes du 4e degré en α_i, comme précédemment. Il ne restera donc plus à intégrer que relativement à ces variables, pour obtenir la fonction Q, qui se présente sous la forme

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m \, e^{-r_1\alpha_1\sqrt{-1} - r_2\alpha_2\sqrt{-1} \ldots - r_m\alpha_m\sqrt{-1}} \times P$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m \, e^{-\Sigma r_i\alpha_i\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,\mu_1(\Sigma\alpha_i S k_{i,h}) - \frac{1}{2}T_2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} T_3 + \text{etc.} \right\}.$$

Il est visible que les premières puissances de α peuvent se mettre en facteur commun, et que l'exposant de e est égal à

$$-\alpha_1\sqrt{-1}\,(r_1 - \mu_1 S k_{1,h}) - \alpha_2\sqrt{-1}\,(r_2 - \mu_1 S k_{2,h}) - \ldots$$
$$-\alpha_m\sqrt{-1}\,(r_m - \mu_1 S k_{m,h}) - \frac{1}{2}T_2.$$

Laplace et plusieurs autres géomètres ont supposé la moyenne μ_i réduite à zéro. Mais cette condition simplifie très-peu les calculs, et elle oblige, en quelque sorte, à les recommencer quand cette moyenne ne peut être considérée comme nulle. On allègue, à la vérité, que, dans un système d'observations bien dirigées, cette moyenne μ_1, qui est une véritable erreur constante, a dû être reconnue et retranchée des valeurs observées. N'est-il pas possible au contraire qu'on ne fasse les observations que pour déterminer les erreurs constantes, et qu'on doive conserver μ_1 qui est alors la chose cherchée. Ici, pour conserver la facilité de reprendre cette moyenne, bien que la recherche de sa valeur, d'après les observations mêmes, ne doive pas faire un sujet d'examen, il suffira de réduire à une seule lettre les termes de la forme $r_i - \mu_1 S k_{i,h}$. On introduira ainsi, au lieu des erreurs r, d'autres quantités qui n'en différeront que de quantités constantes. On peut écrire, par exemple

$$(1) \qquad r_i - \mu_1 S k_{i,h} = \rho_i \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)};$$

de sorte qu'une erreur r_i se calculera par la relation

$$r_i = \mu_1 \, S \, k_{i,h} + \rho_i \sqrt{2 \, (\mu_2 - \mu_1^2)};$$

et

$$dr_i = d \, \rho_i \sqrt{2 \, (\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

De cette manière, on voit que

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m \, e^{-\sqrt{-1}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}\,\Sigma \rho_i \alpha_i - \frac{1}{2} T_2} \left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} T_3 + \text{etc.}\right).$$

Si l'on fait subir aux α_i un changement analogue, c'est-à-dire qu'on pose

$$\alpha_i = z_i \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}}, \quad d\alpha_i = \frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}},$$

il en résultera

$$dr_i \, d\alpha_i = d\rho_i \sqrt{2 \, (\mu_2 - \mu_1^2)} \times \frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)}} = 2 \, d\rho_i \, dz_i;$$

de plus le facteur $\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2)$ disparaîtra du terme $\frac{1}{2} T_2$; de sorte que la probabilité du système d'erreurs désignées par ρ_i, ou par

$$r_i = \mu_1 \, S \, k_{i,h} + \rho_i \sqrt{2 \, (\mu_2 - \mu_1^2)},$$

qui est égale à

$$p = \int dr_1 \, dr_2 \ldots dr_m \, Q,$$

se calculera par la formule

$$p = \frac{1}{\pi^m} \int d\rho_1 \, d\rho_2 \ldots d\rho_m \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \, dz_2 \ldots dz_m \, e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma \rho_i z_i - Z_2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \frac{1}{24} Z_4 + \frac{1}{72} Z_5\right),$$

en écrivant Z_2, Z_3, Z_4, pour abréger au lieu des termes suivants que donne le changement des α_i en $\frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu^2_1)}}$. On avait

$$\frac{1}{2} T_2 = \frac{\mu_2 - \mu^2_1}{2} \left\{ \Sigma (\alpha^2_i \, S \, k^2_{i,h}) + 2 \Sigma (\alpha_i \alpha_{i'} \, S \, k_{i,h} \, k_{i',h}) \right\},$$

et l'on aura plus simplement :

$$Z_2 = \Sigma (z^2_i \, S \, k^2_{i,h}) + 2 \Sigma (z_i \, z_{i'} \, S \, k_{i,h} \, k_{i',h}).$$

De même

$$(6) \quad Z_3 = 2 \frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + \mu^3_1}{(\mu_2 - \mu^2_1)^{\frac{3}{2}}} \{ \Sigma (z^3_i \, S \, k^3_{i,h}) + 3 \Sigma (z^2_i \, z_{i'} \, S \, k^2_{i,h} \, k_{i',h}) + 6 \Sigma (z_i \, z_{i'} \, z_{i''} \, S \, k_{i,h} \, k_{i',h} \, k_{i'',h}) \}$$

$$Z_4 = 4 \frac{\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu^2_2 + 12\mu_2\mu^2_1 - 6\mu^4_1}{(\mu_2 - \mu^2_1)^2} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (z^4_i \, S \, k^4_{i,h}) + 4 \Sigma (z^3_i \, z_{i'} \, S \, k^3_{i,h} \, k_{i',h}) \\ + \; 6 \Sigma (z^2_i \, z^2_{i'} \, S \, k^2_{i,h} \, k^2_{i',h}) \\ + 12 \Sigma (z^2_i \, z_{i'} \, z_{i''} \, S \, k^2_{i,h} \, k_{i',h} \, k_{i'',h}) \\ + 24 \Sigma (z_i \, z_{i'} \, z_{i''} \, z_{i'''} \, S \, k_{i,h} \, k_{i',h} \, k_{i'',h} \, k_{i''',h}) \end{array} \right\}.$$

Il est bien aisé de remarquer que les sommes désignées par S contenant n termes seront de la forme n M, M étant une valeur commune de ces termes. De sorte qu'il suffira, pour rendre très-petites les parties qui les contiennent, de donner aux variables z des dénominateurs dans lesquels se trouve n à une puissance supérieure à la première, et une valeur commune M à peu près équivalente. On sait que c'est là ce qui arrive dans l'analyse de Laplace.

Pour abréger encore l'écriture de l'exposant de e, et pouvoir le développer, on pourra mettre indifféremment

$$b_{i,i'} = S \, k_{i,h} \, k_{i',h} = b_{i',i},$$

ce qui entraîne $b_{i,i} = S \, k^2_{i,h}$.

De cette manière l'exposant sera

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & -2\rho_1 z_1\sqrt{-1} - 2\rho_2 z_2\sqrt{-1} - \ldots - 2\rho_i z_i\sqrt{-1} - \ldots \\
& \quad - 2\rho_m z_m\sqrt{-1} \\
& - z_1^2 b_{1,1} - 2z_1(z_2 b_{1,2} + z_3 b_{1,3} + \ldots + z_i b_{1,i} + \ldots + z_m b_{1,m}) \\
& \quad - z_2^2 b_{2,2} - 2z_2(z_3 b_{2,3} + \ldots + z_i b_{2,i} + \ldots + z_m b_{2,m}) \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad\quad - z_i^2 b_{i,i} - 2z_i(z_{i+1} b_{i,i+1} + \ldots + z_m b_{i,m}) \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \quad\quad\quad + z_m^2 b_{m,m}.
\end{aligned}
$$

Si maintenant on fait à la fois

$$
(8)\quad
\begin{cases}
\zeta_1 = z_1 h_{1,1} + z_2 h_{1,2} + z_3 h_{1,3} + \ldots + z_i h_{1,i} + \ldots + z_m h_{1,m} + t_1\sqrt{-1} \\
\zeta_1 = \quad + z_2 h_{2,2} + z_3 h_{2,3} + \ldots + z_i h_{2,i} + \ldots + z_m h_{2,m} + t_2\sqrt{-1} \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_i = \quad\quad + z_i h_{i,i} + \ldots + z_m h_{i,m} + t_i\sqrt{-1} \\
\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta_m = \quad\quad\quad + z_m h_{m,m} + t_m\sqrt{-1},
\end{cases}
$$

et qu'après avoir élevé au carré chacune des nouvelles variables ζ_i, on en fasse la somme, il ne s'y trouvera que quatre espèces de termes : en z_i^2 dont le coefficient sera

$$h_{1,i} + h_{2,i} + \ldots + h_{i-1,i} + h_{i,i},$$

et contiendra i termes;

en $2 z_i z_{i'}$ dont le coefficient sera de même

$$h_{1,i} h_{1,i'} + h_{2,i} h_{2,i'} + \ldots + h_{i-1,i} h_{i-1,i'} + h_{i,i} h_{i,i'},$$

contenant i termes;

en $-2 z_i\sqrt{-1}$ multiplié par l'expression variable

$$t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \ldots + t_i h_{i,i},$$

contenant encore i termes;

et enfin les m carrés des t_i pris négativement.

Si donc on fait les coefficients des z^2_i égaux à ceux que ces variables ont dans l'exposant de e, et qu'on agisse de même pour les coefficients des doubles produits; ce qui donnera

$$(9)\left\{\begin{array}{l}
b_{1,1} = h^2_{1,1},\ b_{1,2} = h_{1,1}\,h_{1,2},\quad b_{1,3} = h_{1,1}\,h_{1,3},\\
\qquad\qquad b_{2,2} = h^2_{1,2} + h^2_{2,2},\ b_{2,3} = h_{1,2}\,h_{1,3} + h_{2,2}\,h_{2,3},\\
\qquad\qquad\qquad\qquad b_{3,3} = h^2_{1,3} + h^2_{2,3} + h^2_{3,3},\\
b_{1,4} = h_{1,1}\,h_{1,4},\\
b_{2,4} = h_{1,2}\,h_{1,4} + h_{2,2}\,h_{2,4},\\
b_{3,4} = h_{1,3}\,h_{1,4} + h_{2,3}\,h_{2,4} + h_{3,3}\,h_{3,4},\\
b_{4,4} = h^2_{1,4} + h^2_{2,4} + h^2_{3,4} + h^2_{4,4},\\
b_{1,i} = h_{1,1}\,h_{1,i},\\
b_{2,i} = h_{1,2}\,h_{1,i} + h_{2,2}\,h_{2,i},\\
b_{3,i} = h_{1,3}\,h_{1,i} + h_{2,3}\,h_{2,i} + h_{3,3}\,h_{3,i},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_{i,i'} = h_{1,i}\,h_{1,i'} + h_{2,i}\,h_{2,i'} + h_{3,i}\,h_{3,i'} + \dots + h_{i',i'}\,h_{i',i},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_{i,i} = h^2_{1,i} + h^2_{2,i} + h^2_{3,i} + \dots + h^2_{i',i} + \dots + h^2_{i,i},
\end{array}\right.$$

relations dont la loi est facile à saisir; puis qu'on assujettisse les nouvelles variables t_i qui seules multiplient les premières puissances des z_i, aux conditions

$$(10)\left\{\begin{array}{l}
\rho_1 = t_1\;h_{1,1},\\
\rho_2 = t_1\;h_{1,2} + t_2\,h_{2,2},\\
\rho_3 = t_1\;h_{1,3} + t_2\,h_{2,3} + t_3\,h_{3,3},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho_i = t_1\,h_{1,i} + t_2\,h_{2,i} + t_3\,h_{3,i} + \dots + t_i\,h_{i,i},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho_m = t_1\,h_{1,m} + t_2\,h_{2,m} + t_3\,h_{3,m} + \dots + t_m\,h_{m,m};
\end{array}\right.$$

il est manifeste que la somme des carrés des variables ζ_i sera, sauf le signe, égale à la fonction des z_i et des ρ_i qui formait l'exposant (7), moins la somme des carrés des variables t_i. Ainsi l'exposant pourra être remplacé par la somme négative des carrés des variables nouvelles ζ_i et t_i.

D'un autre côté, les relations (8) et (10) assurent immédiatement

$$d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_m = dz_1\, dz_2 \ldots dz_m\, h_{1,1}\, h_{2,2} \ldots h_{m,m},$$
$$d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_m = dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, h_{1,1}\, h_{2,2} \ldots h_{m,m},$$

de sorte que

$$d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_m \times dz_1\, dz_2 \ldots dz_m = dt_1\, dt_2 \ldots dt_m \times d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_m.$$

Partant les variables se trouvent complétement séparées dans l'intégrale multiple : les limites des ζ_i restant infinies, comme celles des z_i ou des α_i dont elles dérivent; et l'on obtient la probabilité

$$p = \frac{1}{\pi^m} \int_m dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_m^2}$$
$$\times \int_m^{\infty} d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_m\, e^{-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \ldots - \zeta_m^2} \left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \frac{1}{24} Z_4 - \frac{1}{72} Z_3^2\right).$$

Dans cette nouvelle expression, l'intégrale multiple relative aux ζ s'obtient sans autre peine que d'écrire, attendu les valeurs connues,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, e^{-\zeta^2} = \sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{2i+1}\, d\zeta\, e^{-\zeta^2} = 0;$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^{2i}\, d\zeta\, e^{-\zeta^2} = \frac{1.3.5 \ldots 2i-1}{2.2.2 \ldots 2} \sqrt{\pi}.$$

On aura donc

$$\int_{m}^{\infty} d\zeta_1\, d\zeta_2 \ldots d\zeta_m\, e^{-\zeta_1^2-\zeta_2^2\ldots-\zeta_m^2} = (\sqrt{\pi})^m.$$

Mais, lorsque la fonction sous le signe sera multipliée par les quantités représentées (6) par Z_3 et Z_4 ou par Z^2_3, le résultat sera moins simple. On reconnaît sur-le-champ qu'il ne contiendra que les parties de ces expressions multipliées par des puissances paires de ζ, les puissances impaires disparaissant. Il en ressort que $Z_1\sqrt{-1}$ se changera en une fonction $B_3\cdot(\sqrt{\pi})^m$ des t_i, ne contenant que les puissances 1re, 2e et 3e de ces nouvelles variables; Z_4 deviendra $B_4\,(\sqrt{\pi})^m$ et ne contiendra que les puissances 0, 1re, 2e, 3e, 4e. Enfin, Z^2_3 devenant $B_6\,(\sqrt{\pi})^m$ offrira les puissances 0, 1re, 2e, 3e, 4e, 5e et 6e des t_i. Ces termes ne seront pas développés, uniquement pour abréger.

D'après toutes ces remarques, il reste pour la probabilité

$$p=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^m}\int_{m} dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t^2_1-t^2_2-\ldots-t^2_m}\left(1-\frac{1}{6}B_3+\frac{1}{24}B_4-\frac{1}{72}B_6\right).$$

Une seule difficulté semblerait peut-être entraver cette transformation (si l'on écarte, bien entendu, celles qui tiennent au procédé de Laplace, dont il ne sera pas question ici). La difficulté dont il s'agit, c'est celle qui porterait sur la détermination des arbitraires $h_{i,i'}$, lesquelles ne sont déduites des coefficients $b_{i,i'}$, que par des équations du 2e degré (9), et pourraient devenir imaginaires. Mais c'est là ce qui ne saurait arriver, attendu que la fonction du 2e degré en $z_1, z_2 \ldots z_m$ est une somme de carrés, comme on peut s'en convaincre; et cette forme permet d'y appliquer la marche suivie dans un Mémoire présenté à l'Académie des sciences en 1834 (t. V du *Recueil des savants étrangers*). La transformation successive des variables mettrait en évidence les sommes de carrés qui seules entrent sous les radicaux, et les rendent nécessairement réels.

Ramenée par tout ce qui précède à ne plus contenir que des intégrales de la forme $\int dt\, e^{-t^2} t^n$, rien ne sera plus facile que d'obtenir la probabilité p, lorsque les limites des variables t_i seront déduites, au moyen des relations (10), de celles qu'on voudra assigner aux erreurs ρ_i. Les grandeurs de ces dernières sont arbitraires; mais on voit que la grandeur assignée à l'une d'elles influera sur la forme de toutes les autres, ou tout au moins sur la forme de celles qui la suivent dans l'ordre des relations (10). Si l'on voulait que les variables ρ_i fussent seulement proportionnelles aux termes $t_i\, h_{i,i}$ qui n'entrent qu'une fois dans chacune respectivement, on n'y parviendrait qu'en assignant aux variables t dans l'intégrale p des limites qui dépendraient de ces variables; si bien qu'il ne serait possible d'évaluer p que par des approximations très-pénibles. Mais il existe des combinaisons d'erreurs dont la probabilité peut au contraire s'exprimer sans trop de difficultés.

Ce sont celles pour lesquelles l'exposant de e ne peut prendre que les valeurs inférieures à une certaine constante γ^2. On voit qu'il faut intégrer p dans cette hypothèse pour toutes les valeurs des t_i qui satisfont à la condition

$$t^2_1 + t^2_2 + \ldots + t^2_i + \ldots + t^2_m < \gamma^2.$$

On y parviendra par plusieurs méthodes bien connues. Il pouvait se trouver quelque intérêt, il y a quinze ou vingt ans, lors de la première recherche sur ce sujet, à développer ces procédés. Il suffira aujourd'hui de montrer qu'il n'est besoin que d'intégrations très-simples.

En opérant successivement sur les variables t_i, on aurait à intégrer chacune d'elles entre les limites égales et de signes contraires

$$t_i = \pm \sqrt{\gamma^2 - t^2_1 - t^2_2 - \ldots - t^2_{i-1}}.$$

Or, entre de semblables limites, il est visible que l'intégration re-

lative à la fonction qui a été désignée par B_3 donnera un résultat nul. B_3 provient effectivement de Z_3 où il n'entrait que des produits de degré impair des z_i, et où il n'est resté que les termes affectés de puissances paires des ζ_i, c'est-à-dire ceux qui offrent des puissances impaires des t_i. Ils donneront lieu à des intégrations de la forme

$$\int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2}\, t^{2n+1} = 0.$$

Ainsi tout ce qui est relatif à B_3 disparaîtra.

Quant à B_4 et B_6 ou Z_4, Z_6, il s'y trouvait des produits de puissances paires des t_i et ζ_i, et les puissances impaires étaient affectées de $\sqrt{-1}$; celles-ci feront disparaître les termes imaginaires où elles se rencontrent. Mais les intégrations laisseront subsister tous les termes où il n'entre que des puissances paires. Le résultat ne sera donc pas nul. Seulement tous les termes de ces fonctions acquièrent, par la substitution des valeurs de z_i en fonction des ζ_i et t_i, des diviseurs qui contiennent les carrés des sommes finies des facteurs $k_{i,h}$, lesquels sont au nombre de n dans chaque somme. Ainsi, quand le nombre n des observations sera très-grand, chacun des termes sera de l'ordre très-petit $\frac{1}{n}$. Il serait superflu de s'arrêter sur ce point dans la question présente. On sait assez que c'est là précisément la forme qu'amène l'analyse de Laplace. Il n'y aurait, à le montrer par le calcul même, d'autre difficulté que la longueur de l'écriture de ces expressions assez complexes. Toutefois, il faut faire observer que, quand il y a m éléments ou inconnues, et non une seule, le nombre de ces termes de l'ordre de $\frac{1}{n}$ dépend du nombre m. De sorte que l'ensemble de ces termes n'est que de l'ordre de $\frac{m}{n}$. Il est donc indispensable, puisque l'on néglige constamment cette partie de l'intégrale, de s'assurer que $\frac{n}{m}$ est un grand nombre; assez grand surtout pour

contre-balancer l'influence des puissances de γ qui entrent dans ces termes jusqu'à γ^6. Ce sera donc dans les applications une condition à ne pas oublier, que $\gamma^6 \frac{m}{n}$ reste de l'ordre des quantités qu'on croira pouvoir se permettre de négliger. S'il n'en est pas ainsi, on ne pourrait s'assurer quelque exactitude que pour de petites valeurs de γ; et c'est ce qui n'a pas toujours été fait avec l'attention que ce point mérite.

D'après ces considérations, il ne reste plus à s'occuper que de la formule d'approximation

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_m dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_m^2}.$$

Entre les limites égales et de signes contraires, il est palpable que les valeurs négatives des t_i donnent des résultats égaux à ceux que produisent les valeurs positives. On peut donc doubler le résultat de chaque intégration, ou multiplier l'intégrale ci-dessus par 2^m, et ne faire le calcul que de o aux limites positives. C'est ce qui s'exécute facilement en transformant d'abord l'une des variables, t_m par exemple, au moyen de la relation

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = u^2,$$

$$t_m = \sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2},$$

$$t_m\, dt_m = u\, du,$$

$$dt_m = \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2}};$$

qui entraîne pour les limites de u les valeurs o et γ. L'expression de p se ramène ainsi à

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\, du\, e^{-u^2} \int_{m-1} \frac{dt_1\, dt_2 \ldots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2}};$$

Et, sous cette forme, il suffit de la seule intégrale vraiment élémentaire

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\, t^{\eta} (a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = a^{\eta + \frac{\delta+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\eta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2} + 1\right)}{2\,\Gamma\left(\eta + 1 + \frac{\delta+1}{2}\right)},$$

pour réduire l'intégrale multiple. Les fonctions Γ n'ont ici pour objet que d'abréger l'écriture. La formule qui les contient est proprement celle qui sert à réduire les termes contenus dans B_4 et B_6. Il faut y faire $\eta = 0$, pour l'appliquer à la valeur approximative de p. Elle devient, dans ce cas particulier :

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\, (a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{\frac{\delta+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2} + 1\right)},$$

Employant $(m - 1)$ fois cette expression, en ayant soin de donner successivement à a les valeurs $(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_i^2)$, qui résultent de la disparition d'une des variables t_i à chaque opération, on obtiendra :

$$m-1 \int \frac{dt_1\, dt_2 \ldots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots t_{m-1}^2}} = u^{m-2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \times \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \times \ldots \times \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = u^{m-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Substituant dans p, il en résulte :

$$p = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\gamma} u^{m-1}\, du\, e^{-u^2}.$$

Ce résidu fort simple reçoit deux formes très-différentes selon que le nombre m des éléments ou des inconnues est pair ou impair. Il est très-digne de remarque qu'au point de vue du calcul numérique la probabilité soit plus simplement exprimée quand il

se présente un nombre pair d'inconnues, que lors même qu'il s'agit d'une seule.

On sait, effectivement, que

$$\int_0^\gamma u^{m-1}\,du\,e^{-u^2} = -\gamma^{m-2}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} - \frac{m-2}{2}\gamma^{m-4}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} - \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\gamma^{m-6}\frac{e^{-\gamma^2}}{2}$$
$$- \ldots - \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\ldots\frac{m-2i}{2}\gamma^{m-2i-2}\frac{e^{-\gamma^2}}{2}$$
$$+ \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\ldots\frac{m-2i}{2}\cdot\frac{m-2i-2}{2}\int_0^\gamma u^{m-2i-3}\,du\,e^{-u^2}.$$

De sorte que, pour $m = 2g$,

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du\,e^{-u^2} = \left(-\gamma^{2g-2} - \frac{2g-2}{2}\gamma^{2g-4} - \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdot\gamma^{2g-6} - \right.$$
$$\left. - \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\ldots\frac{2}{2}\right)\frac{e^{-\gamma^2}}{2} + \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\ldots\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

qu'on peut écrire :

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du\,e^{-u^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right) - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)e^{-\gamma^2}\left(\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + 1\right);$$

Et, pour $m = 2g-1$,

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}\,du\,e^{-u^2} = \left(-\gamma^{2g-3} - \frac{2g-3}{2}\gamma^{2g-5} - \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\gamma^{2g-7} - \ldots\right.$$
$$\left. - \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\ldots\frac{3}{2}\gamma\right)\frac{e^{-\gamma^2}}{2} + \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\gamma du\,e^{-u^2},$$

qui s'écrira aussi, à cause de $\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right) = \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\ldots\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\int_0^{\gamma} u^{2g-2}\,du\,e^{-u^2} = \Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} du\,e^{-u^2}$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right) e^{-\gamma^2}\left(\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right).$$

On aura donc enfin

$$(11)\quad \begin{cases} p_{2g-1} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\gamma} du\,e^{-u^2} - e^{-\gamma^2}\left(\dfrac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \dfrac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \ldots + \dfrac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \dfrac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right); \\ p_{2g} = 1 - e^{-\gamma^2}\left(\dfrac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \dfrac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \ldots + \dfrac{\gamma^2}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\right). \end{cases}$$

Telles sont donc les expressions approchées de la probabilité que les erreurs ρ_i (10), exprimées en fonctions des variables t_i, ne peuvent pas s'étendre au delà des limites assignées par la condition

$$(12)\qquad t^2_1 + t^2_2 + \ldots t^2_m < \gamma^2.$$

S'il n'y avait que trois variables, on pourrait exprimer cette condition en disant que les points qu'elles déterminent, quand on les regarde comme des coordonnées rectangulaires, ne sortent pas de la sphère de rayon γ. Il sera donc permis par analogie de dire que les variables t_i ne peuvent sortir de l'étendue de la relation analytique

$$t^2_1 + t^2_2 + \ldots + t^2_m = \gamma^2.$$

qui ne permet à aucune d'excéder $\pm\gamma$.

On reconnaît sans doute déjà dans les formes générales de la probabilité (11), combien elle sera différente selon le nombre des éléments; on voit qu'elle diminue pour une même valeur γ, à mesure que le nombre m des éléments s'accroît, et c'est ce qui doit être, conformément aux principes du calcul des probabilités rappelés au commencement de ce travail.

C'était là le but principal qu'il s'agissait d'atteindre; et, jusqu'à certain degré, il serait loisible de s'y arrêter. Car on reconnaît, sans peine, que les coefficients $k_{i,h}$ peuvent être ceux que donne la méthode des moindres carrés, puisque ceux-ci satisfont aux conditions peu nombreuses (3), qui seules sont imposées à ces facteurs $k_{i,h}$, pour qu'il en résulte des valeurs des inconnues.

Mais comme les expressions des erreurs de ces éléments sont ici différentes de celles qui se trouvent répandues dans plusieurs ouvrages depuis les théories de Gauss et de Laplace, on se demanderait, sans doute, si les résultats de l'analyse précédente rendent, ou non, nécessaires les facteurs $k_{i,h}$ particuliers à la méthode des moindres carrés. Il semble donc indispensable de prouver que, sous les conditions posées, la valeur de la probabilité, ou plutôt les expressions des erreurs dans lesquelles toutes les difficultés de la question sont réunies, puisque la probabilité n'est qu'une pure constante qu'on peut calculer d'avance, et dont on a des tables auxquelles il ne s'agit que d'appliquer des erreurs de grandeur donnée, il semble donc indispensable, dis-je, de prouver que les erreurs ne seront les plus petites possibles que quand on emploiera à l'élimination des inconnues les facteurs $k_{i,h}$ assignés par la méthode des moindres carrés. On verra alors clairement que l'omission commise sur la valeur de la probabilité des erreurs n'altérait que cette probabilité, et que la modification qui la répare, formules (11) et (10), n'apporte aucun changement au mode d'élimination prescrit par la méthode. C'est ce qui va être fait, avant de procéder à quelques applications numériques.

Mais, dès à présent, il convient de le redire, les formules (11) et (10) réparent complétement l'omission. On reconnaît, de plus, qu'elles s'appliquent à tous les systèmes d'élimination au moyen de facteurs, ou de combinaisons linéaires des équations données par l'observation. Elles permettent ainsi de calculer l'erreur et la probabilité dans nombre de cas où l'on ne veut pas prendre toutes les peines qu'exige la méthode des moindres carrés.

Elles renferment, effectivement, le calcul de la probabilité

d'un système de fonctions linéaires r_i (4) d'erreurs ε_h soumises à une loi de probabilité $\varphi(\varepsilon)$, quelle que soit l'origine de ces fonctions, et quelles que puissent être les déterminations des facteurs $k_{i,h}$. Ces formules offrent donc la solution d'une classe assez étendue de problèmes, dans lesquels la coexistence de plusieurs fonctions est nécessaire, et où l'on ne saurait dès lors avoir en vue que la probabilité de leur ensemble. Il est d'ailleurs assez digne de remarque que les expressions de la probabilité soient les mêmes que si les fonctions r_i ou ρ_i étaient indépendantes, et qu'il ne se fût agi que de faire le produit de leurs probabilités particulières, puis d'en déterminer la valeur sous la condition (12); il est bien entendu que, dans ce cas, les relations (10) ne subsisteraient pas. Mais il faut s'arrêter dans ces indications, et revenir à la méthode des moindres carrés.

§ III.

Il s'agit de rechercher quelle sont les valeurs des facteurs arbitraires $k_{i,h}$ qui donneront les plus étroites limites aux erreurs ρ_i pour une probabilité déterminée par la constante γ. La question ne saurait se résoudre sans la connaissance de l'étendue des valeurs que peut prendre une erreur ρ_i, dépendant des t_i selon les formules (10), quand les variables t_i sont soumises à la condition (12),

$$t^2_1 + t^2_2 + \ldots + t^2_m < \gamma^2.$$

Qu'on suppose d'abord les variables t_i liées par la relation

$$t^2_1 + t^2_2 + \ldots + t^2_m = u,$$

et qu'on cherche la plus grande valeur que puisse recevoir

$$\rho_i = t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \ldots + t_i h_{i,i},$$

qui ne contient que i des m variables t. On pourra considérer ces i variables, quelles que soient d'ailleurs les $m - i$ restantes, comme liées par l'équation

$$t^2_1 + t^2_2 + \ldots + t^2_i = u - t^2_{i+1} - t^2_{i+2} - \ldots - t^2_m = v.$$

Partant on aura pour la plus grande valeur de ρ_i, les conditions

$$\frac{d\rho_i}{dt_{i'}} = h_{i',i} + h_{i,i}\frac{dt_i}{dt_{i'}} = 0,$$
$$t_{i'}\,dt_{i'} + t_i\,dt_i = 0;$$

$t_{i'}$ étant l'une quelconque des i premières variables, v étant regardée comme constante relativement à ces variables, et t_i se trouvant fonction des $i-1$ qui la précèdent. On déduit de là

$$h_{i',i} - h_{i,i}\frac{t_{i'}}{t_i} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{t_{i'}}{t_i} = \frac{h_{i',i}}{h_{i,i}}.$$

Il faudra donc que les $t_{i'}$ soient proportionnels aux $h_{i',i}$ correspondants. Posant $t_{i'} = f\,h_{i',i}$ on en conclut,

$$f^2\,(h^2_{1,i} + h^2_{2,i} + h^2_{3,i} + \ldots + h^2_{i,i}) = v.$$

Or, en vertu de la dernière des relations (9), p. 636, la somme qui multiplie f^2 est précisément égale au coefficient $b_{i,i}$, on a donc

$$f^2\,b_{i,i} = v, \text{ et } f = \sqrt{\frac{v}{b_{i,i}}}.$$

La valeur la plus grande de ρ_i sera donc

$$\rho_i = f\,(h^2_{1,i} + h^2_{2,i} + \ldots + h^2_{i,i})$$
$$= b_{i,i}\sqrt{\frac{v}{b_{i,i}}} = \sqrt{v\,b_{i,i}}.$$

Cette valeur sera, en effet, la plus grande absolument, car on peut s'assurer que le signe de la différentielle seconde totale est négatif ou positif, selon qu'on prend le facteur f positif ou négatif, c'est-à-dire selon qu'on prend ρ_i à sa limite positive ou à sa limite négative. Au lieu de calculer la différentielle seconde, ce qui n'est pas très-compliqué, on abrégera cependant en substituant $f\,h_{i',i} + \delta_{i'}$ dans ρ_i au lieu de $t_{i'}$, ce qui donne

$$\rho_i = f\,(h^2_{1,i} + h^2_{2,i} + \ldots + h^2_{i,i}) + \delta_1\,h_{1,i} + \delta_2\,h_{2,i} + \ldots + \delta_i\,h_{i,i}$$
$$= f\,b_{i,i} + \delta_1\,h_{1,i} + \delta_2\,h_{2,i} + \ldots\,\delta_i\,h_{i,i}.$$

Faisant la même substitution dans v, il vient

$$\begin{aligned} v = {} & f^2 (h^2_{1,i} + h^2_{2,i} + \ldots + h^2_{i,i}) \\ & + 2 f (\delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h^2_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i}) \\ & + \delta^2_1 + \delta^2_2 + \ldots \delta^2_i, \end{aligned}$$

et par suite de la valeur de f^2, il ne reste que

$$\delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i} = -\frac{1}{2f} (\delta^2_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^2_i).$$

Ainsi

$$\rho_i = f \left\{ b_{i,i} - \frac{1}{2f^2} (\delta^2_1 + \delta^2_2 + \ldots + \delta^2_i) \right\}.$$

La valeur de $\rho_i = f\, b_{i,i}$ est donc un maximum ou un minimum suivant le signe de f, c'est-à-dire qu'elle est bien la plus grande absolument.

Il ne faut pas oublier maintenant que v a pour limite supérieure u, ce qui suppose que tous les t de t_{i+1} à t_m sont nuls. D'après cela, les limites extrêmes de ρ_i sont $\pm \sqrt{u\, b_{i,i}}$. Mais comme u doit rester inférieur à γ^2, on voit que définitivement, pour une probabilité déterminée par la constante γ, cette constante fixe très-simplement l'étendue des limites des erreurs ρ_i sous la forme

$$\rho_i = \pm \gamma \sqrt{b_{i,i}}.$$

Au surplus, cette forme était bien facile à prévoir, d'après la 1re des relations (10), et la symétrie de tout ce calcul. Il y a, en effet, dans les relations (10) une symétrie réelle qui dépend de ce qu'une des erreurs peut occuper à volonté un rang quelconque dans les transformations, si bien qu'il est permis d'affirmer que ce qui peut se reconnaître sur l'erreur exprimée le plus simplement a lieu nécessairement pour toutes. Mais l'apparence asymétrique des relations posées a fait préférer une preuve plus saisissable.

Si l'on se rappelle actuellement que $b_{i,i}$ n'a fait que remplacer $S\,k^2_{i,h}$, on aura pour les limites des ρ_i

$$\rho_i = \pm\,\gamma\,\sqrt{S\,k^2_{i,h}}.$$

Il ne reste, dès lors, pour restreindre le plus possible cette étendue des erreurs ρ_i, qu'à trouver les moyens de rendre un minimum la somme de carrés $S\,k^2_{i,h}$. Or, on sait que c'est là une des propriétés des facteurs par lesquels on effectue l'élimination dans la méthode des moindres carrés.

On ne peut guère, pour le démontrer brièvement, prendre d'autre voie que la comparaison immédiate des coefficients $k_{i,h}$ qui servent à obtenir la valeur

$$x_i = S\,\omega_h\,k_{i,h},$$

avec les facteurs qui donneraient la même inconnue d'après la méthode des moindres carrés.

Appelant ces facteurs $A_{i,h}$, il est clair qu'ils satisferont comme les $k_{i,h}$ aux équations (3), dans lesquelles il suffirait de substituer une lettre à l'autre; et qu'on trouverait

$$x'_i = S\,\omega_h\,A_{i,h}.$$

Mais en même temps, si l'on avait opéré directement selon les prescriptions de la méthode, en formant m équations à l'aide de la multiplication successive des n équations (1) par les coefficients de chaque inconnue, ces m équations seraient

$$x_1\,S\,a_{1,h}\,a_{1,h} + x_2\,S\,a_{1,h}\,a_{2,h} + \ldots + x_i\,S\,a_{1,h}\,a_{i,h} + \ldots + = S\,a_{1,h}\,\omega_h,$$
$$x_1\,S\,a_{2,h}\,a_{1,h} + x_2\,S\,a_{2,h}\,a_{2,h} + \ldots + x_i\,S\,a_{2,h}\,a_{i,h} + \ldots = S\,a_{2,h}\,\omega_h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1\,S\,a_{i,h}\,a_{1,h} + x_2\,S\,a_{i,h}\,a_{2,h} + \ldots + x_i\,S\,a_{i,h}\,a_{i,h} + \ldots = S\,a_{i,h}\,\omega_h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1\,S\,a_{m,h}\,a_{1,h} + x_2\,S\,a_{m,h}\,a_{2,h} + \ldots + x_i\,S\,a_{m,h}\,a_{i,h} + \ldots = S\,a_{m,h}\,\omega_h;$$

et l'on éliminerait en multipliant par m facteurs B_1, B_2 ..... B_i .....

B_m, qui seraient assujettis à autant de relations telles que l'on eût

$$x'_i = B_1 S a_{1,h} \omega_h + B_2 S a_{2,h} \omega_h + \ldots + B_m S a_{m,h} \omega_h,$$

ou la même valeur que par les coefficients $A_{i,h}$.

On pourra réunir en facteur commun tout ce qui multiplie ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_n$, et il en résultera

$$x'_i = \omega_1 \Sigma B_{i'} a_{i',1} + \omega_2 \Sigma B_{i'} a_{i',2} + \omega_3 \Sigma B_{i'} a_{i',3} + \ldots + \omega_h \Sigma B_{i'} a_{i',h} + \ldots + \omega_n \Sigma B_{i'} a_{i',n}.$$

En rapprochant cette forme de la précédente

$$x'_i = S \omega_h A_{i,h},$$

on reconnaît que les coefficients $A_{i,h}$, appliqués directement aux n équations données, sont liés aux facteurs B_1, B_2, etc. par la relation

$$A_{i,h} = \Sigma B_{i'} a_{i',h}.$$

Que maintenant on se reporte aux relations (3) des $k_{i,h}$, et qu'on en retranche un système de relations semblables dans lesquelles on aura mis $A_{i,h}$ à la place de $k_{i,h}$, ainsi que la remarque en a été faite tout à l'heure : la soustraction de deux relations correspondantes donnera un système de m équations :

$$\begin{aligned}
&S a_{1,h} (k_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&S a_{2,h} (k_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S a_{i',h} (k_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S a_{i,h} (k_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S a_{m,h} (k_{i,h} - A_{i,h}) = 0;
\end{aligned}$$

et il devient manifeste qu'en les multipliant par les facteurs $B_{i'}$ respectivement, puis les ajoutant toutes, elles donneront

$$S \{ (\Sigma B_{i'} a_{i',h}) (k_{i,h} - A_{i,h}) \} = 0.$$

et comme $\Sigma B_{i'} a_{i',h}$ n'est autre chose que $A_{i,h}$ dans la méthode des moindres carrés, il en résultera

$$S \{ A_{i,h} (k_{i,h} - A_{i,h}) \} = 0,$$

ou bien

$$S A_{i,h} k_{i,h} = S A^2_{i,h}.$$

Relation singulière entre les facteurs arbitraires $k_{i,h}$ et ceux que nécessite le minimum des carrés. De là, rien n'est plus facile que de conclure l'identité

$$S k^2_{i,h} - 2 S A_{i,h} k_{i,h} = S k^2_{i,h} - 2 S A^2_{i,h},$$

puis

$$S k^2_{i,h} - S A^2_{i,h} = S k^2_{i,h} - 2 S k_{i,h} A_{i,h} + S A^2_{i,h},$$

et

$$S k^2_{i,h} = S A^2_{i,h} + S (k_{i,h} - A_{i,h})^2,$$

expression par laquelle Gauss a démontré que, sous les relations (3), le minimun de la somme des carrés des facteurs $k_{i,h}$, a lieu quand ces facteurs sont précisément les facteurs $A_{i,h}$ assignés par la méthode de Legendre.

Cette méthode réduit donc les erreurs qui entreront nécessairement dans les valeurs des x_i, aux plus étroites limites possibles, pour une probabilité donnée. Réciproquement, si un système de limites détermine une probabilité, comme la quantité γ, qui sert à la calculer, sera liée à toutes les limites par la relation

$$\rho_i = \gamma \sqrt{S k^2_{i,h}},$$

il est palpable que γ sera un maximum pour le minimum de $S k^2_{i,h}$, ou pour le résultat de la méthode des moindres carrés; de sorte qu'un système de limites étant choisi, la probabilité que les erreurs n'en sortiront pas sera la plus grande possible quand on aura déterminé les inconnues par cette méthode.

Il a déjà été dit effectivement que dans les formules (11) la valeur de ρ est croissante avec γ. C'est ce qu'on reconnaîtrait immé-

diatement par la différentiation de ces formules qui, toutes deux, lorsque m est le nombre $2g$ ou $2g-1$ des éléments, ont pour dérivée la quantité

$$\frac{dp_m}{d\gamma} = 2\, e^{-\gamma^2} \frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

expression simple, qui ne changerait de signe qu'avec la constante γ, ici regardée comme variable.

On peut s'assurer que pour $m = 1$, quand il n'y a qu'un seul élément, ou une seule inconnue x, toutes ces formules rentrent complétement dans les relations connues

$$r = \mu_1 \, S \, A_h + \rho \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)},$$

$$\text{Limites de } \rho = \pm \gamma \sqrt{S\, A^2_h},$$

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2}\, dt.$$

On connaît les procédés simples donnés par Laplace et par M. Gauss pour déduire les quantités μ_1 et μ_2 des observations mêmes. Ces procédés, qui dépendent de ce qu'on a appelé la *théorie des probabilités à posteriori*, ne sont pas modifiés par le changement qui vient d'être développé. Il n'influe heureusement que sur la grandeur de la probabilité, ou plutôt sur l'étendue des erreurs les plus probables. Il ne sera donc pas question ici du calcul de μ_1 ni de μ_2. Mais il a paru nécessaire, sinon de former des tables des valeurs numériques des formules (11), du moins d'en présenter quelques valeurs intéressantes.

Avant de procéder à cette application, peut-être convient-il de faire observer que, si l'expression de la probabilité p donnée généralement (p. 638),

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_m dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t^2_1 - t^2_2 - \ldots - t^2_m} \left(1 - \frac{1}{6} B_3 + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{7^2} B_6\right),$$

avait été intégrée relativement à toutes les variables, excepté une, le résultat aurait été la probabilité des limites assignées à l'erreur ρ correspondante, quelque grandes que fussent toutes les autres erreurs : en d'autres termes, la probabilité de cette erreur considérée isolément, et comme si les autres n'existaient pas. On arriverait, de cette manière, aux formules relatives aux cas d'un seul élément, telles qu'elles viennent d'être écrites : c'est-à-dire au mode ordinaire de calcul de la probabilité. Mais, encore une fois, ce mode la donne beaucoup trop grande, puisqu'il compte dans le calcul toute la probabilité des combinaisons d'erreurs, dans lesquelles les autres erreurs ont des grandeurs qui ne permettraient même plus de se fier aux équations. On va reconnaître, au surplus, l'extrême différence des deux résultats.

Les mêmes considérations ont empêché d'avoir égard aux valeurs moyennes des erreurs. On sait qu'on appelle ainsi la somme des produits des erreurs par leurs probabilités respectives. Cette moyenne arithmétique, dans laquelle chaque erreur entre proportionnellement au nombre des chances qui peuvent l'amener, ne peut être un indice exact de l'importance d'une erreur que quand elle est calculée isolément. Si, au contraire, il se rencontrait que les grandeurs les plus considérables de l'erreur d'une inconnue fussent précisément celles qui dépendent de systèmes d'erreurs dont la probabilité est faible, on conçoit que la moyenne pourrait donner une idée erronée de la grandeur la plus ordinaire de l'erreur spéciale à laquelle elle se rapporte. En général, l'emploi des valeurs moyennes est chose délicate, à moins qu'elles ne fassent l'objet spécial des recherches. On sentira sur-le-champ, par exemple, que, même dans le cas le plus simple, la moyenne des erreurs ρ_i, qui se calcule en intégrant

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\, t\sqrt{\mathrm{S}\, k^2_{i,h}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mathrm{S}\, k^2_{i,h}},$$

ne donne pas une idée bien juste, puisque les limites entre les-

quelles il y a 1 contre 1 à parier que peut tomber la valeur ρ_i sont déterminées par l'équation

$$\int_0^z dt\, e^{-t^2} = \int_z^\infty dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^z dt\, e^{-t^2},$$

ou bien

$$\int_0^z dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi},$$

d'où l'on tire

$$z = 0{,}476\ 936.$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est, au contraire, égal à 0,564 18. La moyenne des erreurs est donc loin de se rencontrer parmi les erreurs le plus probables. A la vérité, cette moyenne est celle de toutes les erreurs prises avec le signe +, et la moyenne réelle est 0. Il y aurait plus d'une observation à faire sur l'usage des moyennes : mais il faut ici, pour éviter trop de longueurs, ne pas s'y arrêter, non plus qu'à un grand nombre d'autres points utiles. Il suffit d'avoir montré qu'elles n'ont pas toujours le sens que les habitudes de l'esprit y font attacher dans les circonstances les plus ordinaires : et, qu'en conséquence, elles ne sont point propres à la démonstration de la méthode des moindres carrés. Aussi est-ce de cette évaluation de la moyenne des erreurs prises avec le signe positif, que M. Gauss forme une espèce d'objection à l'analyse de Laplace (*Theoria combinationis, etc.*). Le fait est que le résultat ne serait point rigoureux, si cette moyenne ne s'était trouvée proportionnelle aux limites des erreurs. Mais il en est de même de la moyenne des carrés des erreurs, que M. Gauss croit pouvoir adopter *à priori* comme *criterium* de la précision. C'est, au contraire, l'existence de ce *criterium* remarquable que démontre l'analyse de Laplace, de même que tout ce qui précède.

§ IV.

Dans les applications, la valeur de la constante γ, la plus difficile à trouver peut-être, sinon la plus utile, est celle pour laquelle la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$. Il y a pour cette valeur autant à parier que les erreurs tomberont dans les limites qui en résultent qu'il y a à parier qu'elles excéderont ces limites.

Ainsi d'abord, dans le cas d'une seule inconnue x, Bessel a donné la valeur $\gamma = 0{,}4769364$. La dernière décimale paraît inexacte, et il faut prendre $\gamma = 476936276 20$. Mais c'est là un véritable luxe de décimales, en fait de probabilités; car il sera bien rare que le terme négligé, qui dépend du grand nombre n des observations, permette de pousser l'approximation au delà des premières décimales.

On a donc, pour une seule inconnue, la probabilité

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0,476\,9\ldots\ldots} dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2},$$

que l'erreur r est entre les limites

$$r = \mu_1 \, S \, A_h \pm 0{,}476\,9\ldots\ldots \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)\, S\, A^2_h};$$

les facteurs A étant ceux qu'indique la méthode des moindres carrés. Quant aux valeurs μ_1 et μ_2, elles doivent être cherchées, soit en dehors des observations, soit par les observations mêmes, et cela d'après les procédés connus pour les probabilités *a posteriori*, ainsi qu'il a été dit.

Lorsque rien n'empêche d'élever la valeur de γ jusqu'à 3, par exemple, la probabilité que l'erreur est renfermée dans les limites

$$r - \mu_1 \, S \, A_h = \pm 3 \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)\, S\, A^2_h},$$

est exprimée à peu près par

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^3 dt\, e^{-t^2} = 0{,}99997790.$$

C'est ce que l'on peut voir dans les tables qui ont été publiées pour les valeurs de l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma dt\, e^{-t^2}$ (notamment dans l'*Exposition de la théorie des chances* de M. Cournot).

Ces valeurs sont précisément celles qui ont été appliquées, par omission, aux problèmes qui comprennent plusieurs inconnues. Elles ne sont rapportées ici que pour en faciliter la comparaison avec celles qui donnent les formules (11).

S'il y a deux inconnues, il faut employer la 2me de ces formules, et la probabilité est alors très-simplement :

$$p_2 = 1 - e^{-\gamma^2}.$$

Elle devient égale à $\frac{1}{2}$; pour $\frac{1}{2} = e^{-\gamma^2}$, ou $\gamma = \sqrt{l\,2}$. La lettre l indiquant les logarithmes népériens. On trouvera sans peine $\gamma = 0{,}83255461\ldots$.

Ainsi, dès qu'il y a seulement deux éléments à déduire des observations, les limites comprennent un intervalle presque double: et les erreurs peuvent être bien plus grandes par conséquent.

On a la probabilité $\frac{1}{2}$ que l'erreur de l'élément x_i est comprise dans les limites

$$r_i - \mu_1 \,\mathrm{S}\,\mathrm{A}_{i,h} = \pm\, 0{,}83255\ldots \sqrt{2\,(\mu^2 - \mu^2{}_1)\,\mathrm{S}\,\mathrm{A}^2{}_{i,h}},$$

ou, si l'on veut que les erreurs puissent varier, on dira que $\frac{1}{2}$ est

la probabilité de l'ensemble de tous les systèmes pour lesquels

$$r_1 - \mu_1 \,\mathrm{S.}\, A_{1h} = t_1 \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)\,\mathrm{S.}\, A^2_{1h}},$$

$$r_2 - \mu_1 \,\mathrm{S.}\, A_{2h} = t_1 \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)\,\frac{(\mathrm{S.}\, A_{1h} A_{2h})^2}{\mathrm{S.}\, A^2_{1h}}} + t_2 \sqrt{2\,(\mu_2 - \mu^2_1)\left\{\mathrm{S.}\, A^2_{2h} - \frac{(\mathrm{S.}\, A_{1h} A_{2h})^2}{\mathrm{S.}\, A^2_{1h}}\right\}};$$

les variables t_1 et t_2 étant assujetties à la condition

$$t^2_1 + t^2_2 < 0{,}69\ 314\ 718\ldots.$$

les quantités sous les radicaux étant déterminées d'ailleurs par les relations (9) où les facteurs A de la méthode des moindres carrés remplacent les arbitraires k dans les coefficients $b_{ii'} = \mathrm{S.}\, k_{ih}\, k_{i'h}$.

Lorsque, dans ce système, on voudra atteindre une probabilité, 0,99 997 790... égale à celle que donne $\gamma = 3$ quand il n'y a qu'une inconnue, il faudra résoudre l'équation

$$1 - e^{-\gamma^2} = 0{,}99\ 997\ 790\ldots.$$

qui élève la valeur à $\gamma = 3{,}27\ 419\ldots$

Ainsi, pour des probabilités très-grandes, les limites diffèrent moins que pour de faibles probabilités, quand on passe du cas d'une seule inconnue au cas de deux inconnues. C'est ce dont il est facile de se rendre compte, puisqu'il en serait absolument de même si les deux inconnues étaient indépendantes l'une de l'autre.

Voici maintenant, afin d'abréger, le tableau des valeurs de γ qui donnent la probabilité égale à $\frac{1}{2}$ dans les formules (11), depuis $m = 1$ jusqu'à $m = 8$. Il ne serait pas difficile, mais il serait très-long, de faire les mêmes calculs pour un plus grand nombre d'éléments.

$m = 1$	$\gamma_1 = 0{,}47693$	
$m = 2$	$\gamma_2 = 0{,}83255$	$= 1{,}7456 \times \gamma_1$
$m = 3$	$\gamma_3 = 1{,}0876$	$= 2{,}2814 \times \gamma_1$
$m = 4$	$\gamma_4 = 1{,}29551$	$= 2{,}7164 \times \gamma_1$
$m = 5$	$\gamma_5 = 1{,}4750$	$= 3{,}0927 \times \gamma_1$
$m = 6$	$\gamma_6 = 1{,}63525$	$= 3{,}4287 \times \gamma_1$
$m = 7$	$\gamma_7 = 1{,}7812$	$= 3{,}7347 \times \gamma_1$
$m = 8$	$\gamma_8 = 1{,}91623$	$= 4{,}0178 \times \gamma_1$.

Il ne s'agit que de comparer chacun de ces nombres avec le premier, pour reconnaître sur-le-champ l'étendue réelle des limites de l'erreur probable déjà calculées dans un système d'observations. Il n'existe effectivement aucun changement à faire subir aux calculs ordinaires, sauf celui de la valeur γ. Il est presque inutile de rappeler de plus que l'erreur probable est ainsi nommée parce que c'est précisément la valeur de la limite correspondant à la probabilité $\frac{1}{2}$.

Voici un exemple de ce rapprochement. Bessel, dans son Mémoire sur la comète d'Olbers (*Untersuchungen über die Bahn des Olberschen Kometen*), emploie à la correction des éléments de l'orbite 349 observations, dont il forme des équations à 6 inconnues. Il en conclut, pour l'une de ces inconnues, la correction de l'excentricité, une erreur probable de 0,00 017 127 qu'il évalue en temps à environ 101 jours, sur les 74 ans assignés à la révolution de l'astre.

Dans ce calcul, Bessel a employé le facteur $\gamma_1 = 0{,}47\,693$. Puisqu'il y a 6 inconnues, il convenait de prendre, au contraire, $\gamma_6 = 1{,}63525 = 3{,}428.. \times \gamma_1$: c'est-à-dire plus du triple, et d'élever l'erreur probable à 0,00 058 72 : ce qui entraîne sans doute une erreur probable de près d'une année sur la durée de la révolution.

On peut très-bien ici reconnaître la nécessité d'étendre ainsi les

limites de l'erreur probable. On sent en effet qu'il faut, pour que les erreurs des autres éléments puissent avoir la même probabilité, tenir compte de toutes les combinaisons dans lesquelles chacune de leurs valeurs sont en droit d'entrer.

Bessel fait observer, avec toute raison, qu'il est fort à regretter que les circonstances du mouvement géocentrique aient laissé une si grande incertitude sur cet élément, tandis que les autres n'offrent que des erreurs bien moindres comparativement. La comète d'Olbers ne devant revenir au périhélie que le 9 février 1887, ce ne sera pas avant 36 ans que ces calculs pourront offrir un intérêt positif. Mais on voit dans le mémoire de Bessel qu'il assignait une probabilité de 66,85 contre 1 à la limite d'un an; tandis qu'on ne peut parier beaucoup plus de 1 contre 1 que la comète n'excédera pas cette limite en avance ou en retard. Pour obtenir 66,85 contre 1, il faudrait résoudre exactement l'équation résultant de la 2^{me} des formules (11) : ce qui donnerait à γ une valeur (2,812) plus que quintuple de la valeur γ_1, et entraînerait une limite d'erreurs possibles, bien que peu probables, d'environ 19 mois.

Il serait presque inutile de faire exactement ce dernier calcul, car le nombre des observations n'étant que de 349, et le nombre des éléments s'élevant à 6, le diviseur des termes négligés n'atteint que 58 : de sorte que ces termes pourraient avoir une grande influence sur les premières décimales de la probabilité. Il suffit d'avoir indiqué le sens dans lequel influaient les omissions. Quant aux petites valeurs de γ, il est bien plus difficile que les termes négligés aient un effet capable d'altérer sensiblement la probabilité $\frac{1}{2}$, ou toute autre aussi faible; et c'est par cette raison que le calcul a été fait avec exactitude.

Voici un second et dernier exemple de l'application des formules (11).

Dans le premier Supplément à la théorie analytique des probabilités, Laplace évalue à 1 000 000 contre 1 la probabilité que la masse de Jupiter, qu'il corrige à l'aide de 129 équations dans

lesquelles il a fait cette masse égale à $\frac{1+z'}{1067,09}$, et qu'il réduit à $\frac{1}{1070,35}$, n'est pas en erreur de $\frac{1}{100}$ de la première valeur. Cependant elle est portée actuellement à $\frac{1}{1050}$ dans l'Annuaire du bureau des longitudes. La différence est d'environ $\frac{1}{51,5}$, ce qui fait à peu près le double des limites assignées avec une si haute probabilité.

Cette différence considérable peut dépendre de la manière dont les 129 équations ont été formées; et peut être même une conséquence toute naturelle du défaut de précision des observations employées, ou des formules de réduction. Mais si l'on considère que les 129 équations renferment 6 inconnues, et que par suite il ne fallait attacher aux limites de z' que la probabilité de l'ensemble des limites assignées à toutes ces inconnues, et auxquelles elles doivent satisfaire à la fois, on trouve une probabilité bien inférieure à $\frac{1\,000\,000}{1\,000\,001}$ (ou plus exactement $1 - 0,\ 00\ 000\ 100\ 4$ que donnent les valeurs rapportées par Laplace).

La valeur de la correction telle que la donne Laplace est

$$z' = -0,\ 00\ 305 + \gamma\sqrt{\frac{1}{(345,885)^2}}.$$

Le diviseur sous le radical est un peu trop grand, parce qu'il ne fallait prendre pour 129 observations et 6 inconnues que 123 fois (ou $129 - 6$) un certain dénominateur. En tenant compte de cette légère rectification, dépendant de ce que 6 n'est pas à négliger auprès de 129, on a pour z' les limites

$$z' = -0,00\ 305 \pm \gamma \times 0,00\ 296.$$

L'erreur possible de z' devant être telle que l'erreur de la masse soit au-dessous de $\frac{1}{100}$ de $\frac{1}{1\,067,09}$, il en résulte

$$\frac{\gamma \times 0,00\ 296}{1\,067,09} = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1\,067,09},$$

ou bien $\gamma = 3,37\ 745$.

Cette valeur de γ aurait encore donné à Laplace la probabilité 0,99 999 821 ou à peu près 560 488 à parier contre 1.

Mais si on la fait entrer dans la seconde des formules (11), en posant $m = 6$, on trouve

$$p_6 = 1 - e^{-\gamma^2}\left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \gamma^2 + 1\right);$$

et, tout calcul fait,

$$p_6 = 0{,}99\,913\,89,$$

ou à peu près $\frac{1160}{1161}$.

Il n'y avait donc que 1160 à parier contre 1 que la masse $\frac{1}{1070,35}$ n'était pas en erreur de $\frac{1}{100}$.

Cette probabilité peut déjà paraître assez grande. Mais il ne faut pas perdre de vue que les formules (11), comme celle de Laplace, négligent des termes qui ne disparaissent que quand $\frac{m}{n}$ est assez petit pour permettre d'employer des valeurs de γ aussi grandes que 3,37 745. Ces termes, sans nul doute, rendent ici la formule erronée, puisque $\frac{n}{m}$, loin d'être un grand nombre, n'est que $\frac{129}{6} = 21{,}5$. La valeur $p = 0{,}99\,913\,89$ résultant de l'approximation est donc ici très-imparfaite; et, lors même qu'on s'en tiendrait à la formule de Laplace, la valeur qu'il a donnée de $\frac{1\,000\,000}{1\,000\,001}$, ne pourrait être admise, à cause de la grandeur certaine des termes négligés par lui.

Il faut reconnaître que 129 équations ne permettent d'employer cette analyse approximative que pour de faibles valeurs de γ. Mais alors, dira-t-on avec M. Gauss, la méthode des moindres carrés n'est donc plus démontrée pour les cas les plus fréquents dans la pratique, pour des nombres d'observations très-grands relativement aux peines qu'ils donnent aux observateurs, mais trop petits pour assurer une grande probabilité; cette mé-

thode, qui paraît précieuse, ne serait donc le plus souvent qu'une règle commode par son uniformité et par les avantages que Legendre avait signalés dès l'origine.

A ces regrets trop fondés il faut répondre affirmativement sans la moindre hésitation. Il n'est besoin, en effet, que du simple bon sens, destitué de tout calcul, pour reconnaître que des observations affectées d'erreurs ne peuvent donner les valeurs cherchées, que quand il se fait des compensations entre les erreurs, et tout le monde sent que ces compensations ne sauraient avoir lieu que sur de grands nombres. Employer une moyenne quelconque d'un petit nombre de faits, c'est nécessairement courir le risque que les erreurs s'ajoutent. Il en est ainsi dans toutes les circonstances où l'épreuve ne peut être répétée à volonté, et alors la connaissance qu'on acquiert ne doit plus être imprudemment étendue au delà des limites des plus grandes erreurs possibles. Certes, ce serait une véritable aberration de prétendre que la moyenne arithmétique de 10 mesures, dont chacune peut être affectée d'une erreur, en plus ou en moins, de 0 à 1 centimètre, aura un grand avantage sur toute autre combinaison de ces 10 mesures. Sans nul doute il vaudrait mieux pouvoir démontrer qu'elle jouit toujours, même pour de si petits nombres, d'une probabilité supérieure; mais, par la nature seule des choses, la différence serait très-petite. Aussi est-il superflu de rechercher ce qui se passe dans de petits nombres. A cet égard on sera toujours, et de toute nécessité, contraint de revenir à la réflexion de Gibbon : « Les lois de la probabilité, si vraies en général, si trompeuses en particulier. » Il faudra donc, même quand on aurait prouvé que tel ou tel procédé est le plus probable, ne s'en servir qu'en tenant compte, non plus des erreurs moyennes, mais des erreurs les plus grandes possibles, car la probabilité des unes et des autres ne différera jamais assez pour qu'on puisse se permettre de négliger les unes plutôt que les autres. La probabilité n'est fondée que sur la possibilité des choses, et, dans un petit nombre d'observations, un événement possible a chance de prendre sa place comme tout autre de même

possibilité. Ce n'est que dans les grands nombres que certaines classes de faits, certaines combinaisons deviennent impossibles, ou plutôt très-peu possibles, par conséquent improbables. Et cette condition impérieuse du grand nombre n'a rien de particulier à la méthode des moindres carrés.

Qu'il faille continuer d'appliquer cette méthode à de petits nombres d'observation, c'est ce qui n'est point douteux. L'analyse qui la démontre reste vraie pour de petits nombres, de même que celle qui prouve la valeur des résultats moyens de toute espèce. Seulement, les termes négligés ne laissent plus ressortir un maximum absolu de probabilité; mais, reprenant leur influence, ils viennent altérer un peu le résultat de l'approximation, et l'on voit que ce résultat n'est pas fort éloigné du maximum. S'il en diffère, ce n'est que de petites quantités dont les diviseurs croissent proportionnellement au nombre des observations : si bien que la méthode reprend cette propriété de donner le maximum d'avantage, dès que ce nombre a quelque valeur; et cela bien avant qu'il soit assez grand pour permettre d'appliquer sans scrupule les formules d'approximation au calcul de la probabilité. Il y aurait à ajouter à ces motifs, tirés de la marche des calculs, tous ceux que Legendre fit d'abord valoir en faveur de son procédé. Mais ce n'en est point ici le lieu; ils sont connus et appréciés. Il ne s'agissait que de montrer les moyens de combler ce qui avait paru être une lacune fâcheuse dans une théorie si utile. Car rien n'est plus nuisible au progrès vers la vérité que la confiance erronée qui se croit en possession de résultats dont la science est encore éloignée.

FIN DU TOME QUINZIÈME.

CHANGEMENTS ET ADDITIONS.

Page 147, dernière colonne du tableau. *Supprimez l'indice* mèt.

Page 245, tableau. *Au lieu de :* et les vitesses expérimentales des formules; *lisez :* des formules et les vitesses expérimentales.

Page 339, ligne 8. *Au lieu de :* $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$; *lisez :* $\varepsilon_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$.

Page 340, ligne 9. *Au lieu de :* $CR\left(\frac{dv}{dr}\right)^n$; *lisez :* $CR^m\left(\frac{dv}{dr}\right)^n$.

Page 421, ligne 11. *Au lieu de :* fig. 13; *lisez :* fig. 12.

Page 449, ligne 23. *Au lieu de :* $(d^1\, d^{\frac{1}{55}}\, b^{\frac{2}{27}})$; *lisez :* $M = (b^{\frac{2}{27}}\, d^1\, d^{\frac{1}{55}})$.

Page 461, ligne 22. *Au lieu de :* $k_2\, t_5\, a^1$; *lisez :* $\chi_2\, t_5\, a^1$.

Page 481, ligne 9. *Au lieu de :* pl. III; *lisez :* pl. II.

Page 490, ligne 8. *Au lieu de :* interceptée; *lisez :* interrompue.

Page 534, ligne 27. *Au-dessous de :* $\sigma = (d^{\frac{1}{6}}\, d^1\, b^{\frac{1}{6}})$; *placez le titre :* PLAGIÈDRES SUPÉRIEURS DE LA ZONE $e^{\frac{1}{2}}\, s\, e^2$.

Page 535, ligne 2. *Supprimez le titre :* PLAGIÈDRES SUPÉRIEURS DE LA ZONE $e^{\frac{1}{2}}\, s\, e^2$.

Page 561, ligne 9. *Au lieu de :* fig. 7 et fig. 62; *lisez :* fig. 8 et fig. 69.

Idem, ligne 12. *Au lieu de :* 69; *lisez :* 79.

Page 572, ligne 21. *Au lieu de :* parallèles, *lisez :* parallèles à ces faces.

Page 585, ligne 4. *Au lieu de :* elles; *lisez :* elle.

Idem, ligne 5. *Au lieu de :* composent; *lisez :* compose.

Page 592, ligne 13. *Au lieu de :* pl. III; *lisez :* pl. II.

Pl. I, fig. 26. *Ajoutez* $e^{\frac{8}{7}}$ à gauche de π.

Pl. II, fig. 64. *Au lieu de :* $e^{\frac{15}{8}}$; *lisez :* $e^{\frac{13}{8}}$.

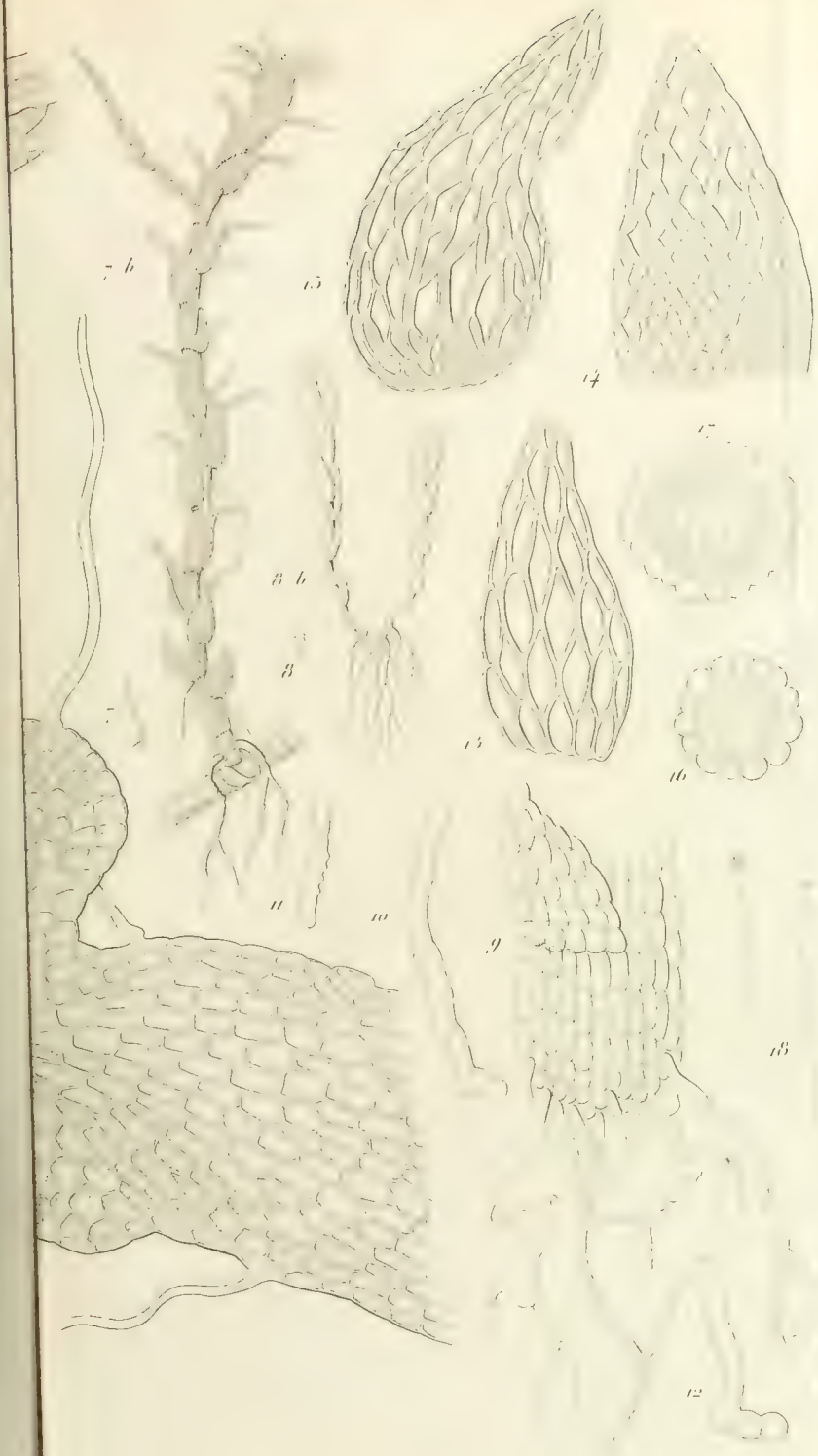
Idem, fig. 43. *Au lieu de :* v; *lisez :* v_2.

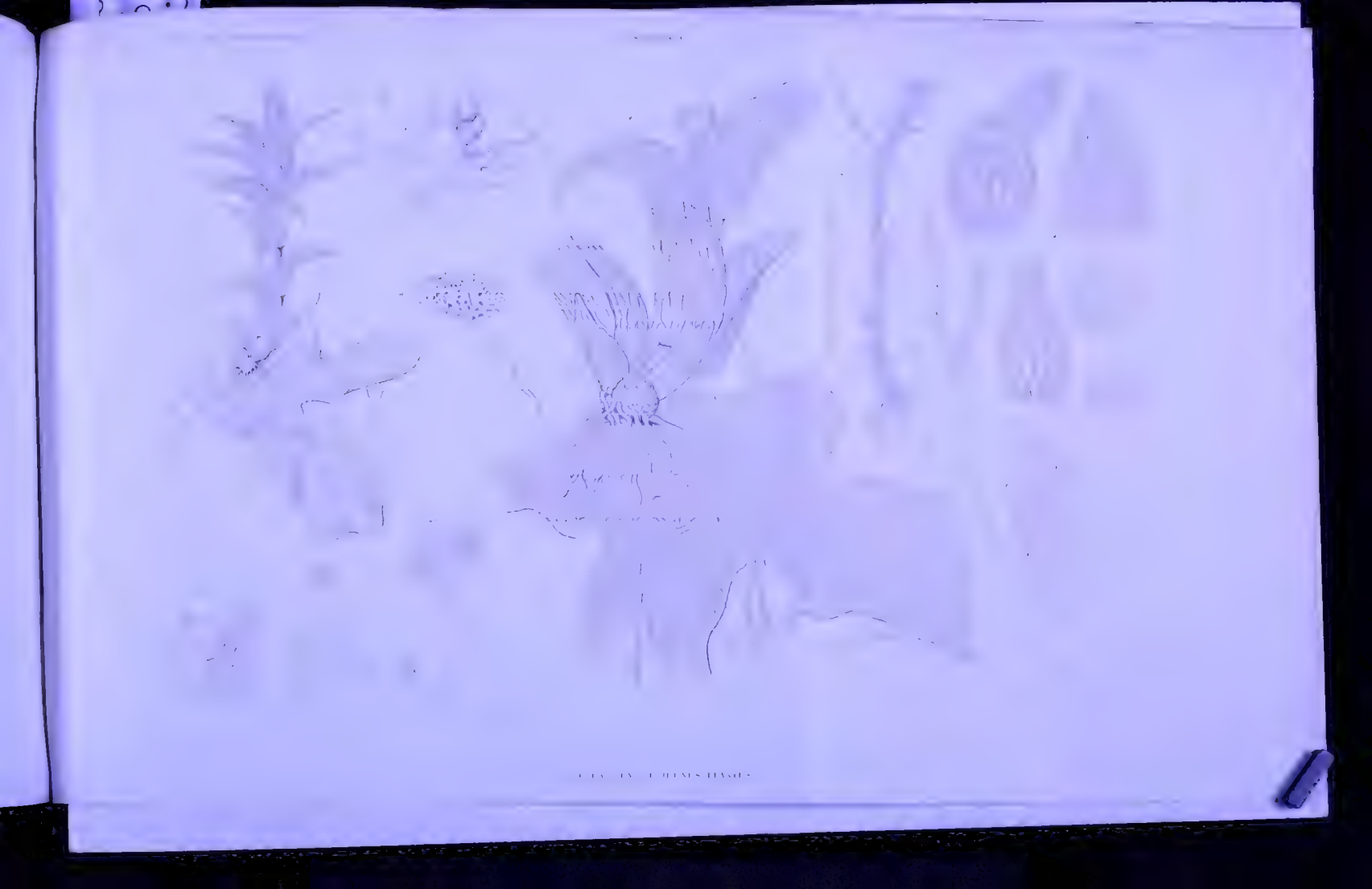
Idem, fig. 49. *Ajoutez* $e^{\frac{8}{5}}$ au-dessous de p gauche.

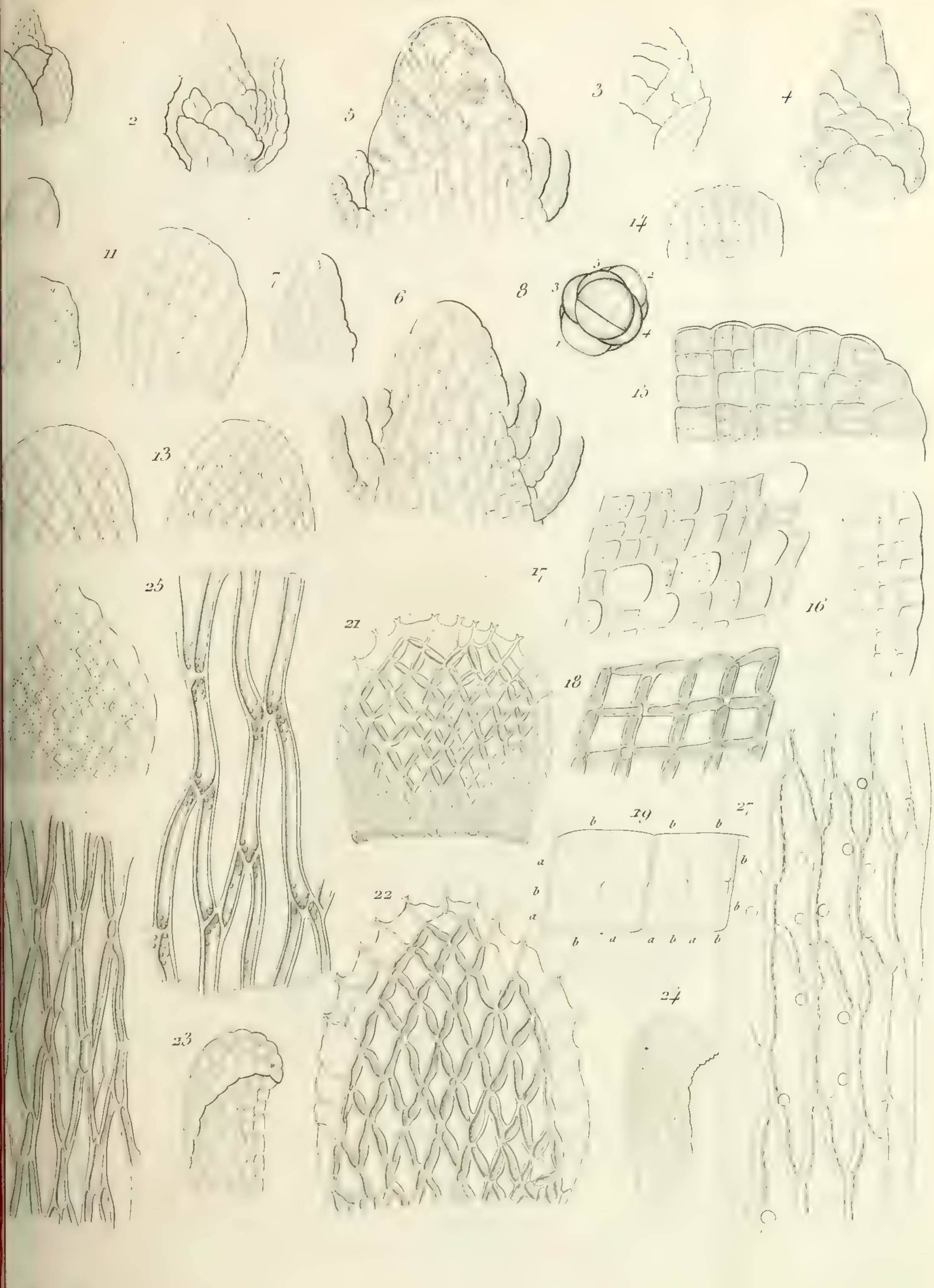
Idem, fig. 51. *Au lieu de :* l; *lisez :* t.

11
15
A.
1'
16
e
14
e
16 B'
B

GERMINATION ET PROTHALLIUM

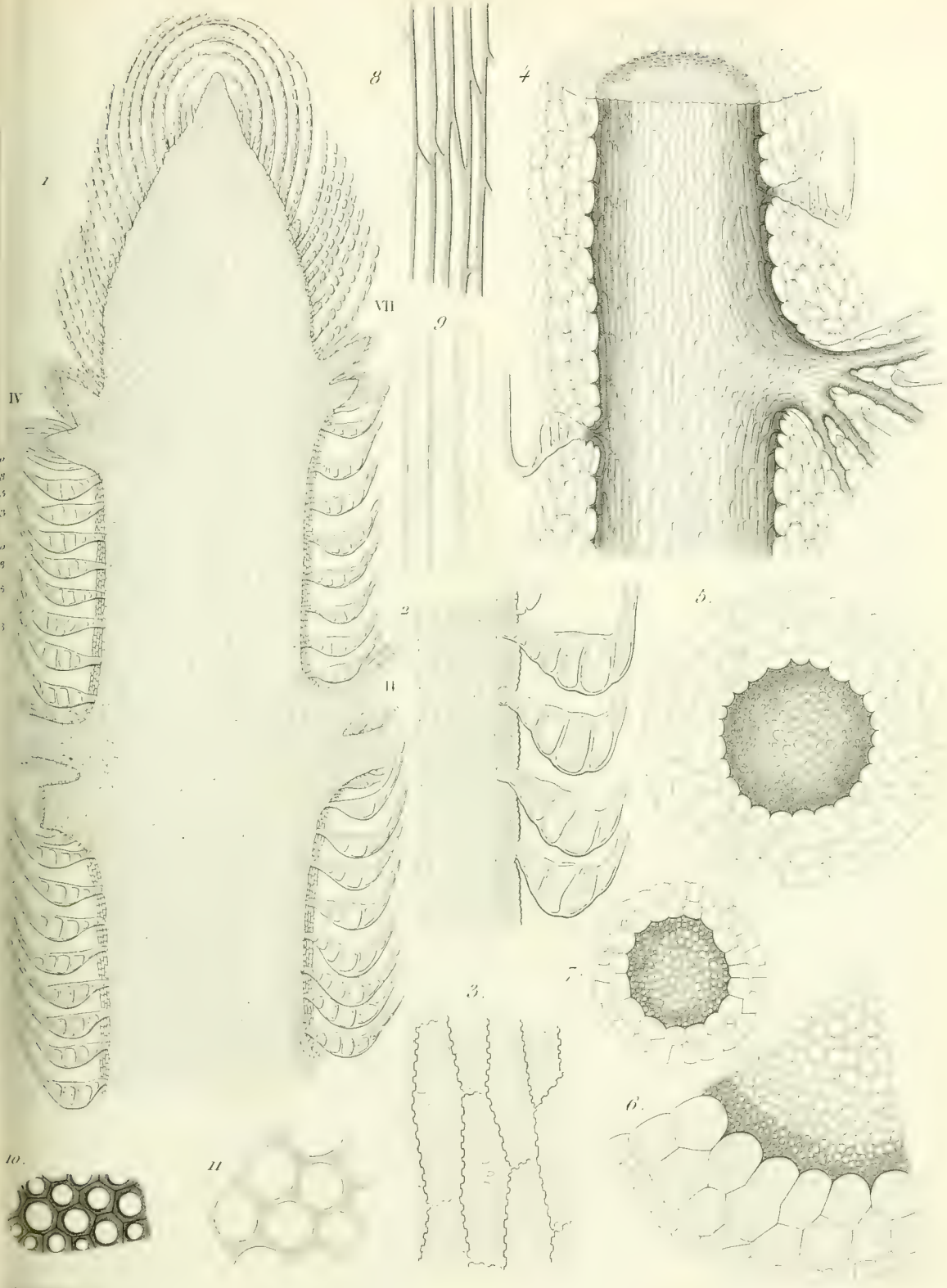

7 b
15
14
17
8 b
8
13
16
11
10
9
18
12



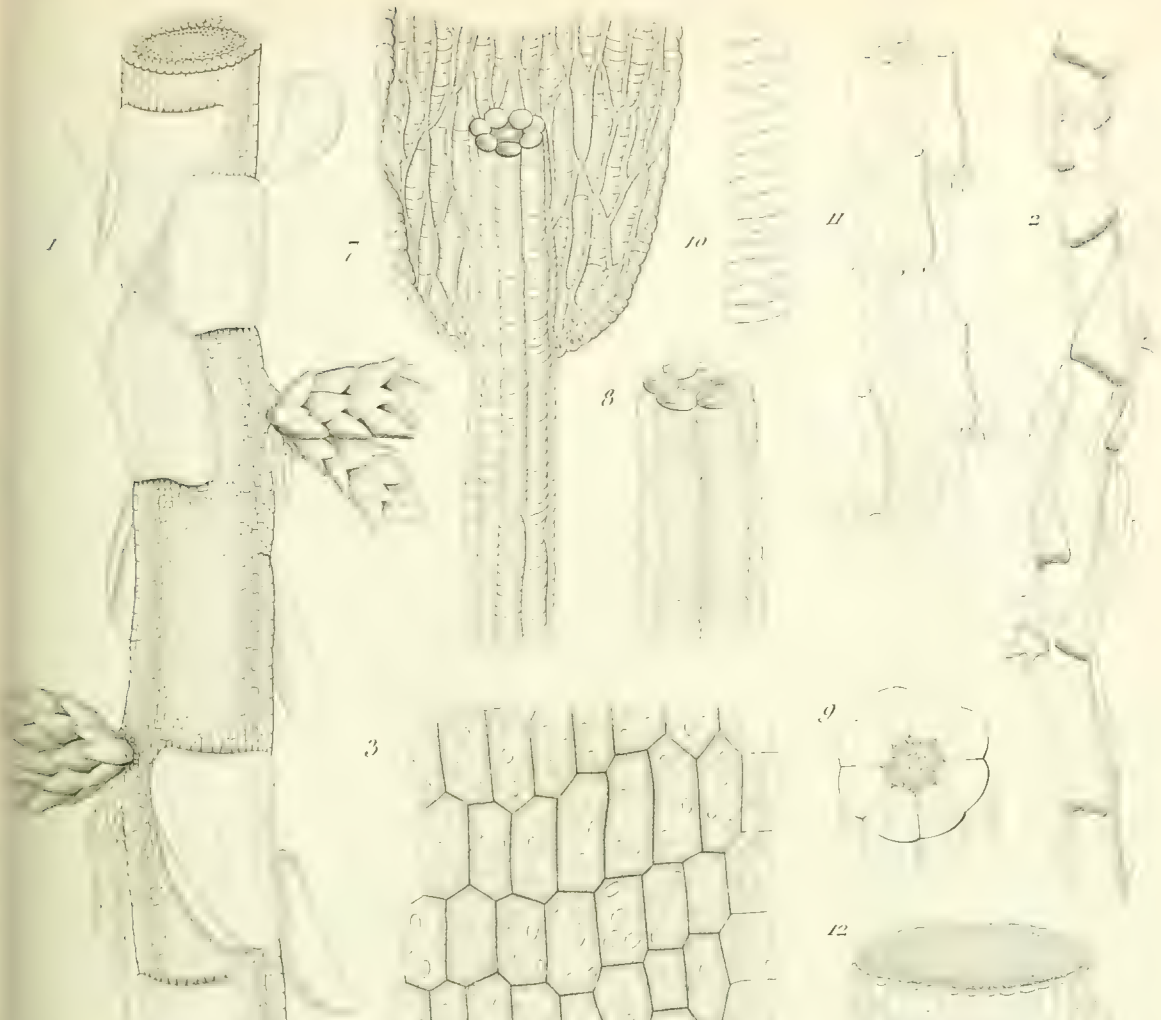


Schimper del. Mlle [illegible] sculp.

ÉVOLUTION DE LA TIGE ET DES FEUILLES

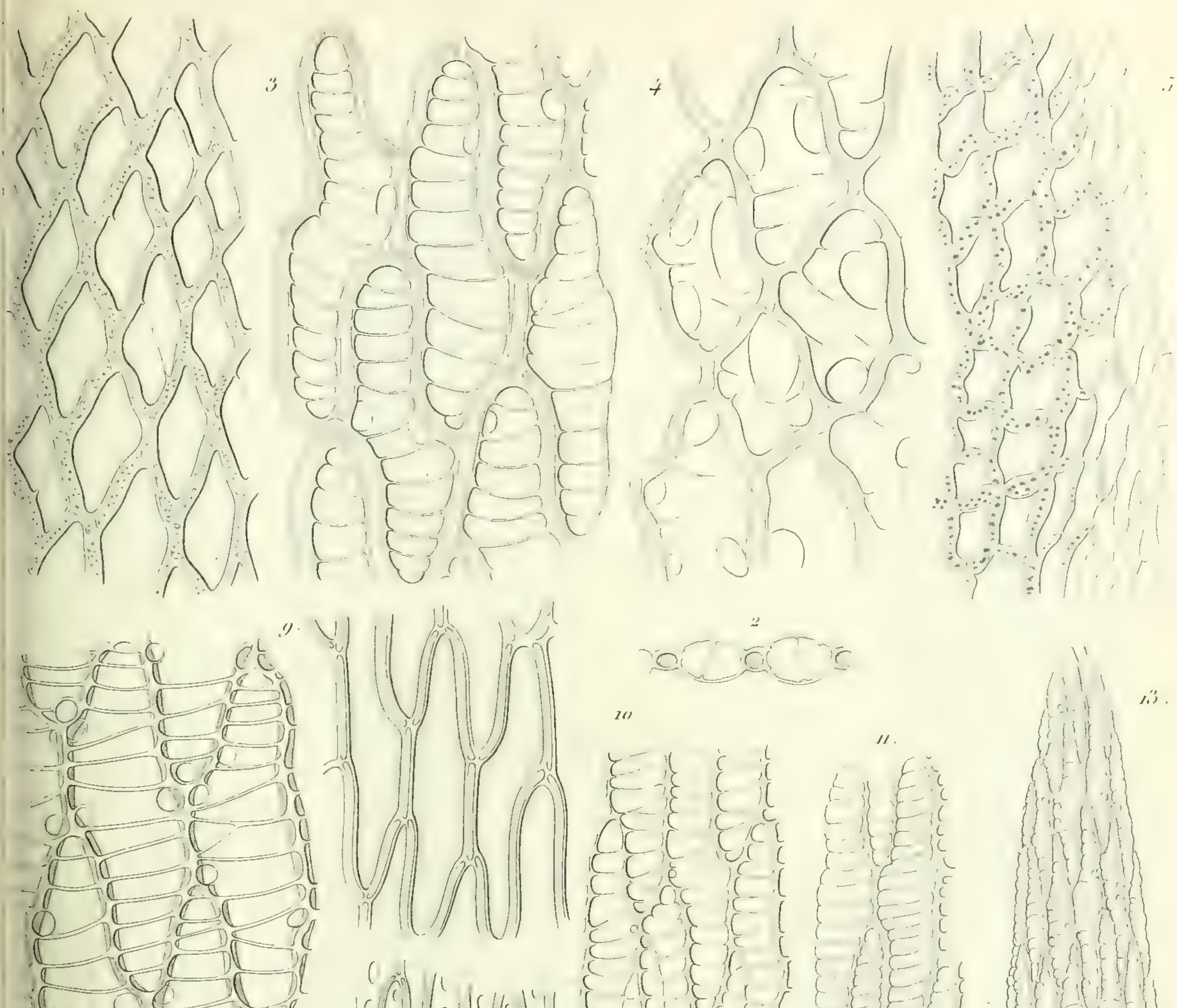


ORGANISATION DE LA TIGE.



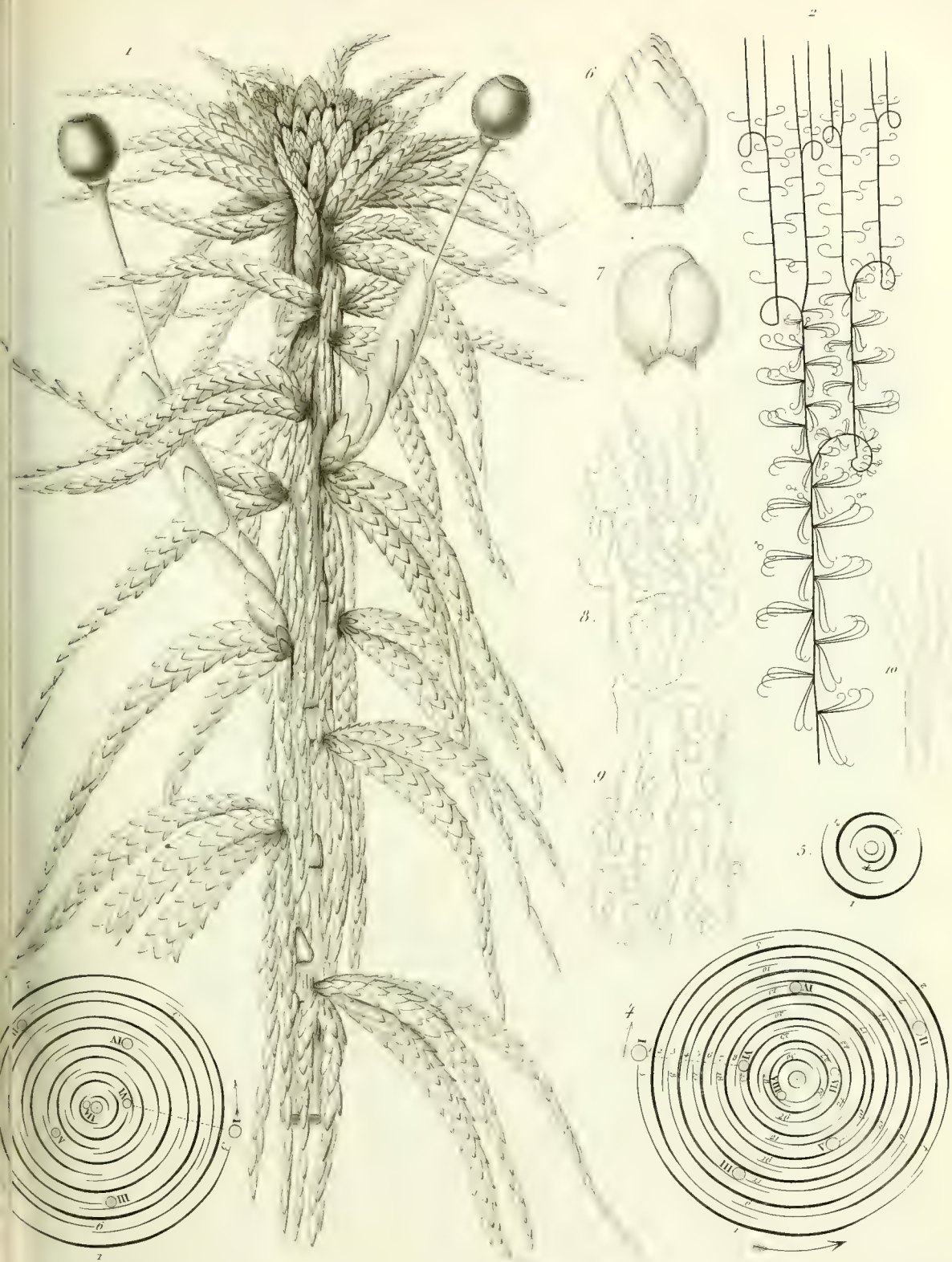
W. P. Schimper del. Mme L. Laillant sculp.

ORGANISATION DE LA TIGE ET DES RAMEAUX. DISPOSITION DES FEUILLES



Schimper del.

TISSU CELLULAIRE DES FEUILLES.

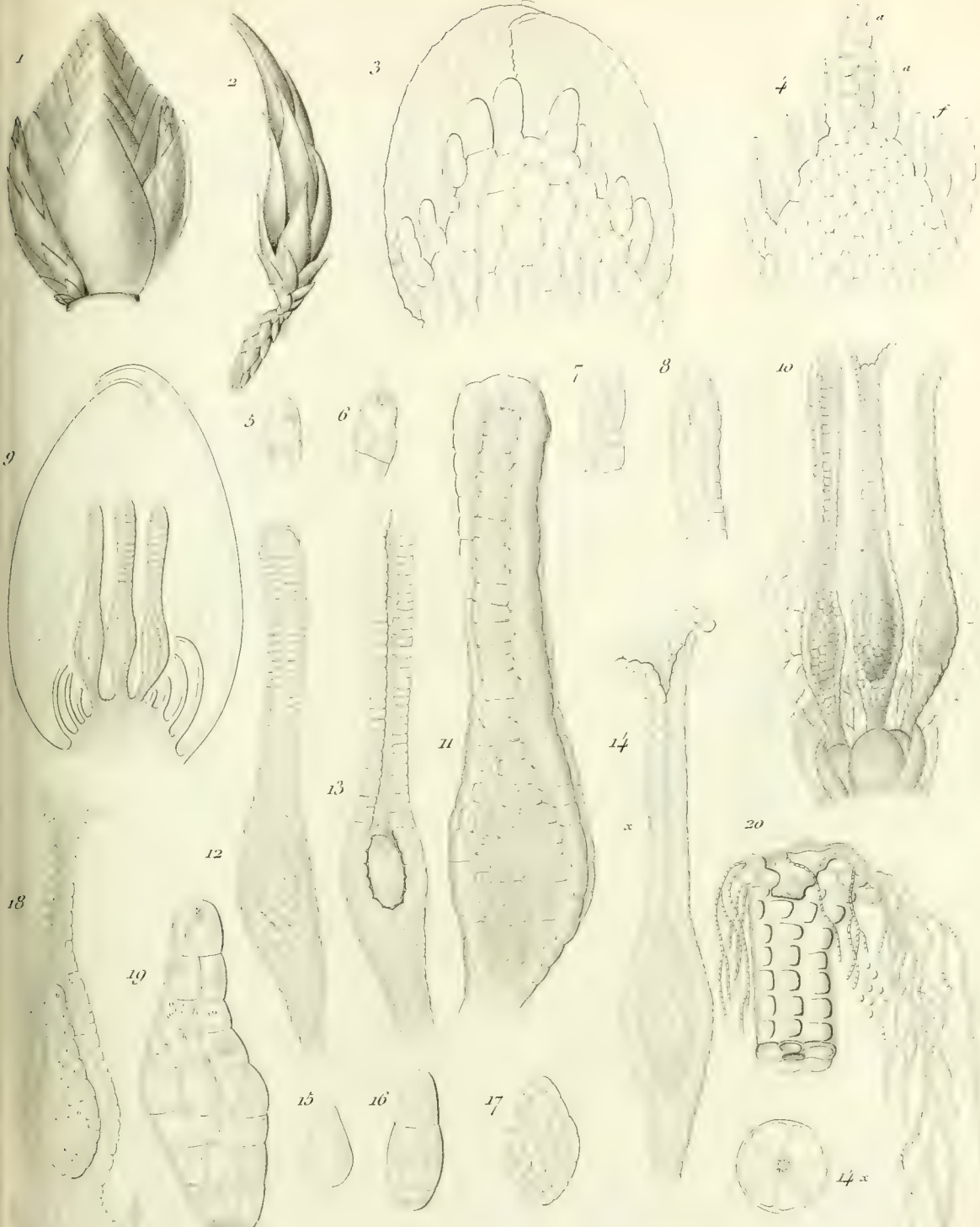


Schamper del. Mlle E. Tailliant sculp.

MODE DE RAMIFICATION ET D'INNOVATION, DISPOSITION DES FEUILLES ET DES RAMEAUX &c.

Schimper del. Melle E. Taillant sc.

INFLORESCENCES ET ORGANES DE GÉNÉRATION MÂLES

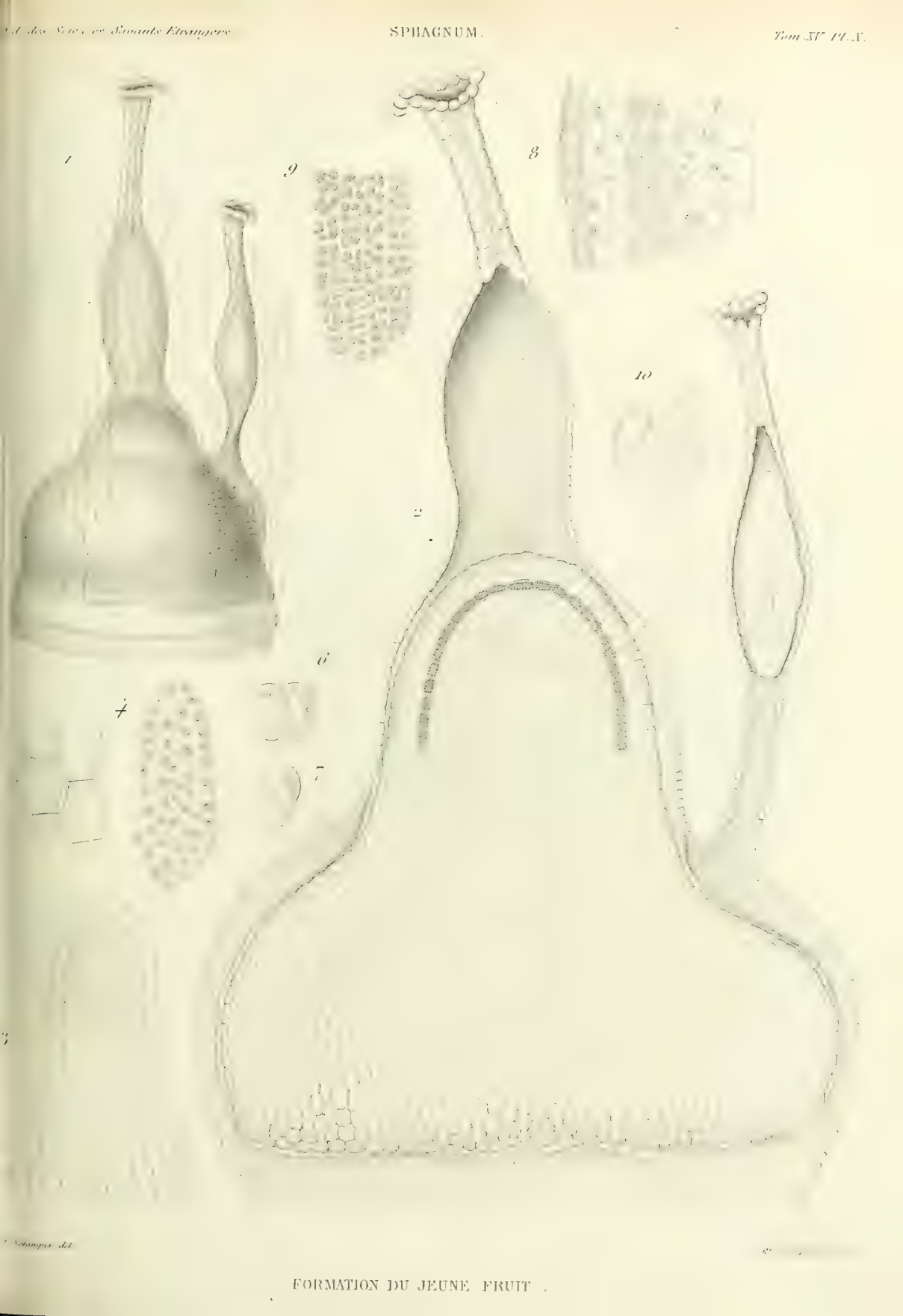


W.P. Schimper del

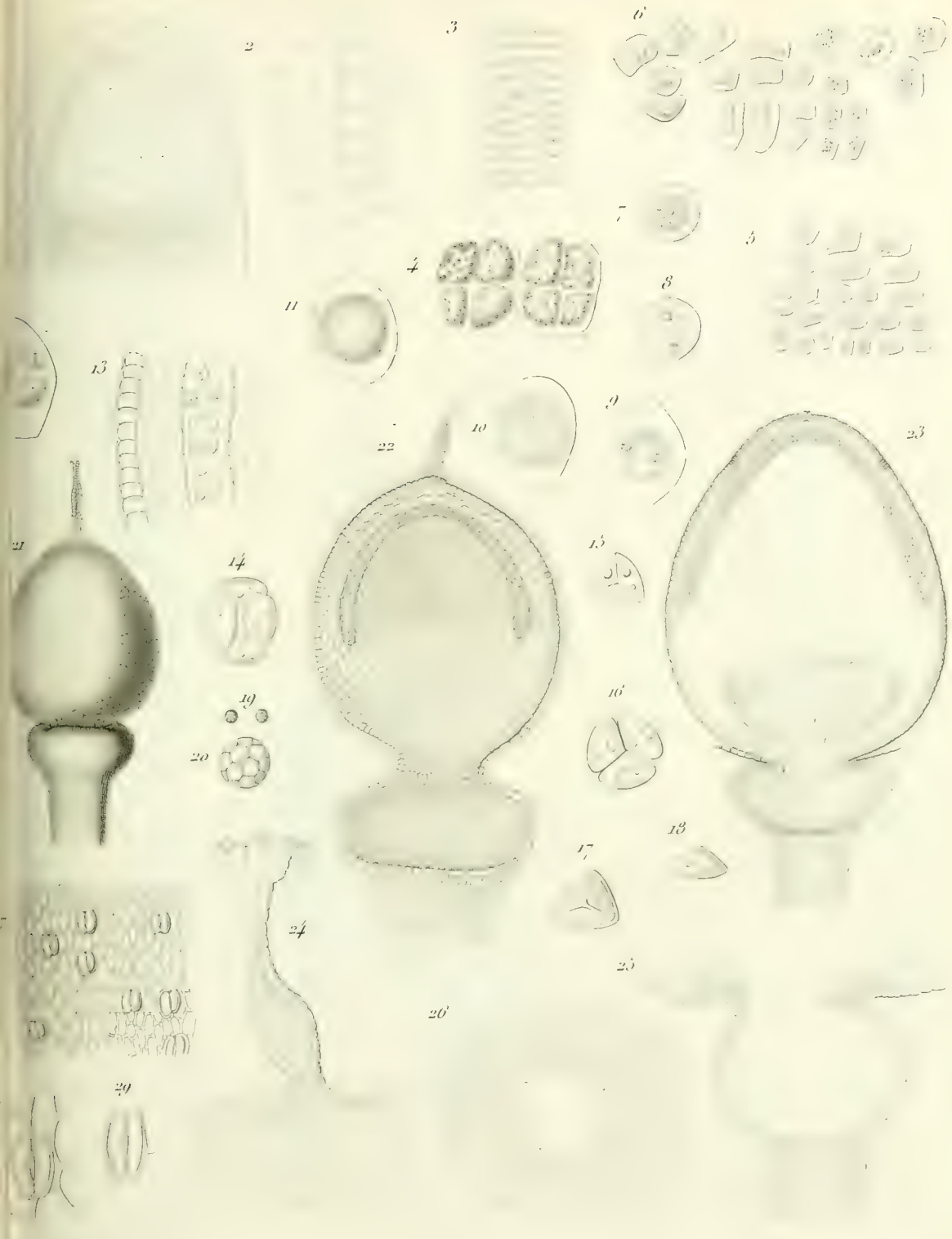
Melle E. Taillant sculp

FLEURS FEMELLES, ORIGINE DES ARCHÉGONES ET LEUR ORGANISATION, CELLULES GERMINATIVES

Imp. Lemercier & Cie Lithographes Paris

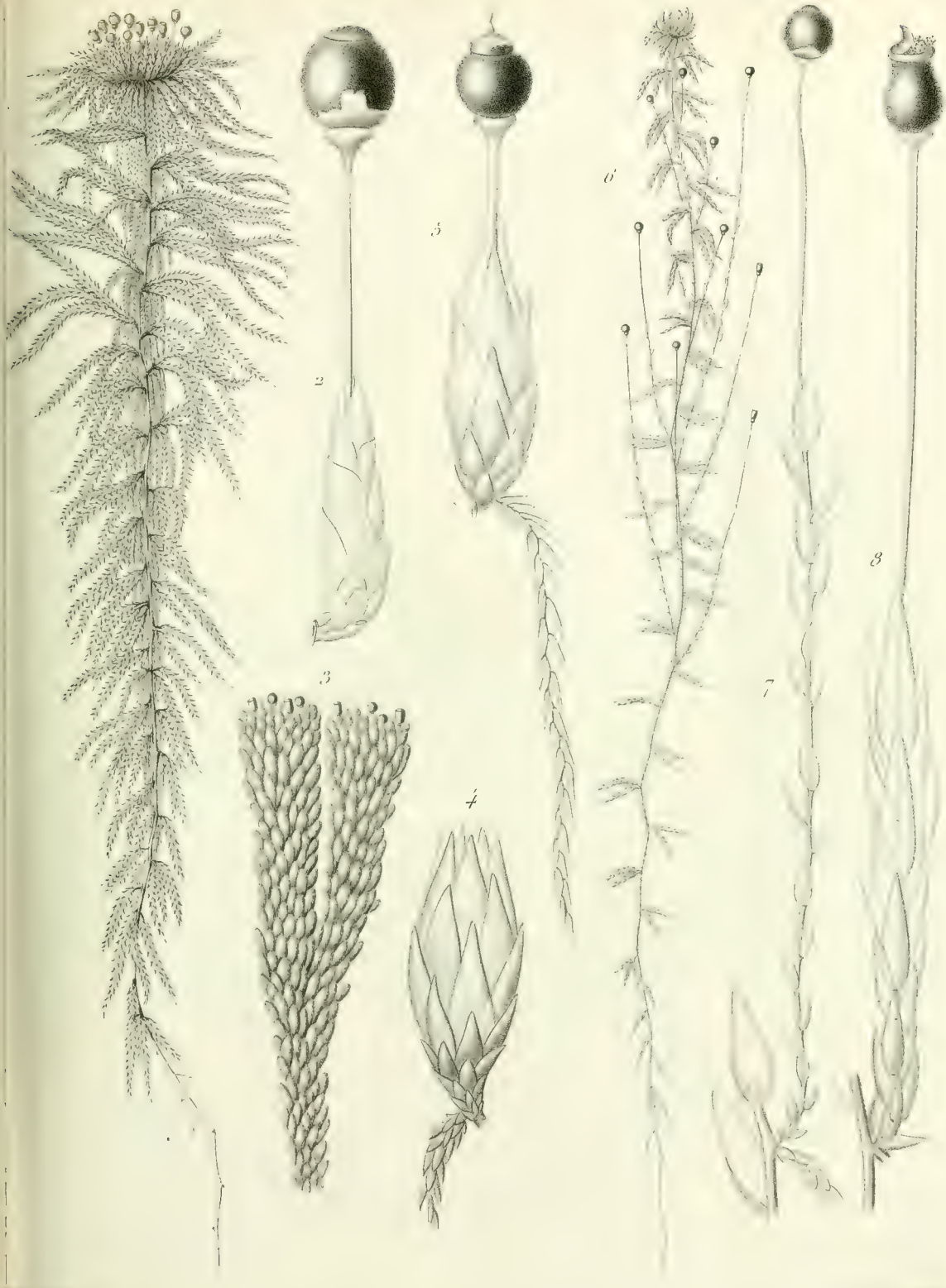


FORMATION DU JEUNE FRUIT .



P. Schumper del. Mlle E. Taillant sculp.

FORMATION DES SPORULES, STRUCTURE DU FRUIT MÛR.

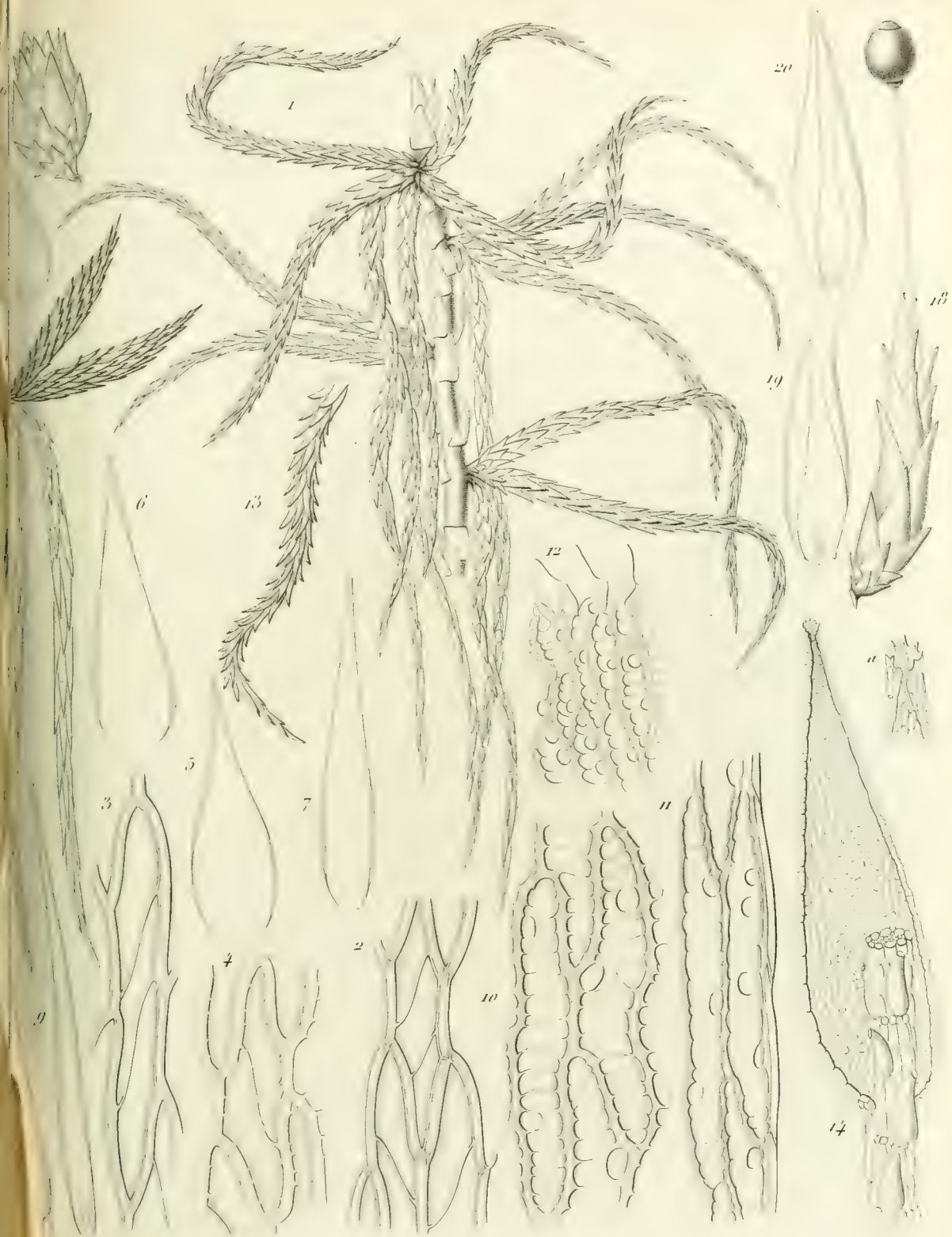


J. Schimper del. Mme L. Laillant sculp.

FRUITS A L'ÉTAT DE MATURITÉ.

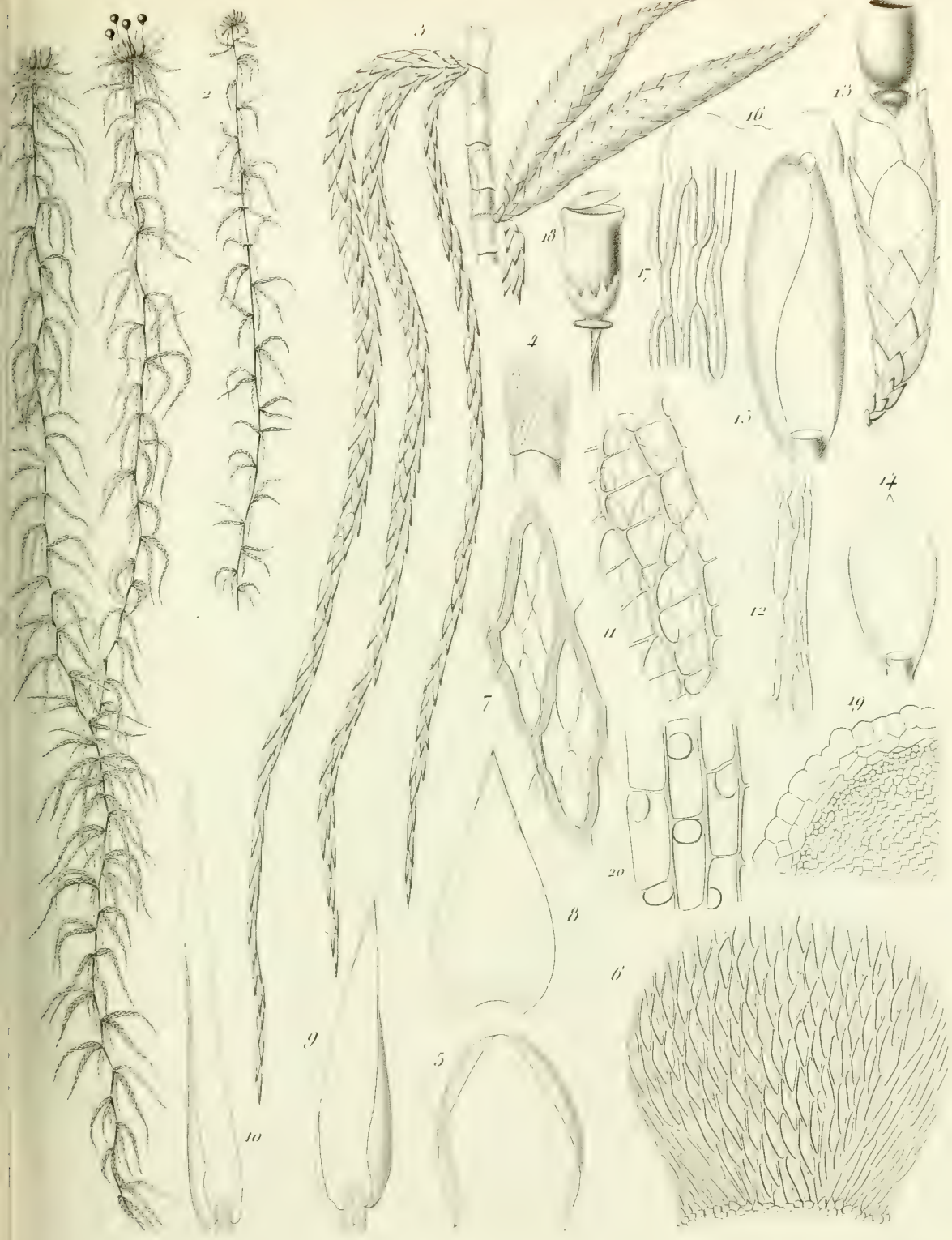
Imp. Lemercier et Cie, rue Hautefeuille, Paris.

SPHAGNUM ACUTIFOLIUM.

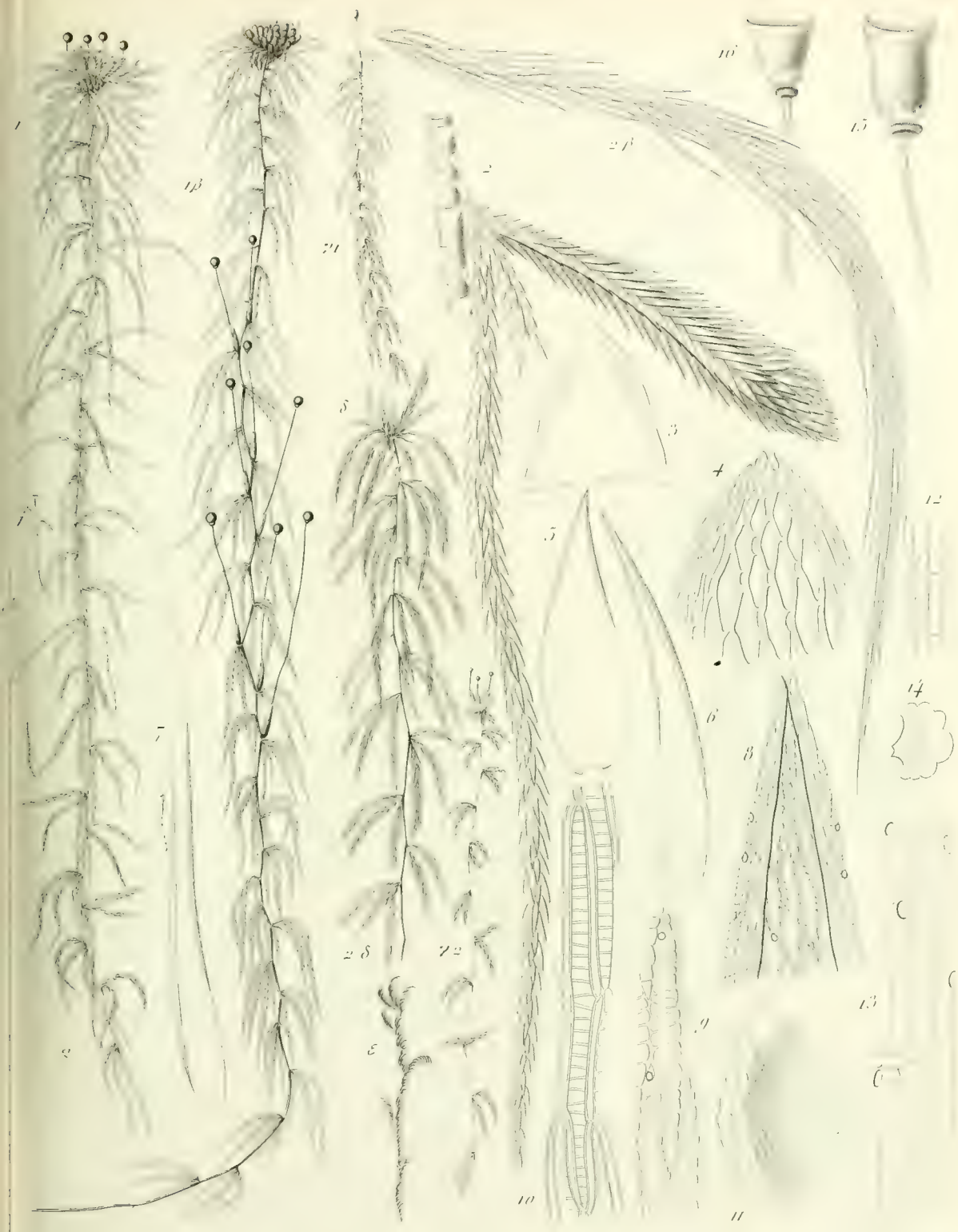


SPHAGNUM ACUTIFOLIUM.

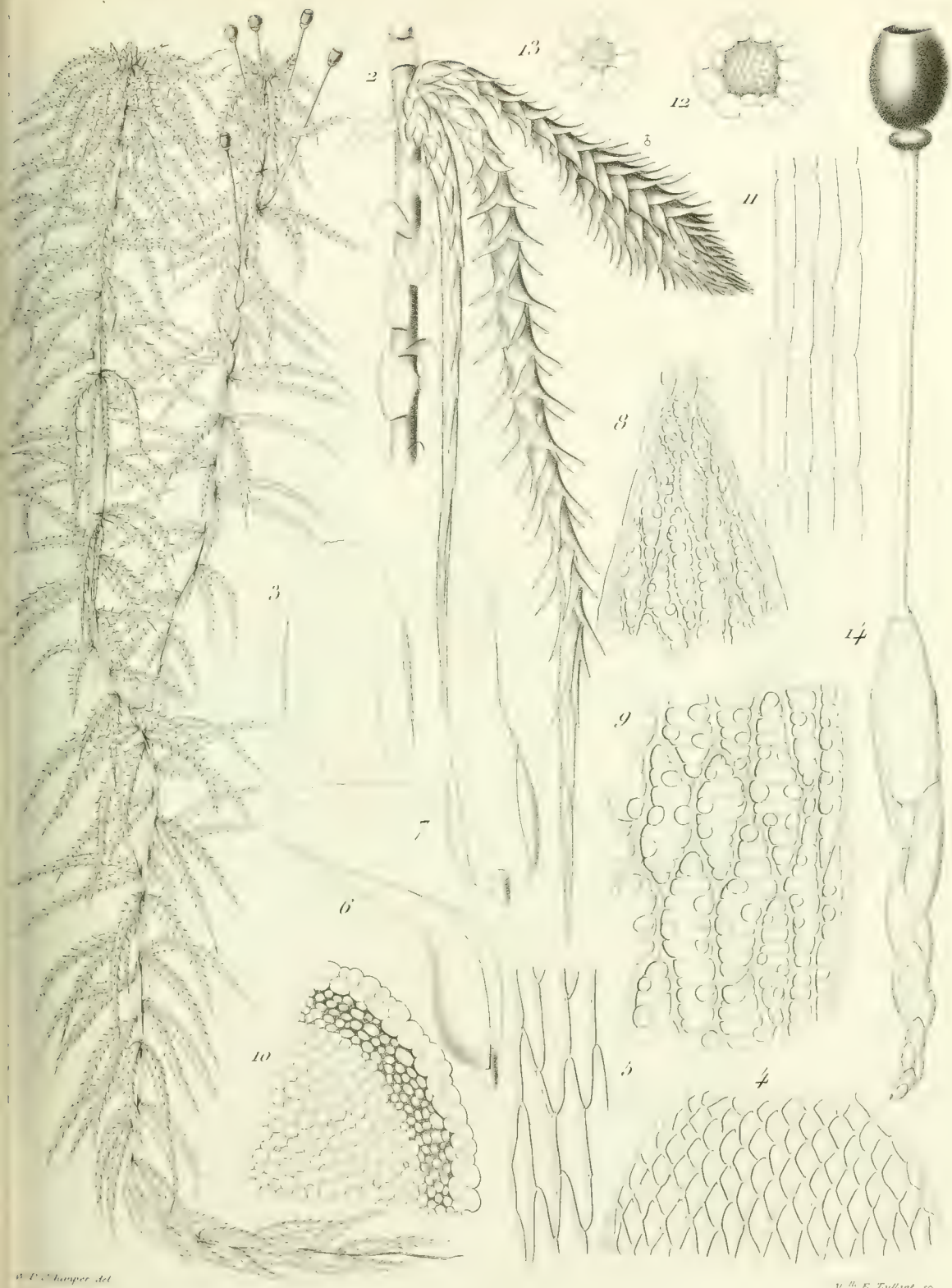
Imp. P. Chardon aîné 30 r. Hautefeuille Paris



SPHAGNUM FIMBRIATUM



SPHAGNUM CUSPIDATUM



W. C. Hooper del.

M.lle E. Tullant sc.

SPHAGNUM SQUARROSUM.

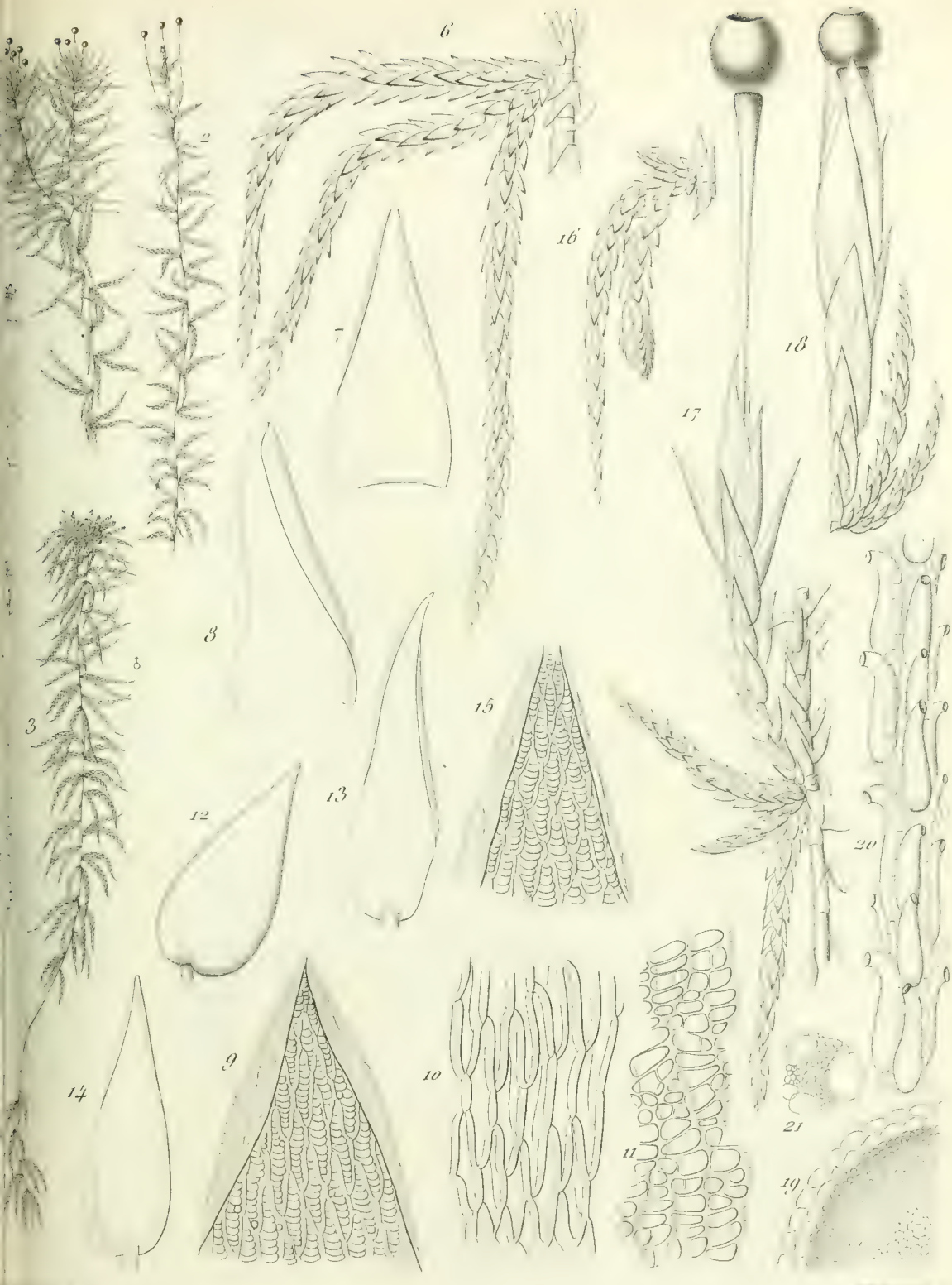
Mlle E. Vaillant sc

SPHAGNUM RIGIDUM.

P. Schimper del. Melle E. Taillant sc.

SPHAGNUM CYMBIFOLIUM.

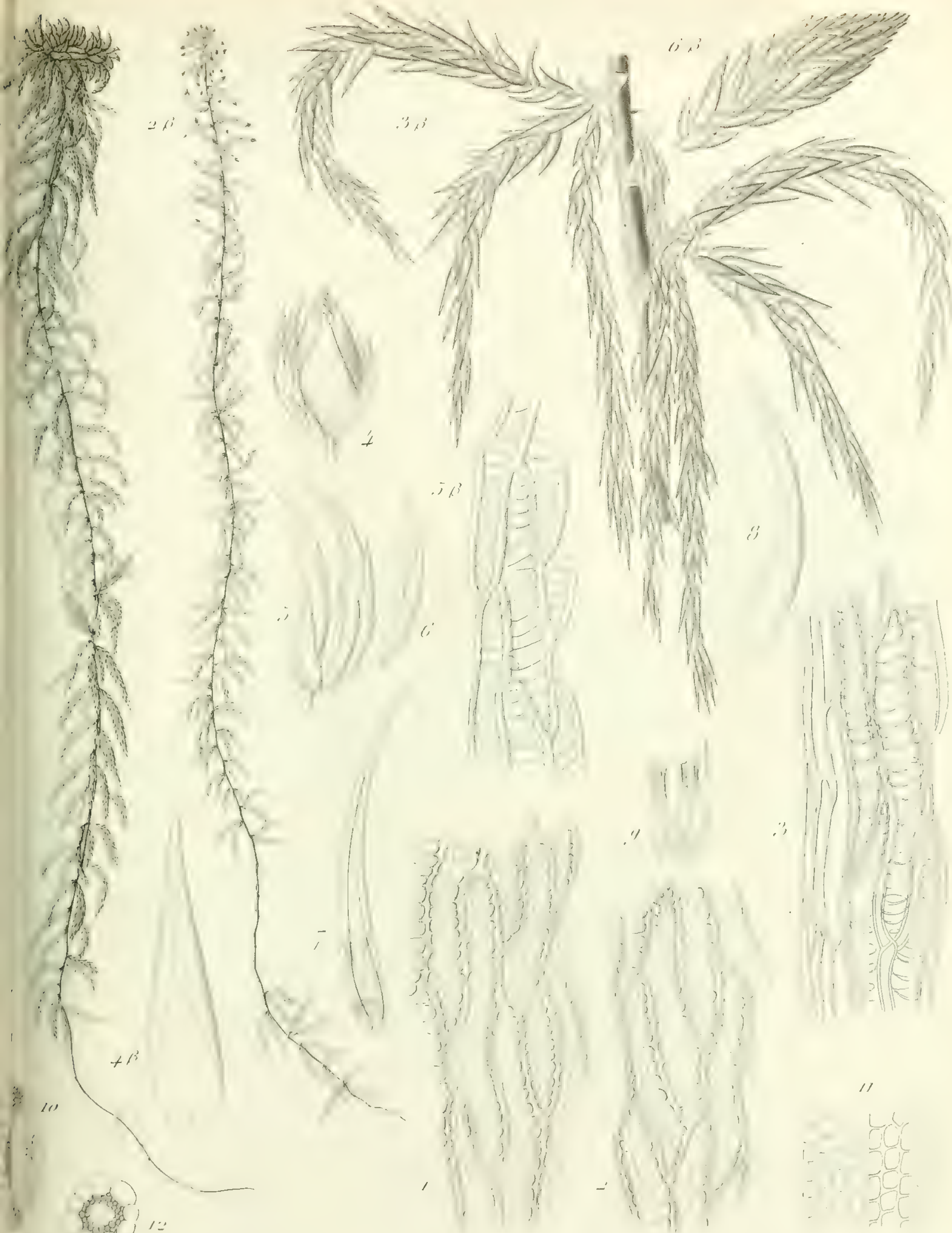
SPHAGNUM RUBELLUM



SPHAGNUM MOLLUSCUM.

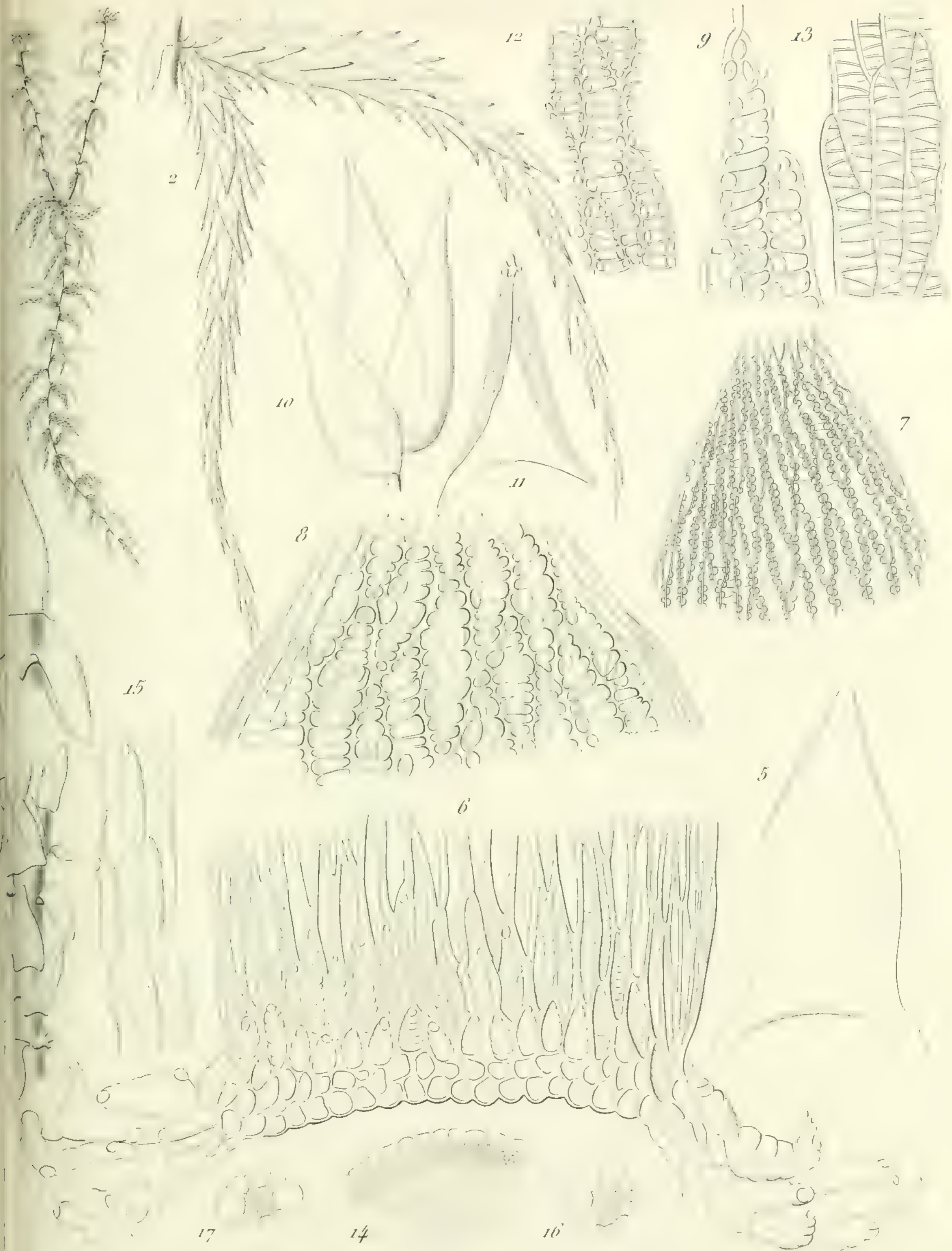
Mlle E. Pallant sc

SPHAGNUM SUBSECUNDUM.



SPHAGNUM SUBSECUNDUM.

Imp. F. Chardon ainé, Sc.

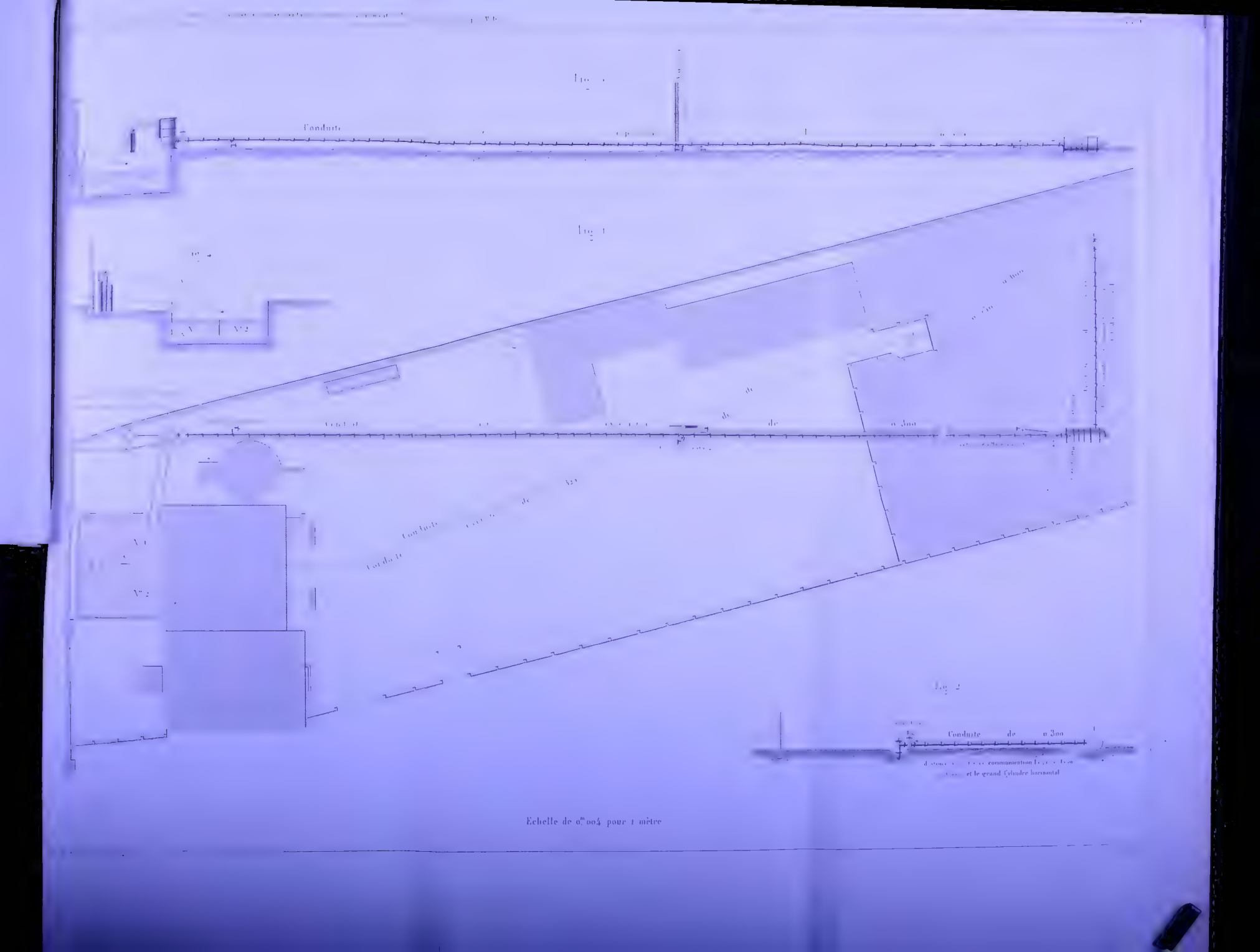


...Schimper del. Melle E. Taillant sc.

SPHAGNUM AURICULATUM.

PLAN GENERAL DE L'ETABLISSEMENT DE CHAILLOT

Echelle de o^{m}.15 pour 100 Metres



Echelle de 0m004 pour 1 mètre

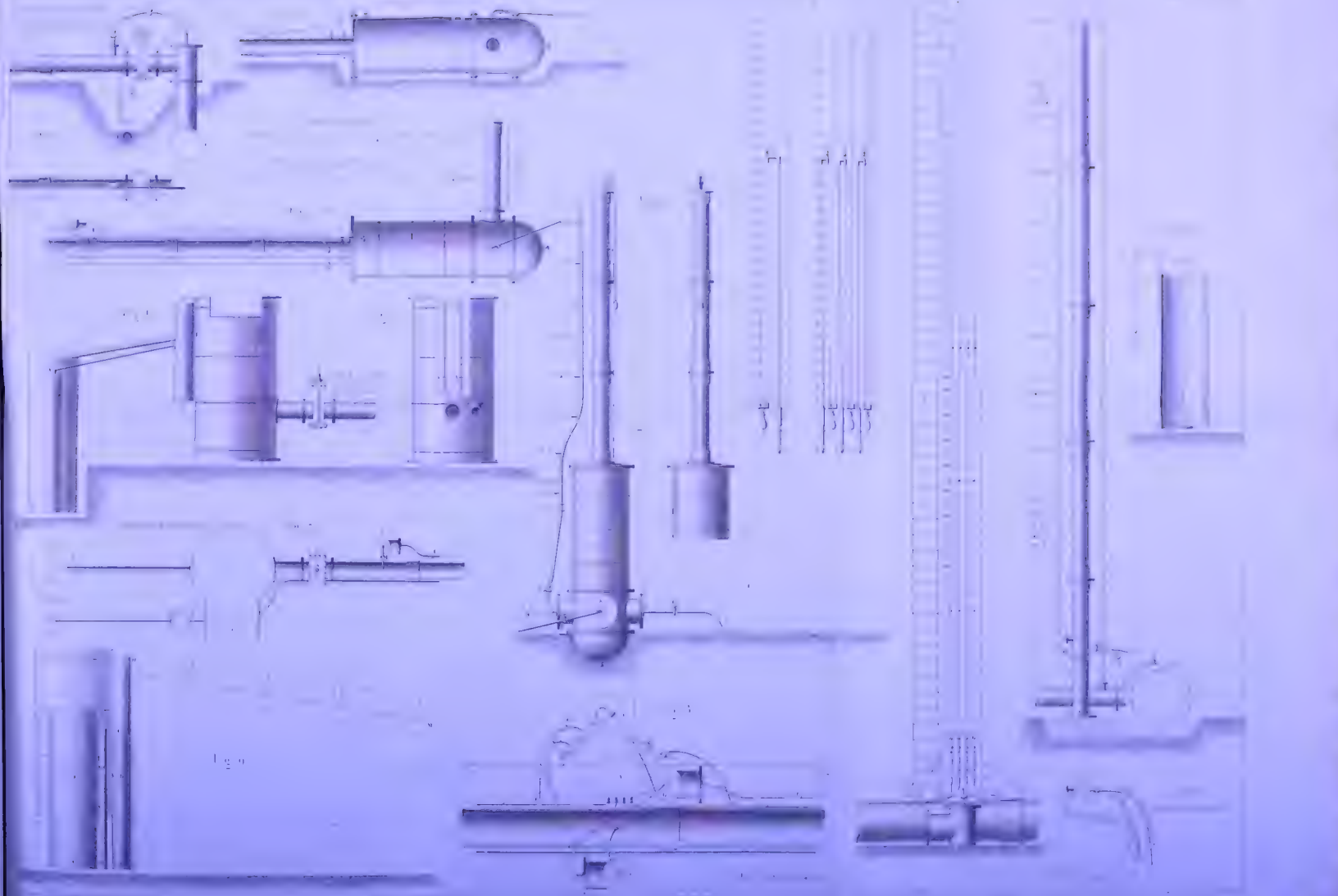


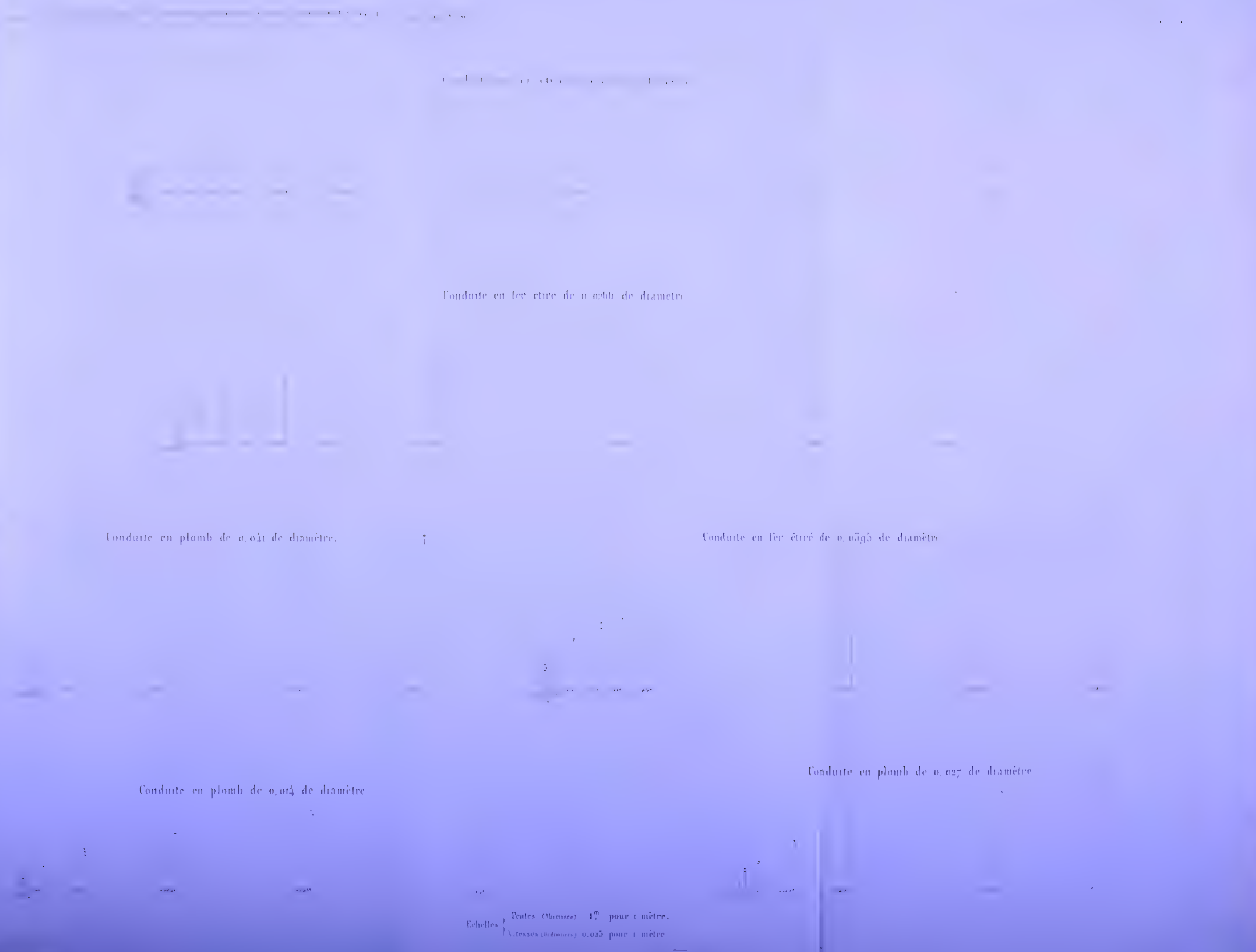
Fig. 4.

Fig. 1.

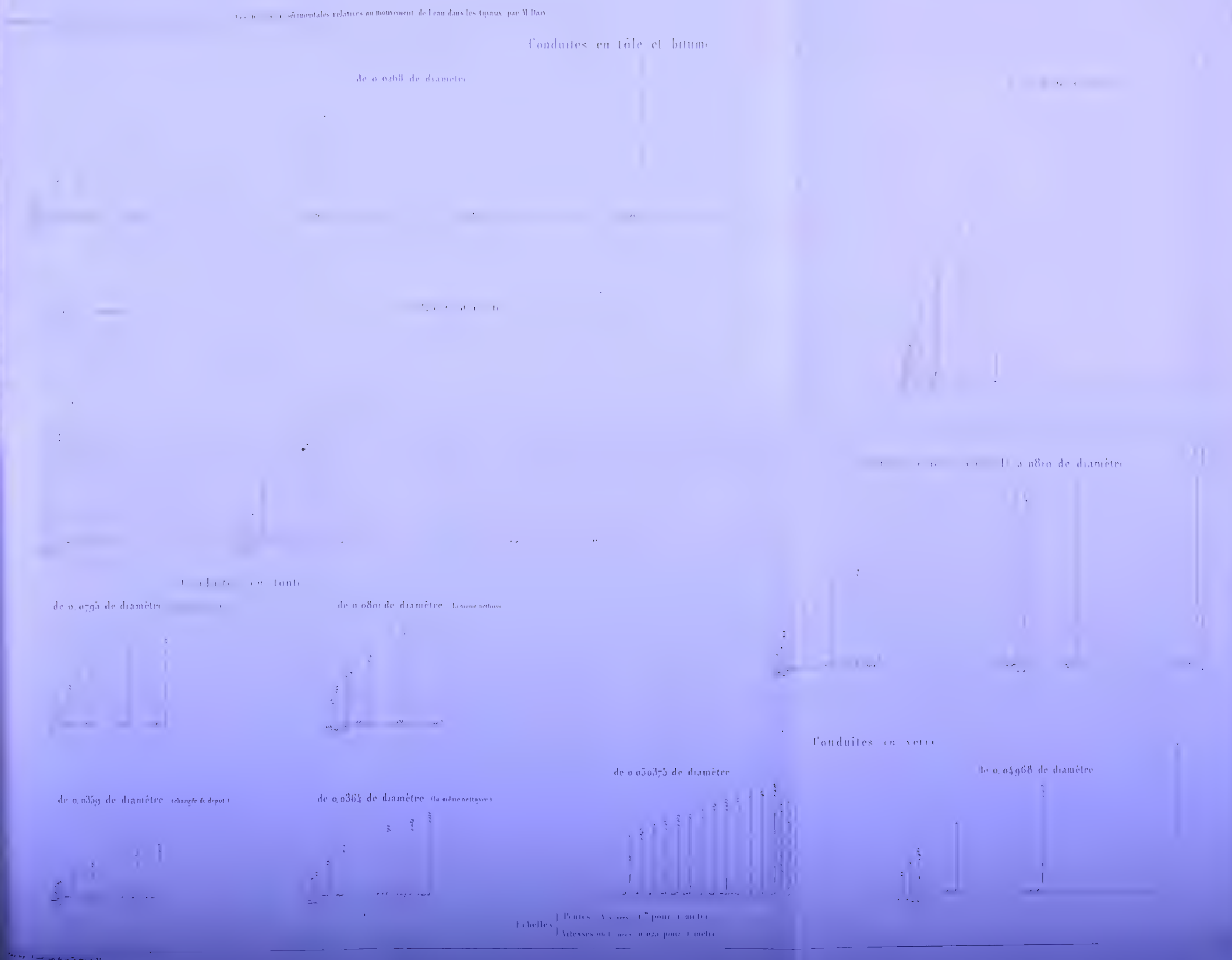
Échelle de la Fig 1 de 0. 40 pour metre

Paris Imp. A. Bellet, Quai de la Tournelle, 35

Dulos sc.



Conduite en fer étiré de 0,0266 de diamètre
Conduite en plomb de 0,041 de diamètre.
Conduite en fer étiré de 0,0395 de diamètre
Conduite en plomb de 0,014 de diamètre
Conduite en plomb de 0,027 de diamètre
Echelles { Pentes (Abscisses) 1m pour 1 mètre. / Vitesses (Ordonnées) 0,025 pour 1 mètre


Conduites en tôle et bitume
de 0,0268 de diamètre
0,0810 de diamètre
de 0,0795 de diamètre
de 0,0801 de diamètre
Conduites en verre
de 0,050375 de diamètre
de 0,04968 de diamètre
de 0,0359 de diamètre (chargée de dépot)
de 0,0364 de diamètre (la même nettoyée)
Échelles

...des expérimentales relatives au mouvement d...

Conduites en fer étiré, de

1° 0,0122 2° 0,0266 3° 0,0395 de diam...

Conduites en fonte

...te en fonte neuve de 0,137 de diamètre

Échelles { des $\frac{R}{I}$ (Abscisses 100 pour 1 mètre
des Vitesses (Ordonnées) 0,05 pour 1 mètre

Conduite en fonte neuve de 0,188 de diamètre

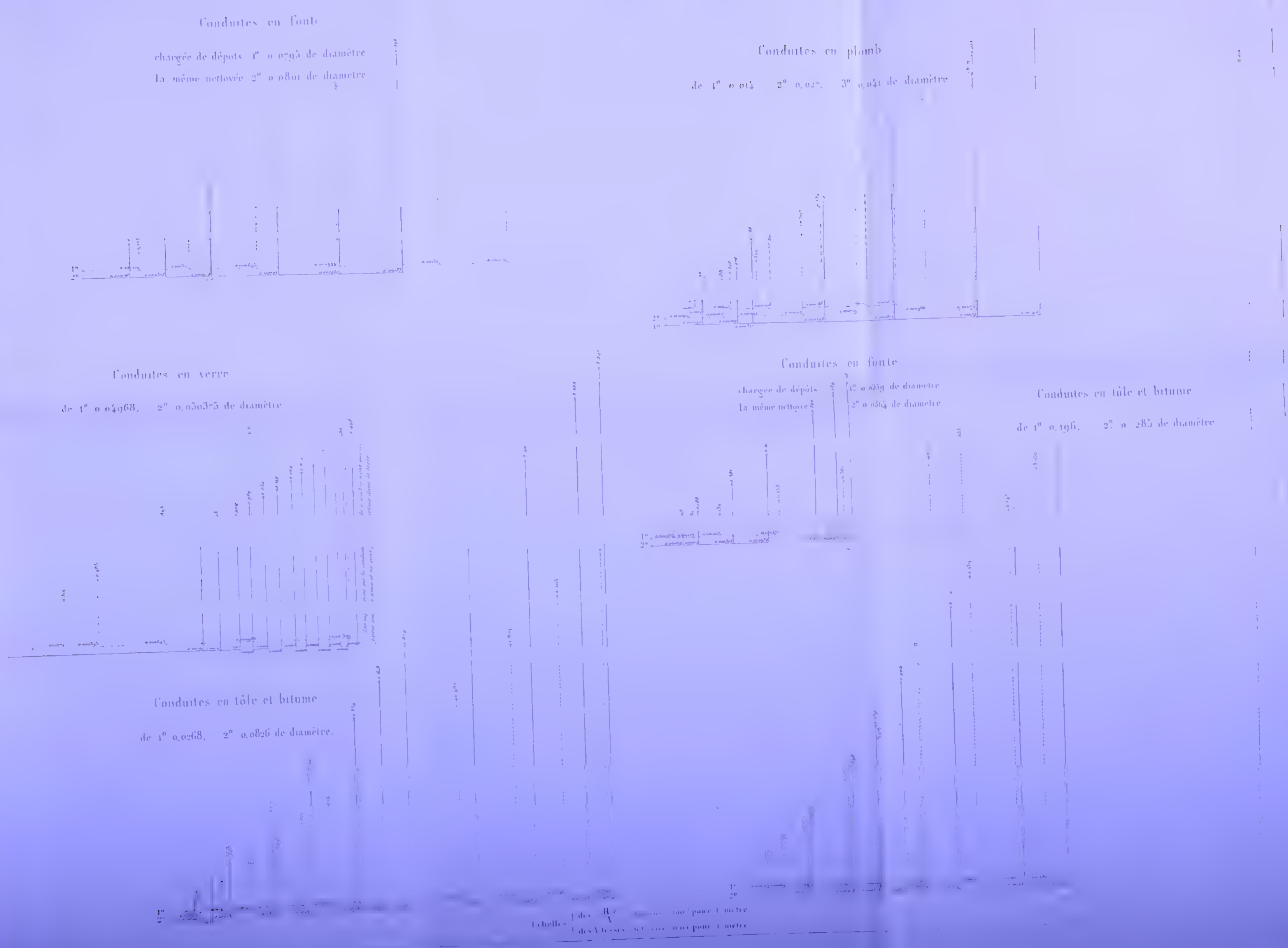
Conduites en fonte

chargée de dépôts de 0,2432 de diamètre.

la même nettoyée de 0,2447 de diamètre

Échelles { des Pentes (Abscisses 1^m pour 1 mètre
des Vitesses (Ordonnées) 0,025 pour 1 mètre

Paris Imp. A. Bertier Quai de la Tournelle 33

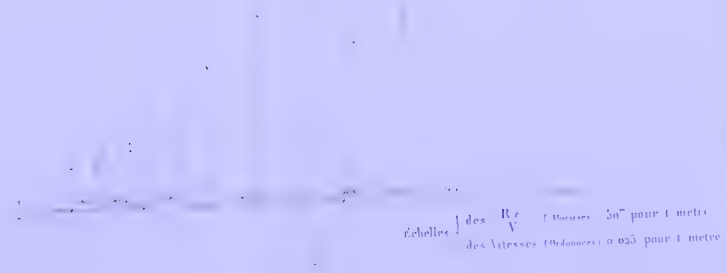

Conduites en fonte
chargée de dépôts 1° 0,0795 de diamètre
la même nettoyée 2° 0,0801 de diamètre
Conduites en plomb
de 1° 0,014 2° 0,027. 3° 0,041 de diamètre
Conduites en verre
de 1° 0,04968. 2° 0,0503-5 de diamètre
Conduites en fonte
chargée de dépôts
la même nettoyée
1° 0,2439 de diamètre
2° 0,2434 de diamètre
Conduites en tôle et bitume
de 1° 0,196. 2° 0,285 de diamètre
Conduites en tôle et bitume
de 1° 0,0268. 2° 0,0826 de diamètre.

Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux par M. Darcy

Conduites en fonte

1° chargée de dépôts 0,2432 de diamètre

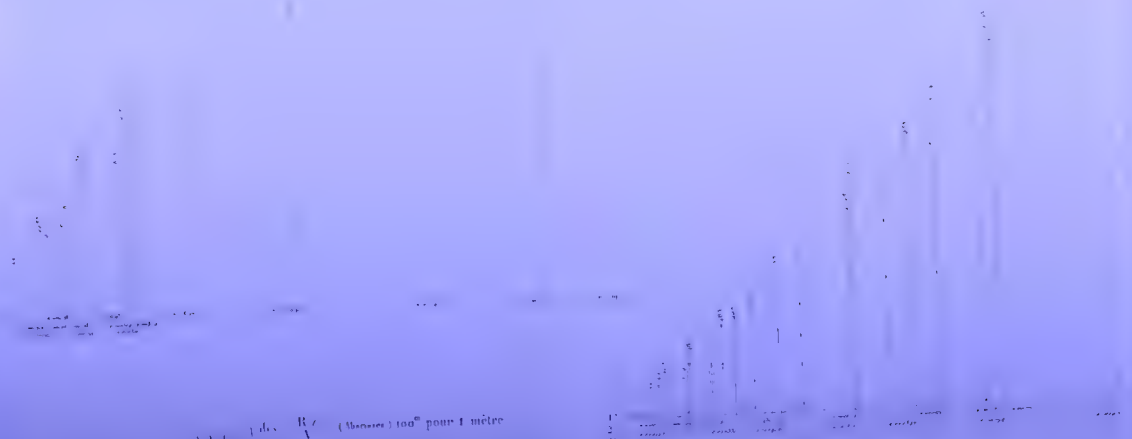
2° la même nettoyée 0,2447 de diamètre



1° ancienne bien nettoyée 0,297 de diamètre

2° neuve ——————— 0,30 de diamètre

neuve de 1° 0,0819 2° 0,137 3° 0,188 de diamètre



PENTES EXPÉRIMENTALES.

Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau [illegible] par M. Bazin

COURBES SUCCESSIVES FORMÉES PAR LES COUCHES FLUIDES CONCENTRIQUES SUIVANT LES PENTES EXPÉRIMENTALES

Formule générale $V\sqrt{x} = 0{,}30\ \frac{C}{R}\sqrt{Vz}$ Diamètre de $0^m{,}18$ — Pentes de $0^m{,}001$ — $0{,}005$ — $0{,}025$ — $0{,}125$

Diamètre de $0^m{,}188$ — Pentes de $0^m{,}00368$ — $0{,}00805$ — $0{,}01340$ — $0{,}0225$ — $0{,}038$[illegible]

Diamètre de $0^m{,}2432$ — Pentes de $0^m{,}00202$ — $0{,}00473$ — $0{,}0229$ — $0{,}032$ — $0{,}1398$

Diamètre de $0^m{,}2447$ — Pentes de $0^m{,}00165$ — $0{,}00498$ — $0{,}02035$ — $0{,}1343$

Diamètre de $0^m{,}297$ — Pentes de $0^m{,}0007$ — $0{,}00617$ — $0{,}01125$ — $0{,}02251$

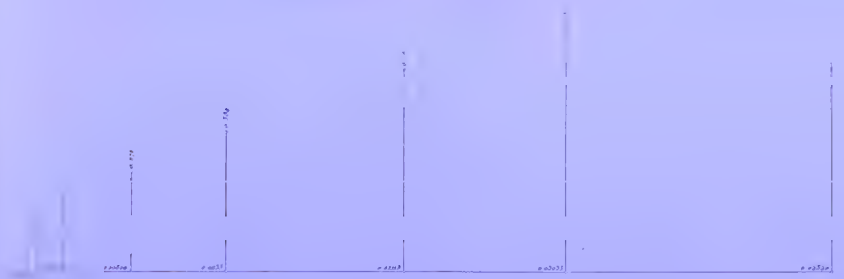
Diamètre de $0^m{,}50$ — Pentes de $0^m{,}0006$ — $0{,}00125$ — $0{,}0026$

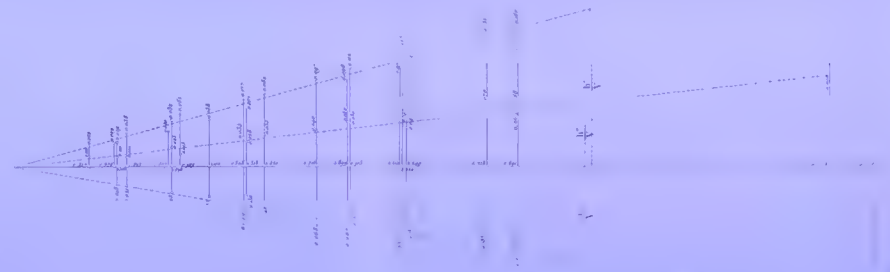
Échelle de 0,10 pour mètre

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 2 mètres

Conduite en fer étiré de 0,0266

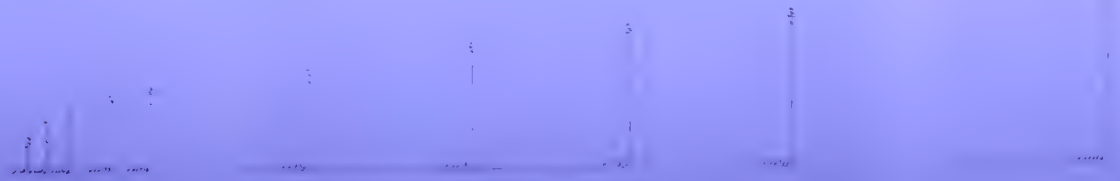
Conduite en tôle et bitume de 0,0268 de diamètre





Échelles { Vitesses (Abscisses) $0^{m},05$ pour 1 mètre
H / V — (Ordonnées) 0, 25 pour 1 mètre

Conduite en fer étiré de 0,0122 de diamètre.



Échelles { Pentes [illegible] pour 1 mètre
Vitesses [illegible] 0,10 pour 1 mètre

Fig 1

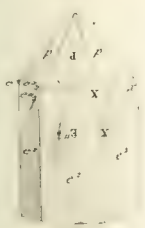


Fig. 6.

Fig. 7

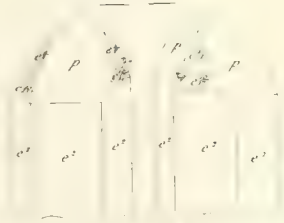


Fig 8

Fig. 9.

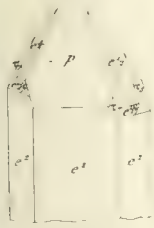


Fig. 13.

Fig. 14.

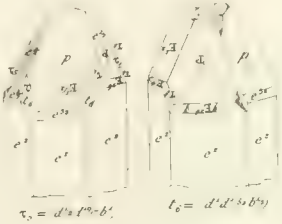


Fig 15

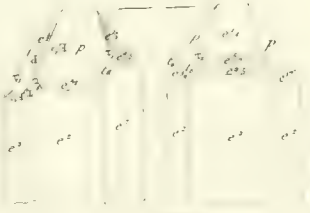


Fig. 16.

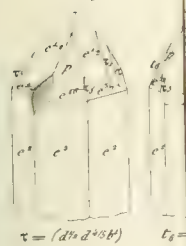


Fig 21.

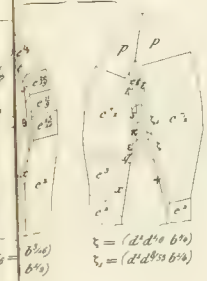


Fig. 22.

Fig. 23.

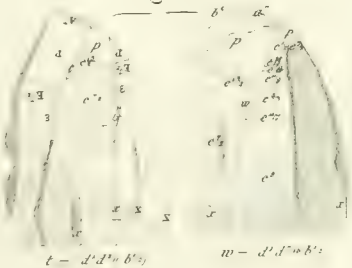
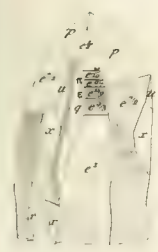


Fig. 24.



29.

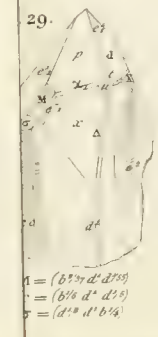


Fig. 30.

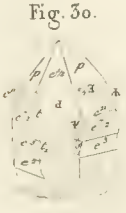
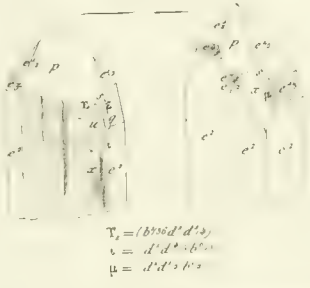


Fig. 31.



Gravé par Dulos

mp Rougier rue des Mathurins S J 20 P

Fig 3.

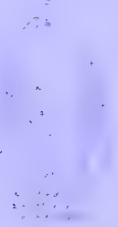
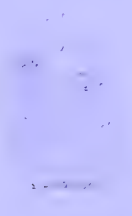


Fig 4



Fig

Fig

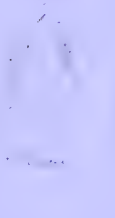


Fig 7

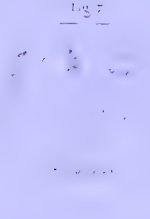


Fig 8

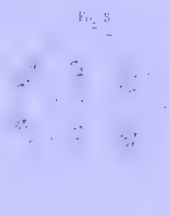


Fig 10

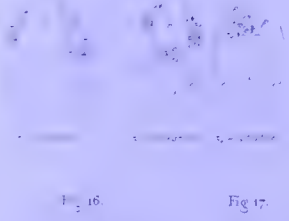


Fig 11

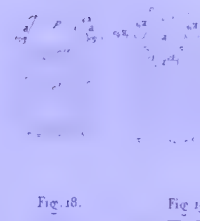


Fig 12.

Fig 13

Fig 14

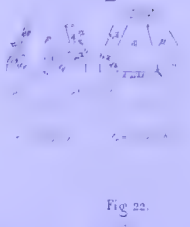


Fig 1

Fig 16.

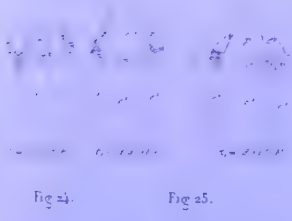


Fig 17.

Fig. 18.

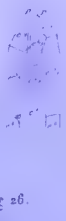


Fig 19.

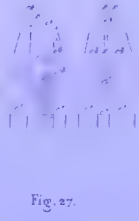


Fig. 20.

Fig 21.

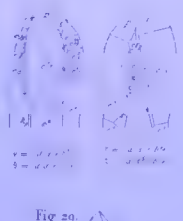


Fig 22.

Fig 23

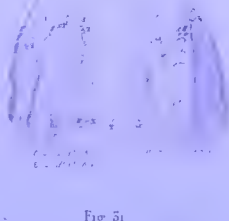


Fig 24.

Fig 25.

Fig 26.

Fig. 27.

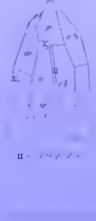


Fig. 28

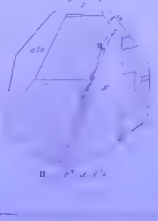


Fig 29.

Fig 30.

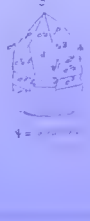


Fig 31

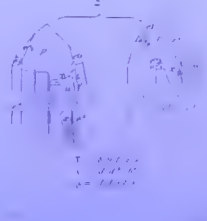
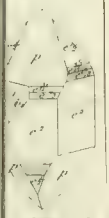
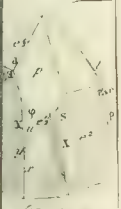


Fig. 52.



Fig

Fi



F

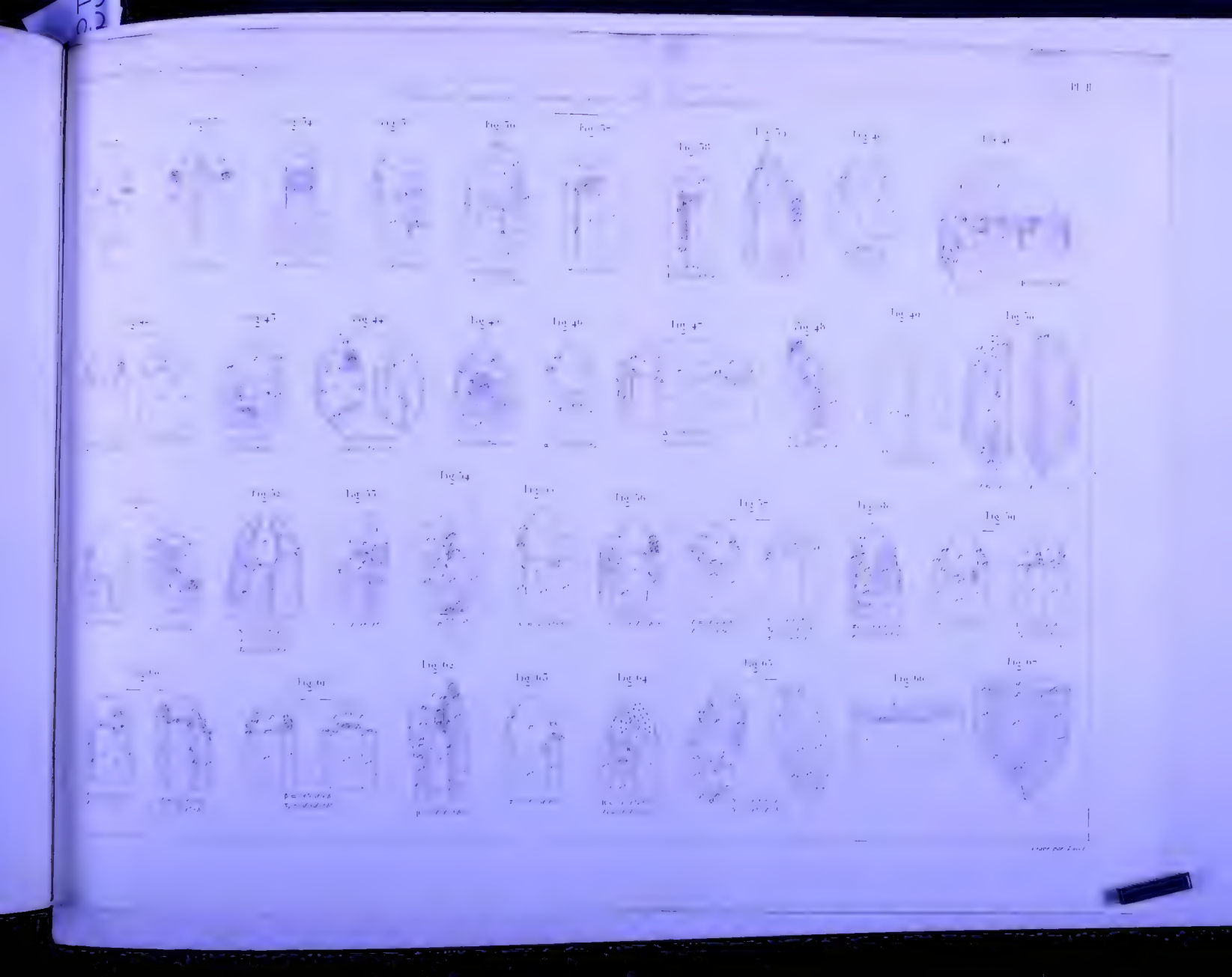


Fig. 68.

Fig. 73.

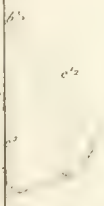


Fig. 74.

Fig. 75.

Fig. 76.

Fig. 81.

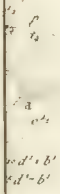


Fig. 82.

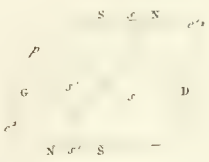


Fig. 83.

Fig. 84.

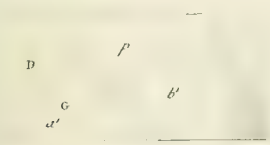


Fig. 89.

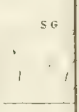


Fig. 90.

Fig. 91.

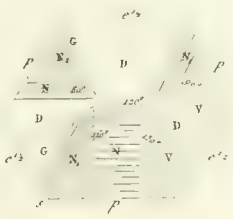


Fig. 92.

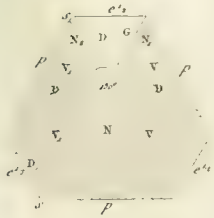


Fig. 93.

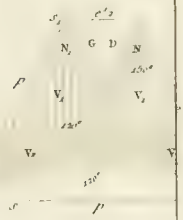


Fig. 98.

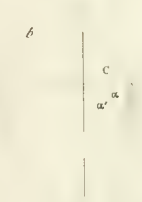
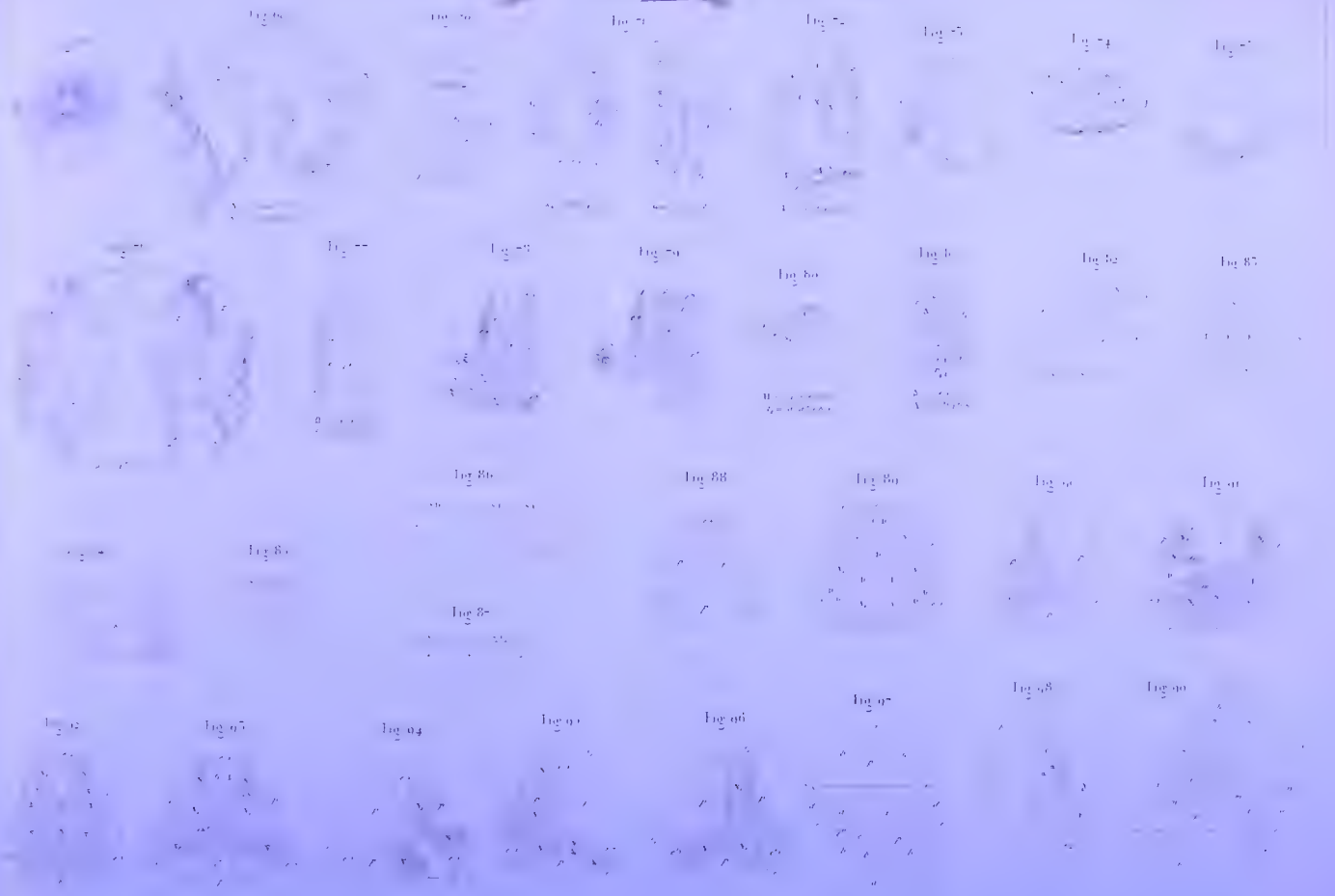
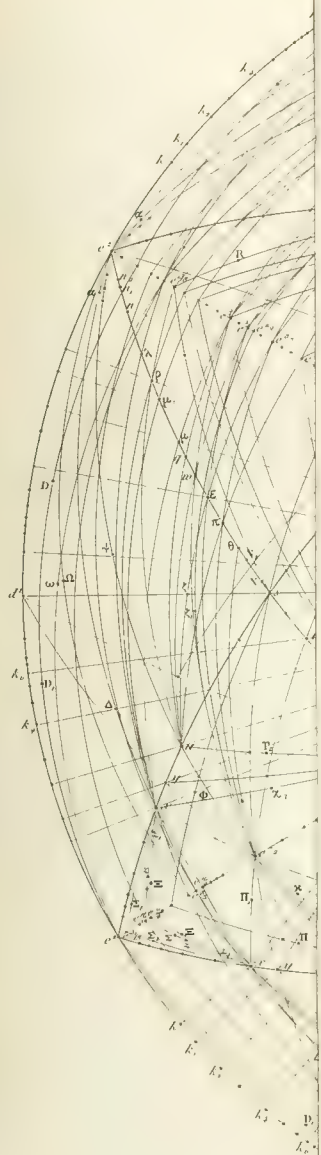


Fig. 99.





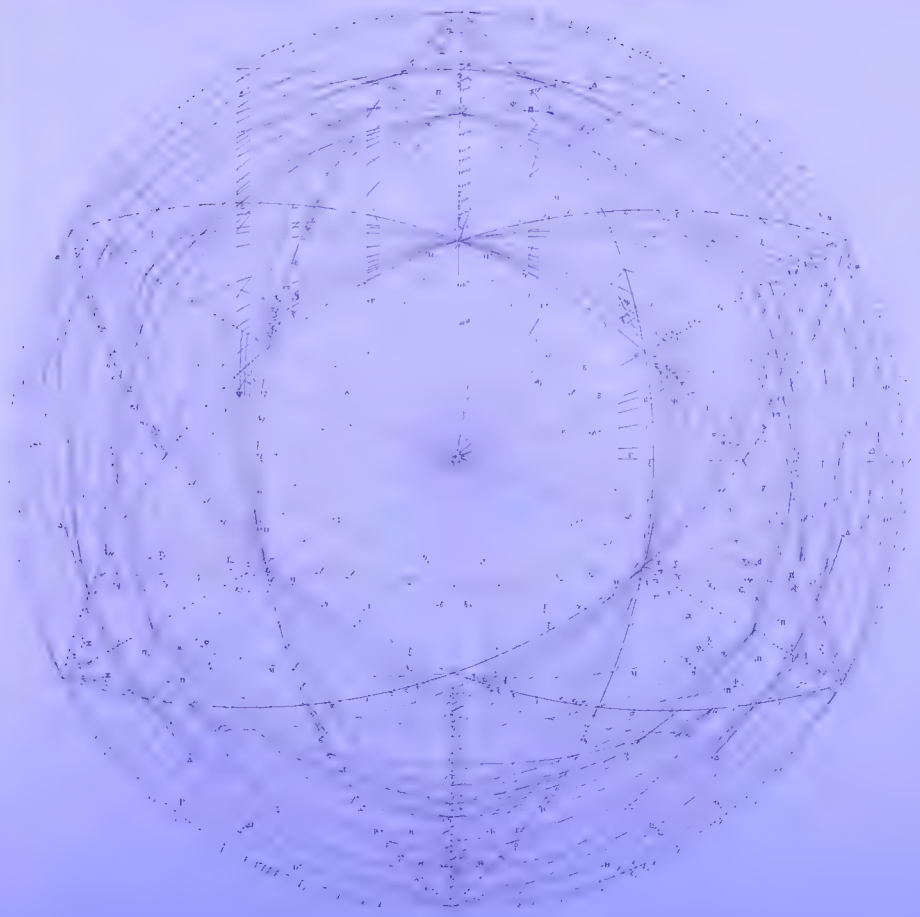


Fig. 1.

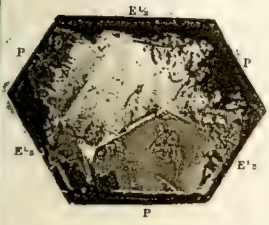


Fig. 2.

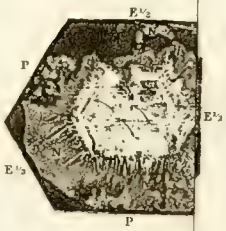


Fig. 6.

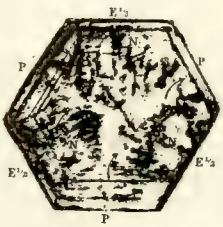


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 12.

Fig. 13.

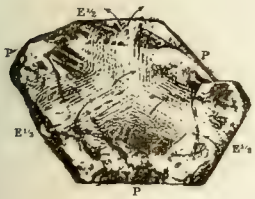


Fig. 14.

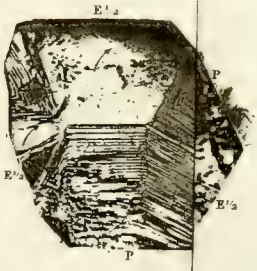


Fig. 18

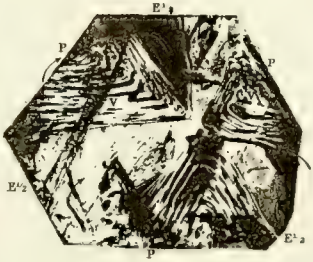
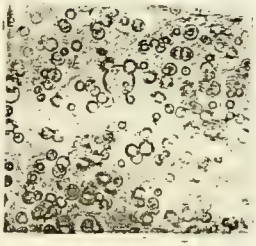


Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 24.



par la lumière, procédé de MM. Garnier et Salmon de Chartres.

Fig. 1

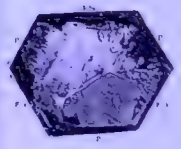


Fig. 2

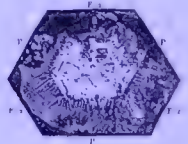


Fig. 3

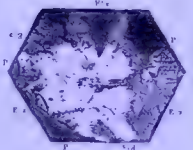


Fig. 4

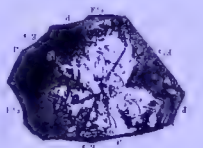


Fig. 5

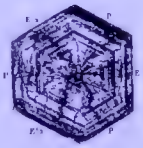


Fig. 6

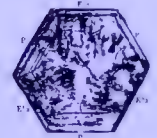


Fig. 7

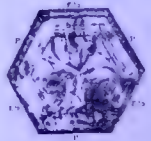


Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

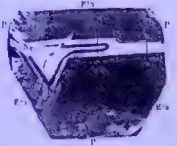


Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

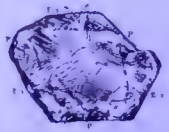


Fig. 14

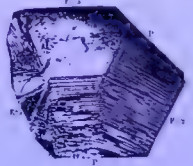


Fig. 15

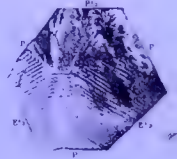


Fig. 16

Fig. 17

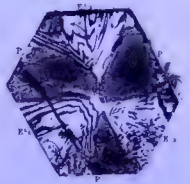


Fig. 18

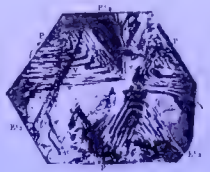


Fig. 19

Fig. 20

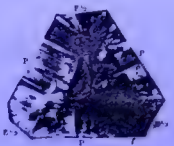


Fig. 21

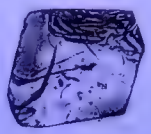


Fig. 22.

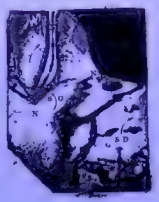


Fig. 23

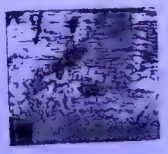
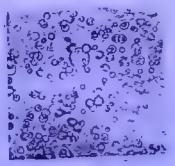


Fig. 24



... ure par la lumière, procédé de MM Garnier et Salmon de Chartres.